ALGEBRA E LOGICA

ESEMPIO DI I PROVA INTERMEDIA

Esercizio 1. Di ciascuno dei seguenti insiemi, si dica se rispetto all'operazione indicata sia un semigruppo, un monoide o un gruppo; si dica inoltre se sia commutativo. Le risposte devono essere motivate facendo uso delle definizioni studiate.

(1) $\mathbb{Z}$ con $+$;
(2) $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ con l'operazione di unione $\cup$;
(3) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f | f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ funzione}\}$ con l'operazione $+$ definita dal porre $f + g(x) = f(x) + g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2. Si dica, motivando la risposta, se la funzione

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Q}^* &\to \mathbb{Q}^* \\ p/q &\mapsto q/p \end{aligned}$$

sia un omomorfismo di gruppi da $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ a $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$; in caso affermativo, si calcoli $\ker\varphi = \varphi^{-1}(1)$ e si dica, provando la propria affermazione, se φ sia un isomorfismo di gruppi.

Esercizio 3. Si consideri l'anello $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2]\}$ con le operazioni $+, \cdot$ studiate.

(1) Si calcoli $[2] \cdot [2]$.
(2) Si provi che $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è un campo, ovvero che $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^* = \{[1], [2]\}$ con l'operazione $\cdot$ è un gruppo.
(3) Si individui il sottogruppo $N =< [2] >$ generato da $[2]$ in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^*, \cdot)$.
(4) Si mostri che $N \trianglelefteq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^*$.

Esercizio 4. Si consideri l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti reali

$$M(2 \times 2, \mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \middle| a_{11}, \ldots, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si provi che $M(2 \times 2, \mathbb{R})$, con le usuali operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione $\cdot$ 'righe per colonne', è un anello unitario. Si mostri con un esempio che $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ non è commutativo. Si dica infine, motivando la risposta, se $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ sia un corpo.

Esercizio 5. Si ricordi che $\mathbb{N}$ con l'ordinamento parziale $|$ è un reticolo, con $n \vee k = mcm(n, k)$ e $n \wedge k = MCD(n, k)$. Si consideri il sottoinsieme ordinato $S = \{0, 3, 4, 15\}$. Si dica, motivando la risposta, se rispetto all'ordinamento indotto $|$ l'insieme S

(1) sia totalmente ordinato;
(2) ammetta minimo o massimo;
(3) abbia un estremo inferiore o superiore in $\mathbb{N}$;
(4) sia un reticolo;
(5) sia un reticolo di Boole.