

## ALGEBRA E LOGICA

### ESEMPIO DI II PROVA INTERMEDIA

**Esercizio 1.** Di ciascuna delle seguenti formule proposizionali, si verifichi se sia ben formata; se lo è, si dica motivando la risposta se sia soddisfacibile, e in caso affermativo se sia o meno una tautologia:

- (1)  $A \vee B \neg$
- (2)  $\neg A \rightarrow \neg(A \vee B)$
- (3)  $\neg(A \wedge \perp)$
- (4)  $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$

**Esercizio 2.** Si dica, motivando la risposta, se valgano i seguenti fatti:

- (1)  $\neg(\neg A \wedge B) \models B$
- (2)  $E \models (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D) \rightarrow E$
- (3)  $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \equiv \neg A$
- (4)  $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow C$

**Esercizio 3.** Si dica se valgano i seguenti fatti; in caso affermativo, se ne trovi una dimostrazione in Deduzione Naturale; in caso negativo, si motivi la risposta con le proprietà e i teoremi studiati.

- (1)  $\neg(A \rightarrow B) \vdash_{DN} A$
- (2)  $A \vdash_{DN} (A \vee B) \wedge A$
- (3)  $\vdash_{DN} A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
- (4)  $\neg A \vee A \vdash_{DN} \perp$

**Esercizio 4.** Si dica se valgano i seguenti fatti; in caso affermativo, se ne trovi una dimostrazione nel sistema assiomatico H; in caso negativo, si motivi la risposta con le proprietà e i teoremi studiati.

- (1)  $(A \rightarrow \perp) \vdash_H \neg A$
- (2)  $A \vdash_H \neg A$
- (3)  $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \vdash_H B \wedge D$
- (4)  $(A \wedge B) \wedge C \vdash_H A \wedge (B \wedge C)$

**Esercizio 5.** Si traducano in formule ben formate (predicative) le seguenti frasi del linguaggio naturale:

- (1) Lassie è un cane.
- (2) La madre di Lassie è un cane.
- (3) Non tutti i cani sono mammiferi.
- (4) Esistono mammiferi la cui madre non è un mammifero.
- (5) Se Lassie è un mammifero allora Lassie è un cane.

Si descriva la struttura  $\mathcal{S}$  che associa alle FBF ottenute le frasi sopra elencate. Di ciascuna delle FBF ottenute, si dica se sia vera in  $\mathcal{S}$  o falsa in  $\mathcal{S}$ .

**Esercizio 6.** Si consideri la struttura  $\mathcal{S}$  che ha dominio  $D = \{2^n | n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$  e come assegnamento  $a^{\mathcal{S}} = 1, b^{\mathcal{S}} = 2, c^{\mathcal{S}} = 4, f^{\mathcal{S}}(r) = 2r$ ,

$$A^{\mathcal{S}}(r, s, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } r + s = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si calcolino i valori di verità delle seguenti formule ben formate in un ambiente  $\xi$  con  $\xi(z) = 10$  e  $\xi(w) = 5$ :

- (1)  $A(f(a), b, c)$
- (2)  $\exists x A(x, a, b)$
- (3)  $A(b, f(c), z)$
- (4)  $\exists x \exists y A(x, y, w)$
- (5)  $\forall x \exists y A(x, y, f(x))$