

**ESERCIZI PER IL CORSO
FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA E
IPERCOMPLESSA**

Esercizio 1. Si provi che una funzione intera che ha un polo in ∞ è un polinomio.

Esercizio 2. Si mostri che ciascuna delle funzioni e^z , $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ e $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ha una singolarità essenziale in ∞ .

Esercizio 3. Si dimostri che l'insieme delle funzioni meromorfe su tutto $\hat{\mathbb{C}}$ coincide con l'insieme delle funzioni razionali complesse.

Esercizio 4. Si considerino le funzioni razionali

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

con $P(z), Q(z)$ polinomi complessi coprimi, e si ponga $\deg(f) := \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. Si dica qual è la forma generale di una tale f se f mappa $\partial\Delta(0, 1)$ in sé e se:

- (1) $\deg(f) \leq 1$
- (2) $\deg(f)$ è qualunque
- (3) $\deg(f) = 1$ e f mappa $\Delta(0, 1)$ in sé.

Per ciascuno dei casi elencati si dica, motivando la risposta, se il corrispondente insieme di funzioni è un gruppo rispetto all'operazione di composizione.