ESERCIZI PER IL CORSO *ALGEBRA E LOGICA*

Si consiglia di risolvere i seguenti esercizi prima della lezione del prossimo 22 marzo.
Si tenga presente che gli esercizi elencati non esauriscono le tematiche trattate durante le lezioni, e dovranno quindi essere integrati con quelli del libro di testo.

Richiami su: composizione di funzioni, aritmetica sugli interi, relazioni d'equivalenza (15/03/2011)

Esercizio 1. Dati insiemi A, B, C, D e funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, si provi che

(1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
(2) se f e g sono entrambe suriettive allora $g \circ f$ è suriettiva;
(3) se $g \circ f$ è suriettiva allora g è suriettiva.

Esercizio 2. Siano A e B insiemi e si consideri la funzione $s : A \times B \to B \times A$ definita ponendo $s(a, b) = (b, a)$. Si dimostri che s è invertibile e se ne trovi l'inversa.

Esercizio 3. Siano $a, b, p \in \mathbb{Z}$ e si supponga che p sia un numero primo. Si provi che se $p|ab$ allora $p|a$ oppure $p|b$.

Esercizio 4. Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si calcolino $MCD(101, 199)$ e $MCD(1.111.111, 1.111)$.

Esercizio 5. Si dimostri che la congruenza modulo n è una relazione d'equivalenza.

Esercizio 6. Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su un insieme A. Si provi che se $a \sim b$ allora $[a] = [b]$.

Ordinamenti e reticoli (16/03/2011)

Esercizio 7. Si consideri su $\mathbb{N}$ la relazione $|$ definita dal porre $m|n$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $n = mk$.

(1) Si provi che $|$ è un ordinamento parziale su $\mathbb{N}$;
(2) si dica se $\mathbb{N}$ è totalmente ordinato rispetto a $|$.

Esercizio 8. Dati due insiemi X, Y con $X \subseteq Y$, sia $f : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definita da $f(Z) = Z \cap X$. Si consideri su $\mathcal{P}(Y)$ l'ordinamento parziale $\subseteq$ e si faccia lo stesso su $\mathcal{P}(X)$. Si provi che:

(1) f è un omomorfismo di insiemi ordinati;
(2) f è un isomorfismo di insiemi ordinati se e solo se $X = Y$.

Esercizio 9. Di ciascuno dei seguenti sottoinsiemi B_i di $\mathbb{R}$, si dica se abbia minimo, massimo, elementi minimali o elementi massimali; se ne individuino inoltre l'estremo inferiore e l'estremo superiore.

$$B_1 = [1,5],\ B_2 = \{2, 47, 25\},\ B_3 = [4, +\infty),$$
$$B_4 = \mathbb{R},\ B_5 = (-\infty, 0),\ B_6 = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Esercizio 10. Dato un insieme A, si consideri su $\mathcal{P}(A)$ l'ordinamento $\subseteq$ e si dica, motivando la risposta, se $\mathcal{P}(A)$ ammetta massimo o minimo.

Esercizio 11. Si consideri su $\mathbb{N}$ l'ordinamento parziale $|$. Si dimostri che $\mathbb{N}$ è un reticolo e che $x \wedge y = MCD(x,y)$, $x \vee y = mcm(x,y)$.

Esercizio 12. Sia L un reticolo rispetto ad un ordinamento parziale $\preceq$. Si provi che:

(1) per ogni scelta di $x, y, z \in L$ risulta $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
(2) se $x \preceq a$ e $y \preceq b$ allora $x \wedge y \preceq a \wedge b$ e $x \vee y \preceq a \vee b$.