ESERCIZI PER IL CORSO *ALGEBRA E LOGICA*

Si consiglia di risolvere i seguenti esercizi prima della lezione del prossimo 12 aprile. Si tenga presente che gli esercizi elencati non esauriscono le tematiche trattate durante le lezioni, e dovranno quindi essere integrati con quelli del libro di testo.

Ideali, omomorfismi di anelli (05/04/2011)

Esercizio 1. Si dica, motivando opportunamente la risposta, se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ siano ideali di $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$:
(1) $2\mathbb{Z}$;
(2) $\mathbb{N}$;
(3) $\mathbb{Z}$;
(4) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ non divisibile per } 2\}$.

Esercizio 2. Sia I un ideale di $\mathbb{Z}$. Si provi che se $1 \in I$ allora $I = \mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti funzioni, si dica (motivando la risposta) se sia un omomorfismo di anelli. In caso affermativo, se ne calcoli il nucleo e si dica se sia un isomorfismo di anelli.
(1) $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ definita dal porre $F(m) = [m]$.
(2) $G : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita dal porre $G(q) = q$;
(3) $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dal porre $H(x) = |x|$.

Campi (05-06/04/2011)

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sia un campo.

Esercizio 5. Si provi che l'anello $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (con le operazioni $+, \cdot$ definite ponendo $[k] + [m] = [k + m], [k] \cdot [m] = [k \cdot m]$) è un campo.

Esercizio 6. Si dica, motivando la risposta, se l'anello $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (con le operazioni $+, \cdot$ introdotte) sia un campo.

Algebre di Boole (06/04/2011)

Esercizio 7. Si consideri $B = \{vero, falso\}$. Sia $\vee : B \times B \to B$ l'operazione definita dal porre

$$\begin{array}{ccccc} vero & \vee & vero & = & vero \\ vero & \vee & falso & = & vero \\ falso & \vee & vero & = & vero \\ falso & \vee & falso & = & falso \end{array}$$

Sia poi $\wedge$ l'operazione su B definita ponendo

$$\begin{array}{ccccc} vero & \wedge & vero & = & vero \\ vero & \wedge & falso & = & falso \\ falso & \wedge & vero & = & falso \\ falso & \wedge & falso & = & falso \end{array}$$

Sia infine $' : B \to B$ definita ponendo $vero' = falso$ e $falso' = vero$. Si provi che $(B, \vee, \wedge, ')$ è un'algebra di Boole.

Esercizio 8. La relazione $|$ su $\mathbb{N}$ è definita dal porre $m|n$ se e solo se $n = km$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Si consideri il sottoinsieme

$$L = \{1, 2, 3, 6\} \subset \mathbb{N}.$$

Si ricordi che $|$ è un ordinamento parziale su $\mathbb{N}$, e che $\mathbb{N}$ è un reticolo con $x \vee y = mcm(x, y)$ e $x \wedge y = MCD(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$.

(1) Si verifichi che L è un sottoinsieme ordinato di $\mathbb{N}$.
(2) Si verifichi che L, con l'ordinamento indotto $|$, è un reticolo.
(3) Si provi che 1 è il minimo e 6 è il massimo di L rispetto all'ordinamento $|$ (e che quindi L è un reticolo limitato).
(4) Si trovi, per ogni $n \in L$, un n' tale che $n \vee n' = mcm(n, n') = 6$ e $n \wedge n' = MCD(n, n') = 1$ (ovvero si provi che L è un reticolo complementato).
(5) Si provi che L è un reticolo di Boole.
(6) Si dimostri che il fatto che L sia un reticolo di Boole implica che $(L, mcm, MCD, ')$ è un'algebra di Boole.