ESERCIZI PER IL CORSO *ALGEBRA E LOGICA*

Si consiglia di risolvere i seguenti esercizi prima della lezione del prossimo 29 marzo. Il simbolo $*$ indica gli esercizi di carattere più teorico. Si tenga presente che gli esercizi elencati non esauriscono le tematiche trattate durante le lezioni, e dovranno quindi essere integrati con quelli del libro di testo.

Semigruppi, monoidi, gruppi (22/03/2011)

Esercizio 1. Si dica se la divisione sia un'operazione su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2. Posto $A = \{0, 1\}$, si consideri su $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ l'operazione

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{P}(A) \\ (X, Y) & \mapsto & X \cap Y \end{array}$$

(1) Si provi che $\mathcal{P}(A)$ è un semigruppo.
(2) Si dica se $\mathcal{P}(A)$ sia commutativo.
(3) Si dica se $\mathcal{P}(A)$ sia un monoide.
(4) Si dica infine se $\mathcal{P}(A)$ sia un gruppo.

$*$**Esercizio 3.** Si ripeta l'esercizio 2 per $\mathcal{P}(A)$ con A insieme qualunque.

Sottosemigruppi, sottomonoidi, sottogruppi (22-23/03/2011)

Esercizio 4. Si consideri il monoide $(\mathbb{Q}, \cdot)$ e si individui il gruppo $U(\mathbb{Q}) = \{p/q \in \mathbb{Q} \mid p/q \text{ ha inverso}\}$.

Esercizio 5. Nel gruppo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ si individui $< 2 >$ (il sottogruppo generato da $\{2\}$).

$*$**Esercizio 6.** Dati un gruppo G ed un suo sottoinsieme $H \subseteq G$, si dimostri che $H \leq G$ se e solo se $H \neq \emptyset$ e per ogni $a, b \in H$ risulta $ab^{-1} \in H$.

Omomorfismi di gruppi (23/03/2011)

Esercizio 7. Si provi che i gruppi $(\mathbb{Z}, +)$ e $(3\mathbb{Z}, +)$ sono isomorfi, poi si faccia lo stesso per $(\mathbb{Z}, +)$ e $(n\mathbb{Z}, +)$.

$*$**Esercizio 8.** Sia $\varphi : G \to H$ un omomorfismo di gruppi. Si dimostri che per ogni $g \in G$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ risulta $\varphi(g^n) = \varphi(g)^n$.

Esercizio 9. Si consideri $\varphi : GL(2,\mathbb{R}) \to GL(2,\mathbb{R})$ definita dal porre

$$\varphi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Si provi che φ è un automorfismo di $(GL(2,\mathbb{R}),\cdot)$.

$*$**Esercizio 10.** Generalizzando l'esercizio 9, si provi che se $(G,\cdot)$ è un gruppo e si fissa $g \in G$ allora porre $\sigma_g(x) = gxg^{-1}$ definisce un automorfismo $\sigma_g : G \to G$ (detto *automorfismo interno* associato a g).

Classi laterali e sottogruppi normali (23/03/2011)

Esercizio 11. In $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ si consideri il sottogruppo $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ e si dimostri che $\mathbb{R}^+ \trianglelefteq \mathbb{R}^*$.

Svolgendo il seguente esercizio, si tenga presente che se $(G,+)$ è un gruppo e $H \leq G$, in notazione additiva la classe laterale di $g \in G$ è

$$g + H = \{g + h \mid h \in H\}.$$

Esercizio 12. In $(\mathbb{Z},+)$, si consideri il sottogruppo $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.

(1) Si individuino le classi laterali $0 + 3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}$ e $2 + 3\mathbb{Z}$.
(2) Si provi che presi $n, m \in \mathbb{Z}$, se $n \equiv m \pmod 3$ allora $n+3\mathbb{Z} = m+3\mathbb{Z}$.
(3) Preso $n \in \mathbb{Z}$ e detto r il resto nella divisione di n per 3 (quindi se $n = 3q + r$ con $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < 3$), si dimostri che $n + 3\mathbb{Z} = r + 3\mathbb{Z}$.
(4) Si deduca che non vi sono altre classi laterali oltre a quelle calcolate nel punto (1).