

**ESERCIZI PER IL CORSO  
FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA E  
IPERCOMPLESSA**

**Esercizio 1.** Si provi che una funzione intera che ha un polo in  $\infty$  è un polinomio.

**Esercizio 2.** Si mostri che ciascuna delle funzioni  $e^z$ ,  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  e  $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  ha una singolarità essenziale in  $\infty$ .

**Esercizio 3.** Si dimostri che l'insieme delle funzioni meromorfe su tutto  $\hat{\mathbb{C}}$  coincide con l'insieme delle funzioni razionali complesse.

**Esercizio 4.** Si considerino le funzioni razionali

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

con  $P(z), Q(z)$  polinomi complessi coprimi, e si ponga  $\deg(f) := \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ . Si dica qual è la forma generale di una tale  $f$  se  $f$  mappa  $\partial\Delta(0, 1)$  in sé e se:

- (1)  $\deg(f) \leq 1$
- (2)  $\deg(f)$  è qualunque
- (3)  $\deg(f) = 1$  e  $f$  mappa  $\Delta(0, 1)$  in sé.

Per ciascuno dei casi elencati si dica, motivando la risposta, se il corrispondente insieme di funzioni è un gruppo rispetto all'operazione di composizione.