ESERCIZI PER IL CORSO *ALGEBRA E LOGICA*

Si consiglia di risolvere i seguenti esercizi prima della lezione del prossimo 5 aprile. Il simbolo $*$ indica gli esercizi di carattere più teorico. Si tenga presente che gli esercizi elencati non esauriscono le tematiche trattate durante le lezioni, e dovranno quindi essere integrati con quelli del libro di testo.

Svolgendo gli esercizi, si ricordino le differenze tra notazione moltiplicativa e notazione additiva: dato un omomorfismo di gruppi $\varphi : G \to H$, se l'operazione di H si denota con $\cdot$ allora l'elemento neutro si denota 1_H e $\ker\varphi = \varphi^{-1}(1_H)$; se invece l'operazione di H si denota con $+$ allora l'elemento neutro si denota 0_H e $\ker\varphi = \varphi^{-1}(0_H)$. D'altra parte, preso $N \trianglelefteq G$, se l'operazione di G si denota con $\cdot$ allora $G/N = \{gN \mid g \in G\}$; se invece l'operazione di G si denota con $+$ allora $G/N = \{g + N \mid g \in G\}$.

Gruppo quoziente, nucleo di un omomorfismo (29/03/2011)

Esercizio 1. Nel gruppo $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ si consideri $N =< -1 >$.

(1) Si provi che $N = \{1, -1\}$.
(2) Si mostri che $N \trianglelefteq \mathbb{Q}^*$.
(3) Nel gruppo quoziente $\mathbb{Q}^*/N$, si calcoli il prodotto $\frac{3}{10}N \cdot 5N$ e si trovi l'inverso di $\frac{9}{8}N$.

Esercizio 2. In $(GL(2,\mathbb{R}), \cdot)$, si consideri il sottogruppo

$$D = \{A \in GL(2,\mathbb{R}) \mid A \text{ diagonale}\} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array} \right) \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Si consideri poi la funzione $\psi : D \to \mathbb{R}^*$, definita ponendo $\psi(A) = \det(A)$. Si mostri che ψ è un omomorfismo da $(D, \cdot)$ in $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ e se ne calcoli il nucleo $\ker\psi$.

$*$**Esercizio 3.** Dati due gruppi $(G, +), (H, +)$ e dato un omomorfismo di gruppi $\varphi : G \to H$, si provi che φ è iniettivo se e solo se $\ker\varphi = \{0_G\}$.

Esercizio 4. Si definisca $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ponendo $\chi(n) = -n$.

(1) Si provi che χ è un endomorfismo di $(\mathbb{Z}, +)$.
(2) Si calcoli $\ker\chi$.
(3) Si dica se χ sia un automorfismo. [*Suggerimento: si utilizzi quanto enunciato nell'esercizio 3*].

Teorema fondamentale di omomorfismo per gruppi (30/03/2011)

Esercizio 5. Si consideri la funzione *valore assoluto* $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^+$ definita dal porre $\varphi(x) = |x|$.

(1) Si provi che φ è un omomorfismo di gruppi da $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ in $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.
(2) Si calcoli $\ker \varphi$.
(3) Si dimostri che $\mathbb{R}^*/\ker\varphi \cong \mathbb{R}^+$.

Esercizio 6. Si consideri la funzione $\omega : \mathbb{Z} \to \{1, -1\}$ definita ponendo

$$\omega(z) = \begin{cases} 1 & \text{per } z \text{ pari} \\ -1 & \text{per } z \text{ dispari} \end{cases}$$

Si ricordi che $\{1, -1\}$ è un gruppo con l'operazione moltiplicativa $\cdot$ indotta da $\mathbb{Q}^*$.

(1) Si mostri che ω è un omomorfismo di gruppi da $(\mathbb{Z}, +)$ in $(\{1, -1\}, \cdot)$.
(2) Si provi che $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{1, -1\}$.

Anelli (30/03/2011)

Esercizio 7. Si consideri l'insieme delle funzioni da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f \mid f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ funzione}\}.$$

Prese $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$, si definiscano $f + g$ e $f \cdot g$ ponendo per ogni $x \in \mathbb{Z}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(ad esempio, se $f = id_{\mathbb{Z}}$ e $g(x) = 3x$ allora $(f + g)(x) = x + 3x = 4x$ e $(f \cdot g)(x) = x \cdot 3x = 3x^2$).

(1) Si mostri che $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ è un anello commutativo con $+, \cdot$ [*Suggerimento: si utilizzino le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione di* $\mathbb{Z}$].
(2) Si provi che $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ è un anello unitario individuando $1_{\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}}$, ovvero trovando una funzione $e : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che per ogni funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ risulti $e \cdot f = f = f \cdot e$.

Esercizio 8. Posto $A = \{0, 1\}$, si considerino su $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ l'operazione $\cap$ che abbiamo già incontrato e l'operazione

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{P}(A) \\ (X, Y) & \mapsto & X \cup Y \end{array}$$

Si dica se $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$ sia un anello.

Esercizio 9. Su $\mathbb{R}^3$ si considerino la somma e il prodotto vettore. In altre parole, presi $v, w \in \mathbb{R}^3$, se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$, se $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ e se $w = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3$ si ponga

$$v + w = (v_1 + w_1)e_1 + (v_2 + w_2)e_2 + (v_3 + w_3)e_3,$$

$$v \wedge w = \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} e_1 - \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} e_2 + \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} e_3.$$

Si dica se $(\mathbb{R}^3, +, \wedge)$ sia un anello. [*Si può fare riferimento alle proprietà della somma di vettori e del prodotto vettore già studiate nel corso di Algebra Lineare*].