ESERCIZI PER IL CORSO
FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA E IPERCOMPLESSA

Si ricordino le notazioni $\mathbf{\Delta}$ *per il disco unitario e* $\mathbf{U}$ *per il semipiano superiore in* $\mathbb{C}$*. Si ricordi che*

$$\Phi : \mathbf{U} \to \mathbf{\Delta} \qquad z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

è un biolomorfismo e che, di conseguenza,

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{U}) = \Phi^{-1} \circ \mathrm{Aut}(\mathbf{\Delta}) \circ \Phi = \{\Phi^{-1} \circ M \circ \Phi \ : \ M = uM_a \ \exists \ u \in \partial\mathbf{\Delta}, a \in \mathbf{\Delta}\}$$

è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$*. Si ricordi infine la notazione*

$$\mathcal{T} = \{F_A : A \in GL(2,\mathbb{R}), \det A > 0\}.$$

Si completi quanto visto a lezione, provando i fatti seguenti.

Esercizio 1. $\mathrm{Aut}(\mathbf{U}) = \mathcal{T}$.

Esercizio 2. Un automorfismo $T \in \mathrm{Aut}(\mathbf{U})$ è parabolico se e solo se esiste $F \in \mathrm{Aut}(\mathbf{U})$ tale che $F \circ T \circ F^{-1}$ sia una traslazione reale di $\mathbf{U}$.

Esercizio 3. Due automorfismi $M, \widetilde{M} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{\Delta}) \setminus \{id_{\mathbf{\Delta}}\}$ commutano per composizione se, e solo se, $\mathrm{Fix}(M) = \mathrm{Fix}(\widetilde{M})$.

Si argomenti in dettaglio il seguente fatto, usato più volte a lezione.

Esercizio 4. Sia Ω un dominio in $\mathbb{C}$ e sia $p \in \Omega$. Se

$$f : \Omega \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$$

è una funzione olomorfa e iniettiva allora p non è una singolarità essenziale per f.