ESERCIZI PER IL CORSO
FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA E IPERCOMPLESSA

Si ricordi che, associando a ogni

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$$

la trasformazione lineare fratta $F_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *si ottiene un epimorfismo di gruppi*

$$GL(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}).$$

Si ricordi che $\mathbf{\Delta}$ *indica il disco unitario* $\Delta(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *e che*

$$\mathcal{M} := \{uM_a : u \in \partial\mathbf{\Delta}, a \in \mathbf{\Delta}\}$$

dove per $a \in \mathbf{\Delta}$ *si è posto* $M_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
Si denoti, infine, con $\mathbf{U} = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ *il semipiano superiore di* $\mathbb{C}$ *e si ponga*

$$\mathcal{T} = \{F_A : A \in GL(2, \mathbb{R}), \det A > 0\}.$$

Esercizio 1. Si completi quanto visto a lezione nello studio di $\mathcal{M}$, provando che $\mathcal{M}$ è un gruppo con l'operazione di composizione.

Esercizio 2. Si dica, motivando la risposta, se per ciascuna delle seguenti coppie di domini $\Omega, \Omega' \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ risulta che Ω è biolomorfo a Ω':

- $\hat{\mathbb{C}}$ e $\mathbf{U}$
- $\mathbb{C}$ e $\hat{\mathbb{C}}^*$
- $\hat{\mathbb{C}}^*$ e $\mathbf{\Delta}$
- $\mathbf{U}$ e $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Esercizio 3. Si provi che $\mathcal{T}$ è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(\mathbf{U})$.

Esercizio 4. Si provi che se una trasformazione appartenente a $\mathcal{T}$ ha un solo punto fisso τ in $\hat{\mathbb{C}}$, allora $\tau \in \hat{\mathbb{R}}$.