ESERCIZI PER IL CORSO *FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA E IPERCOMPLESSA*

Si ricordi che $\mathbf{\Delta} := \Delta(0,1), \mathbf{\Delta}^* = \mathbf{\Delta} \setminus \{0\}, \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti caratteristiche, si dia qualche esempio di dominio D che le possiede oppure si spieghi perché non possono esisterne esempi:

- $D \subseteq \mathbb{C}^*$ che (visto come superficie di Riemann) è iperbolico;
- $D \subseteq \mathbf{\Delta}^*$ che è parabolico;
- $D \subseteq \mathbb{C}$ che è ellittico.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti funzioni $f \in \mathrm{Hol}(\mathbf{\Delta}, \mathbf{\Delta})$, si dica se f è un automorfismo ellittico; in caso contrario, si determini il suo punto di Wolff.

- $f(z) = e^{i\frac{\pi}{9}} z$
- $f(z) = \frac{i}{5} z^7$
- $f(z) = \frac{z+\frac{1}{2}}{1+\frac{z}{2}}$

Si ricordi che l'algebra reale dei quaternioni $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ *è costruita dotando lo spazio vettoriale di una struttura moltiplicativa nel modo seguente: denotata* $1, i, j, k$ *la base standard di* $\mathbb{R}^4$*, si pone*

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

si impone che 1 *sia elemento neutro e poi si estende il prodotto a tutti i quaternioni* $q = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ *(con* $x_l \in \mathbb{R}$*) per linearità e distributività. Normalmente si denota* $x_0 1$ *con* x_0 *e* $\mathbb{R} \cdot 1$ *con* $\mathbb{R}$ *(come nel caso complesso). Si denota inoltre* $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$ *con* $\mathbb{C}$*. Per ogni* $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$*, si definisce il* coniugato *di* q *come*

$$\bar{q} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k.$$

Si denoti infine, al solito, $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$.

Esercizio 3. Si provi che:

- per ogni $q \in \mathbb{H}$ il prodotto $q\bar{q}$ è il quadrato $|q|^2$ della norma euclidea di q;
- per ogni $q \in \mathbb{H}^*$ vale $|q|^{-2}\bar{q} = q^{-1}$;
- per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale $zj = j\bar{z}$;
- se $q = z_1 + z_2 j, p = w_1 + w_2 j$ con $w_1, w_2, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ allora $qp = z_1 w_1 - z_2 \bar{w}_2 + (z_1 w_2 + z_2 \bar{w}_1) j$.