

ESERCIZI PER IL CORSO *ALGEBRA E LOGICA*

Si consiglia di risolvere alcuni dei seguenti esercizi prima della lezione del prossimo 17 maggio, i rimanenti entro il prossimo 24 maggio.

*Il simbolo * indica gli esercizi di carattere più teorico.*

Si tenga presente che gli esercizi elencati non esauriscono le tematiche trattate durante le lezioni, e dovranno quindi essere integrati con quelli del libro di testo.

SISTEMI DEDUTTIVI (10/05/2011)

Esercizio 1. Si consideri il sistema deduttivo che ha come regole d'inferenza $(\wedge e1)$, $(\wedge e2)$, $(\neg e)$, $(\perp e)$ e come unico assioma $A \wedge \neg A$.

(1) Si provi che \perp è un teorema in questo sistema deduttivo, cioè che $\vdash \perp$.

(2) Si provi che il sistema deduttivo in questione è inconsistente.

***Esercizio 2.** Generalizzando il punto (2) dell'esercizio precedente, si provi che se un sistema deduttivo ha $(\perp e)$ tra le sue regole d'inferenza e \perp tra i suoi teoremi, allora è inconsistente.

DEDUZIONE NATURALE E SISTEMI ASSIOMATICI (11/05/2011)

Esercizio 3. Si provi che la FBF che abbiamo indicato con (I) è un teorema in deduzione naturale. In altre parole, si provi che

$$\vdash_{DN} A \rightarrow A$$

Esercizio 4. Si provi che

(1) $A \wedge B \vdash_{DN} A \vee B$

(2) $(A \wedge B) \wedge C \vdash_{DN} A \wedge (B \wedge C)$

(3) $\neg\neg A \vdash_{DN} A$

Esercizio 5. Si considerino le seguenti affermazioni:

“Se l'algoritmo termina abbiamo un risultato e lo stampiamo”.

“Non è possibile che l'algoritmo non termini”.

Prendendole come ipotesi, si dimostri in deduzione naturale che “Sicuramente stamperemo un risultato”.

Esercizio 6. Si provi che

- (1) $A, A \rightarrow (B \vee \neg C) \vdash_H B \vee \neg C$
- (2) $A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash_H C$

Esercizio 7. Si trovi una dimostrazione di \perp sotto le ipotesi $\neg(A \vee \neg A)$ e $\neg A$ nel sistema assiomatico introdotto a lezione. Si provi cioè che

$$\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash_H \perp$$

[*Suggerimento: si faccia riferimento all'esempio visto a lezione.*]

Esercizio 8. Si provino in successione i seguenti fatti:

- (1) $\neg(A \vee B), A \vee B \vdash_{DN} \perp$
- (2) $\neg(A \vee B), A \vdash_{DN} \perp$
- (3) $\neg(A \vee B) \vdash_{DN} \neg A$
- (4) $\neg(A \vee B) \vdash_{DN} \neg B$
- (5) $\vdash_{DN} \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$

[*Suggerimento: per ciascun punto dell'esercizio si tengano presente i punti precedenti.*]

Esercizio 9. Si provi che la FBF che abbiamo indicato con (S) è un teorema in deduzione naturale. In altre parole, si provi che

$$\vdash_{DN} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

[*Suggerimento: si inizi osservando che $A, A \rightarrow B \vdash_{DN} B$, che inoltre $A, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash_{DN} B \rightarrow C$; utilizzando anche gli alberi appena costruiti, si mostri che $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash_{DN} C$; si prosegua poi applicando ripetutamente $(\rightarrow i)$.*]