ESERCIZI PER IL CORSO
FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA E IPERCOMPLESSA

Esercizio 1. Si verifichi che se Ω è un dominio in $\mathbb{C}$ allora l'insieme

$$\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C}) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ che ammettono derivata complessa}\}$$

(1) è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale;
(2) è chiuso per moltiplicazione:

$$f, g \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C}) \Rightarrow f \cdot g \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C});$$

(3) ammette divisione:

$$f, g \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C}),\ g(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega \Rightarrow \frac{f}{g} \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C}).$$

Si verifichi inoltre che:
(4) $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \Omega'), g \in \mathrm{Hol}(\Omega', \mathbb{C}) \Rightarrow g \circ f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$.

Esercizio 2. Sia $Q(z)$ un polinomio con radici $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ distinte e sia $P(z)$ un polinomio di grado $< n$. Si provi che:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)(z - \alpha_k)}$$

Esercizio 3. Si dimostri che, dati $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ distinti e $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, esiste un unico polinomio $P(z)$ di grado $< n$ con $P(\alpha_k) = c_k$ per ogni k.

Esercizio 4. Per $k \in \mathbb{N}$ e per $\gamma : [0, 2\pi k] \to \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) = a + e^{it}$, si calcoli il numero di avvolgimento $n(\gamma, a)$.

Esercizio 5. In $\mathbb{C}$ si consideri un rettangolo chiuso R centrato in un punto a. Per il bordo ∂R positivamente orientato (ovvero percorso in senso antiorario), si provi che $n(\partial R, a) = 1$.

Esercizio 6. Si trovi l'imbroglio nella dimostrazione data della formula di Cauchy per rettangoli e conseguentemente se ne proponga un enunciato modificato.