ESERCIZI PER IL CORSO *ALGEBRA E LOGICA*

Si consiglia di risolvere i seguenti esercizi entro il prossimo 31 maggio. Si tenga presente che gli esercizi elencati non esauriscono le tematiche trattate durante le lezioni, e dovranno quindi essere integrati con quelli del libro di testo.

Logica dei predicati - sintassi (24-25/05/2011)

Esercizio 1. Si considerino gli insiemi di costanti $\mathcal{C} = \{a, b\}$, di variabili $\mathcal{V} = \{x, x_1, x_2, \ldots\}$, di funzioni $\mathcal{F} = \emptyset$ e di predicato $\mathcal{P} = \{D^1, E^1\}$ e si traducano in formule ben formate le seguenti frasi:

(1) Anna esce la sera e si diverte.
(2) Benedetta esce la sera, ma non si diverte.
(3) Se Anna esce la sera, lo fa anche Benedetta.
(4) Tutti escono la sera.
(5) C'è qualcuno che esce la sera ma che non si diverte.
(6) Tutti escono la sera, ma non tutti si divertono.

Esercizio 2. Si traducano le seguenti frasi in formule ben formate

(1) Alessandro è figlio di Bruno.
(2) Alessandro è figlio del padre di Alessandro.
(3) Qualcuno è figlio di Bruno.
(4) Tutti sono figli del proprio padre.
(5) Per ognuno, esiste qualcuno che non è suo figlio.

utilizzando gli insiemi di costanti $\mathcal{C} = \{a, b\}$, di variabili $\mathcal{V} = \{x, y, x_1, y_1, \ldots\}$, di funzioni $\mathcal{F} = \{p^1\}$ e di predicato $\mathcal{P} = \{F^2\}$.

Esercizio 3. Di ognuna delle seguenti formule si disegni l'albero sintattico (finché possibile); si dica poi quali di esse sono formule ben formate:

(1) $(A(x) \wedge (\forall x))$
(2) $((\exists x)(A(x) \wedge (\neg B(x))))$
(3) $((\forall x)((\exists y)(C(f(x), y) \vee \neg)))$
(4) $((\forall x)((\exists z)(D(x, y) \to E(z, y))))$
(5) $(A(g(x)) \vee (\neg((\exists z)C(x, y))))$

Esercizio 4. In ciascuna delle formule ben formate presenti nell'esercizio 3 si eliminino le parentesi non necessarie in virtù delle regole di priorità introdotte.

Esercizio 5. Per ciascuna delle seguenti eliminazioni di parentesi, si dica se sia corretta:

(1) $A(x) \wedge (B(x, z) \vee C(g(y)))$
$A(x) \wedge B(x, z) \vee C(g(y))$
(2) $\forall x(A(x) \to B(x, y))$
$\forall x A(x) \to B(x, y)$
(3) $(\forall x A(x)) \to (B(x, y) \wedge C(y))$
$\forall x A(x) \to B(x, y) \wedge C(y)$

Esercizio 6. Per ciascuna delle formule elencate nell'esercizio 5, se ne elenchino le variabili libere.

Esercizio 7. Si calcoli la sostituzione $P[t/x]$ in ciascuno dei seguenti casi:

(1) $P = A(x),\ t = f(y)$
(2) $P = B(x, y, z) \wedge C(x),\ t = a$
(3) $P = \neg B(x, y, z),\ t = z$
(4) $P = \exists x D(x, y),\ t = g(x)$
(5) $P = \forall y A(x, y),\ t = h(y)$

Logica dei predicati - semantica (25/05/2011)

Esercizio 8. Si considerino le seguenti formule ben formate:

(1) $\forall x(F(x) \to P(x))$
(2) $F(c) \wedge P(c)$
(3) $L(c, m(c))$

Si trovino un dominio D e una struttura $\mathcal{S}$ in modo che le suddette formule significhino rispettivamente:

(1) Ogni francese parla francese.
(2) Carla Bruni è francese e parla francese.
(3) Carla Bruni parla la stessa lingua di sua madre.

Si traducano poi in formule ben formate le seguenti affermazioni:

(4) La madre di Carla Bruni non è francese, ma parla francese.
(5) Ogni persona che parla francese parla la stessa lingua di Carla Bruni.

Esercizio 9. Si consideri una struttura $\mathcal{S}$ che ha come dominio $D = [-3, 5]$ e assegna al predicato binario A la funzione

$$A^{\mathcal{S}}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Siano infine ζ, η ambienti con $\zeta(z) = 4, \eta(z) = -3$.

(1) per la formula ben formata $P = \forall x A(x, z)$, si verifichi che $v^{\zeta}(P) = 0$;
(2) si calcoli il valore di verità $v^{\eta}(Q)$ della formula $Q = \forall x A(z, x)$;
(3) posto $R = \forall y \exists x A(x, y)$, si provi che $v^{\xi}(R) = 1$ per ogni ambiente ξ.

Esercizio 10. Nel dominio $\mathbb{N}$ si consideri una struttura $\mathcal{S}$ con assegnamento

- $c^{\mathcal{S}} = 2$
- per ogni $a \in \mathbb{N}$, $B^{\mathcal{S}}(a) = \begin{cases} 1 & \text{per } a \text{ primo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- per ogni $a \in \mathbb{N}$, $D^{\mathcal{S}}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{se } a | b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $f^{\mathcal{S}}(a) = a + 1$.

Per ciascuna delle seguenti formule ben formate P, si trovi un ambiente ξ tale che $v^{\xi}(P) = 1$ (in tal caso si dice che l'interpretazione $(\mathcal{S}, \xi)$ *soddisfa* P, in simboli $(\mathcal{S}, \xi) \models P$).

(1) $B(c)$
(2) $B(x)$
(3) $D(c, x)$
(4) $B(x) \wedge D(c, x)$
(5) $D(f(c), x) \wedge D(f(f(c)), x)$
(6) $B(x) \to D(c, f(x))$
(7) $B(x) \vee B(f(x))$

Esercizio 11. Con riferimento all'esercizio 10: per ogni formula elencata, si dica motivando la risposta se esista un ambiente ζ tale che $(\mathcal{S}, \zeta)$ non la soddisfi.