ESERCIZI PER IL CORSO
FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA E IPERCOMPLESSA

Esercizio 1. Se $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ ha raggio di convergenza $R > 0$, si determini il raggio di convergenza di $g(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^3 a_n z^n$ e si esprima la g così definita in funzione di f.

Esercizio 2. Si provi che una funzione intera f che soddisfa la diseguaglianza $|f(z)| \leq |z|^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ è un polinomio.

Esercizio 3. Si dimostri che le derivate successive di una funzione olomorfa f in un punto a non possono soddisfare per ogni $n \in \mathbb{N}$ la diseguaglianza

$$|f^{(n)}(a)| > n!\, n^n$$

e si formuli un teorema più stringente dello stesso tipo.

Esercizio 4. Si provi il seguente risultato:

Lemma. *Dati un dominio* Ω, *un punto* $a \in \Omega$ *e una funzione olomorfa* $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, *se* $\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = 0$ *allora per ogni ciclo* $\gamma \sim 0$ *in* Ω *con* $\operatorname{supp}(\gamma) \not\ni a$ *vale*

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

per ogni $z \in \Omega \setminus \big(\{a\} \cup \operatorname{supp}(\gamma)\big)$.

[Ciò a completamento la dimostrazione del fatto che se vale $\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = 0$ allora a è una singolarità eliminabile. Si richiede perciò di non far uso di tale fatto nella soluzione dell'esercizio].