

**ESERCIZI PER IL CORSO  
FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA E  
IPERCOMPLESSA**

*Per  $\mathcal{A} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ , si denoti con  $\operatorname{Re}(w)$  la parte reale di ciascun  $w \in \mathcal{A}$ , ovvero la sua proiezione sull'asse reale  $\mathbb{R}$ . Si denoti poi con  $|w|$  la sua norma euclidea, che in questo contesto normalmente è chiamata modulo.*

**Esercizio 1.** Sia  $\mathcal{A} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$  e siano  $v, w \in \mathcal{A}$ . Si confronti

$$\operatorname{Re}(v\bar{w})$$

con il prodotto scalare euclideo tra i vettori  $v$  e  $w$ . Si verifichi poi che  $w\bar{w} = |w|^2$ .

**Esercizio 2.** Si determinino tutte le funzioni razionali complesse che hanno modulo 1 sulla circonferenza di raggio 1 e centro 0 in  $\mathbb{C}$ . In particolare, per una tale funzione  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  con  $P, Q$  coprimi, si studi la relazione tra gli zeri di  $P$  e quelli di  $Q$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ . Usando la formula di rappresentazione integrale per le derivate di  $f$  richiamata a lezione, si provi che se  $f$  è limitata allora è costante.

**Esercizio 4.** Si dica se un polinomio può avere una singolarità essenziale in  $\infty$ .