

**ESERCIZI PER IL CORSO
FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA E
IPERCOMPLESSA**

Si ricordi che una superficie di Riemann si dice ellittica, parabolica o iperbolica a seconda che sia rivestita da $\hat{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} o Δ , rispettivamente. Si ricordi inoltre che se X è iperbolica si denota con d_X la distanza indotta su X dalla distanza di Poicaré del disco Δ . Si ricordi infine la notazione

$$A(r, R) := \Delta(0, R) \setminus \overline{\Delta(0, r)}$$

che abbiamo adottato per le corone circolari di raggio interno $r > 0$ e raggio esterno $R > r$.

Esercizio 1. In questo esercizio si pensa a $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ come un sottoinsieme della sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. Al variare di $n \in \mathbb{N}$, si classifichi la superficie $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \dots, n\}$ come ellittica, parabolica o iperbolica. Si motivi opportunamente la propria risposta.

Esercizio 2. Si dica, motivando la propria risposta, quali delle seguenti superfici di Riemann sono biolomorfe tra loro:

- la sfera $\hat{\mathbb{C}}$
- il piano \mathbb{C} privato della semiretta $[0, +\infty)$
- il toro $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$
- il toro $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + 2i\mathbb{Z})$
- la corona circolare $A(1, 2)$
- il disco “bucato” Δ^*

Esercizio 3. Sia X una superficie di Riemann iperbolica e sia $Y \subseteq X$ una superficie di Riemann la cui struttura è indotta da quella di X . Si provi che Y è iperbolica e che per ogni $z, w \in Y$ vale la disuguaglianza

$$d_X(z, w) \leq d_Y(z, w).$$