ESERCIZI PER IL CORSO
FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA E IPERCOMPLESSA

Si osservi che, combinando quanto visto a lezione con gli esercizi già svolti, $\mathrm{Aut}(\mathbf{\Delta}) = \{M_a \cdot u : a \in \mathbf{\Delta}, u \in \partial\mathbf{\Delta}\}$ *dove*

- $\mathbf{\Delta} := \Delta(0,1)$
- $M_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$
- *per ogni funzione* f *e costante* u*, il prodotto* $f \cdot u$ *è la funzione* $z \mapsto f(z)u$*.*

In particolare, ogni automorfismo di $\mathbf{\Delta}$ *si estende a un automorfismo di* $\hat{\mathbb{C}}$ *che mappa* $\partial\mathbf{\Delta}$ *in sé.*

Si ricordi poi che $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}) = \{F_A : A \in GL(2,\mathbb{R}), \det A > 0\}$ *dove*

- $\mathbb{U} = \{x+iy : x,y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ *è il semipiano superiore di* $\mathbb{C}$*, che è biolomorfo a* $\mathbf{\Delta}$ *tramite* $\Phi(z) := \frac{z-i}{z+i}$
- $F_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ *se* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

e in particolare ogni automorfismo si estende a un automorfismo di $\hat{\mathbb{C}}$ *che mappa* $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *in sé.*

Esercizio 1. Si mostri che il gruppo $\mathrm{Aut}(\mathbf{\Delta})$ è transitivo su $\mathbf{\Delta}$, ovvero che per ogni $\sigma, \tau \in \mathbf{\Delta}$ esiste $M \in \mathrm{Aut}(\mathbf{\Delta})$ tale che $M(\sigma) = \tau$. Si mostri poi, direttamente o riconducendosi a $\mathbb{U}$, che $\mathrm{Aut}(\mathbf{\Delta})$ è 2-transitivo su $\partial\mathbf{\Delta}$.

Esercizio 2. Si provi che per ogni $M \in \mathrm{Aut}(\mathbf{\Delta})$ l'insieme

$$\mathrm{Fix}(M) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : M(z) = z\}$$

consiste in un punto di $\partial\mathbf{\Delta}$ o in una coppia di punti di $\partial\mathbf{\Delta}$ oppure in una coppia di punti σ_1, σ_2 con $\sigma_1 \in \mathbf{\Delta}, \sigma_2 \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbf{\Delta}}$.

Si ricordi che in ciascuno tre casi appena elencati l'automorfismo M *si dice* parabolico, iperbolico *o* ellittico *(rispettivamente).*

Esercizio 3. Si dimostri che ogni automorfismo ellittico M di $\mathbf{\Delta}$ è coniugato in $\mathrm{Aut}(\mathbf{\Delta})$ a una rotazione, ovvero che esistono $T \in \mathrm{Aut}(\mathbf{\Delta})$ e $u \in \partial\mathbf{\Delta}$ tali che $T^{-1} \circ M \circ T(z) = uz$ per ogni $z \in \mathbf{\Delta}$.

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quali dei seguenti domini di $\hat{\mathbb{C}}$ sono tra loro biolomorfi: $\mathbb{C}, \mathbf{\Delta}, \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbf{\Delta}}, \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^*$.

Con tecnica analoga a quella vista a lezione per sottogruppi di $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$*, si svolga il seguente esercizio.*

Esercizio 5. Si consideri un sottogruppo $\Gamma \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{U})$ costituito solo da traslazioni reali $t_\beta(z) := z + \beta$ con $\beta \in \mathbb{R}$; si supponga che esista $t_{\beta_0} \in \Gamma$ con $\beta_0 > 0$ minimale. Si provi che Γ è il sottogruppo ciclico generato da t_{β_0} (ovvero che per ogni $t_\beta \in \Gamma$ vale $\beta \in \beta_0\mathbb{Z}$) e si indichi un biolomorfismo tra $\mathbb{U}/\Gamma$ e $\mathbf{\Delta}^* = \mathbf{\Delta} \setminus \{0\}$.