CAPITOLO 6

LE SIMILITUDINI

6.1 Richiami di teoria

Definizione. Si chiama **similitudine** una corrispondenza biunivoca dal piano in sé tale che, presi due punti qualunque A, B del piano e detti A', B' i loro corrispondenti, si ha che esiste un numero $k > 0$ tale che:

6.1 $$\overline{A'B'} = k\overline{AB}.$$

Da questa definizione segue, in particolare, che ogni omotetia di rapporto $k > 0$ è una similitudine.

Il numero $k > 0$ che compare nella 6.1 si chiama **rapporto di similitudine**.

Si osservi che le similitudini di rapporto 1 non sono altro che le isometrie.

Si può dimostrare che una **similitudine è la composizione (non importa con quale ordine) di un'isometria e di un'omotetia** di rapporto $k > 0$.
Dunque per ottenere una stessa similitudine si può effettuare prima un'isometria e successivamente un'omotetia, oppure si può effettuare prima un'omotetia e successivamente un'isometria (in generale differenti dalle prime).

Definizione Due figure del piano che si corrispondono in una similitudine sono dette **figure simili**.

Dunque due figure F ed F' sono simili se esiste un'isometria c ed un'omotetia σ tali che:

$$F' = (\sigma \circ c)(F).$$

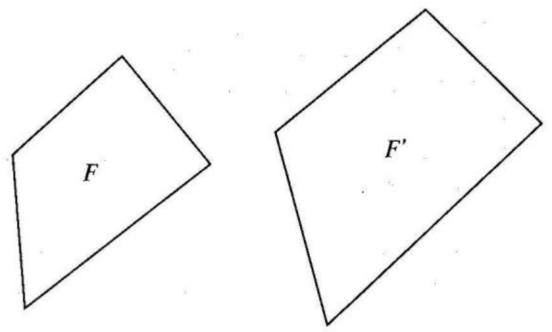

Figura 1

Si noti che una stessa similitudine può essere ottenuta in differenti modi come composizione di un'isometria e di un'omotetia; in altri termini, possono esistere un'isometria c' ed un'omotetia σ' tali che:

$$F' = (\sigma \circ c)(F) = (\sigma' \circ c')(F);$$

tuttavia, anche se $\sigma \circ c = \sigma' \circ c'$, in generale si ha che le isometrie c e c' sono differenti, così come sono differenti le omotetie σ e σ'.

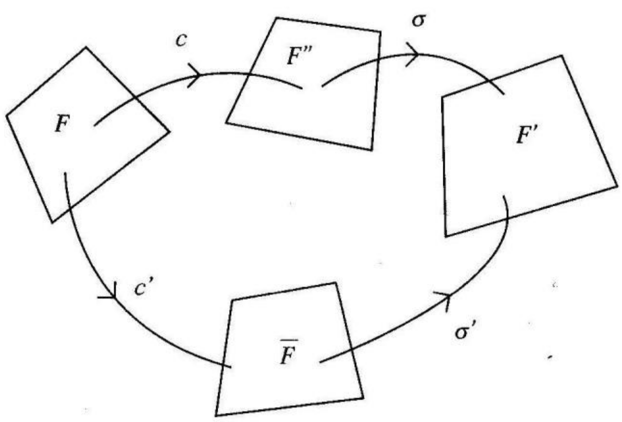

Figura 2

Dalle proprietà delle isometrie e delle omotetie si ottengono inoltre le seguenti proprietà delle similitudini:

1) una similitudine trasforma rette in rette;

2) una similitudine trasforma semirette in semirette;

3) una similitudine conserva l'ampiezza degli angoli;

4) una similitudine trasforma un rettangolo in un rettangolo, un rombo in un rombo, un quadrato in un quadrato;

5) una similitudine trasforma una circonferenza in una circonferenza;

6) una similitudine trasforma rette parallele in rette parallele.

Vale per le similitudini il seguente risultato: l'insieme delle **similitudini del piano formano un gruppo** rispetto all'operazione di composizione.

E' stato provato nel capitolo 5 che, data un'omotetia di rapporto *k*, la sua inversa ha rapporto $\frac{1}{k}$; da questo fatto segue che, data una similitudine di rapporto *k*, il rapporto di similitudine della sua inversa è $\frac{1}{k}$.

Sia ora riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali *xOy*. Data una similitudine, allora si dimostra che, preso un punto del piano $P = (x, y)$, le coordinate del punto corrispondente $P' = (x', y')$ sono date dalle seguenti equazioni:

6.2 $$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + d, \end{cases}$$ con *a* e *b* non entrambi nulli, oppure

6.3 $$\begin{cases} x' = -ax + by + c \\ y' = bx + ay + d, \end{cases}$$ con a, b non entrambi nulli.

Le cui matrici associate sono rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} a & -b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -a & b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni precedenti si chiamano le **equazioni delle similitudini.**

Notiamo che se a, b fossero entrambi nulli, allora le equazioni 6.2 e 6.3 rappresenterebbero la funzione costante, che associa ad ogni punto del piano il punto (c, d).

Le similitudini di equazioni 6.2 si chiamano **dirette**, le similitudini di equazioni 6.3 si chiamano **indirette**.

In entrambi i casi il rapporto di similitudine è:

6.4 $$k = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Per dimostrare che la composizione di un'omotetia e una isometria è una similitudine, possiamo considerare le matrici associate ad un'omotetia e ad una isometria ed eseguire il prodotto fra matrici:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & c \\ 0 & k & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & m \\ \beta & \alpha & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha k & -\beta k & mk + c \\ \beta k & \alpha k & kn + d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ponendo $a = \alpha k$, $b = \beta k$, si ottiene la matrice di una similitudine diretta.

Per le similitudini inverse, il procedimento è analogo.

Notiamo che se *a*, *b* fossero entrambi nulli, allora le equazioni 6.2 e 6.3 rappresenterebbero la funzione costante, che associa ad ogni punto del piano il punto (*c*, *d*).

Ricavando la *x* e la *y* dalle equazioni 6.2 e 6.3, si ottengono rispettivamente le **equazioni delle inverse delle similitudini** dirette ed indirette:

6.5

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{a^2+b^2}x' + \dfrac{b}{a^2+b^2}y' - \dfrac{ac+bd}{a^2+b^2} \\ y = \dfrac{-b}{a^2+b^2}x' + \dfrac{a}{a^2+b^2}y' + \dfrac{bc-ad}{a^2+b^2}, \end{cases}$$

6.6

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{a^2+b^2}x' - \dfrac{b}{a^2+b^2}y' - \dfrac{ac-bd}{a^2+b^2} \\ y = \dfrac{-b}{a^2+b^2}x' - \dfrac{a}{a^2+b^2}y' + \dfrac{bc+ad}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Si noti che da queste equazioni segue subito che l'inversa di una similitudine è una similitudine dello stesso tipo (diretta od indiretta).

Inoltre con semplici calcoli si vede che il rapporto di similitudine della similitudine inversa è $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Allo stesso risultato si arriva considerando le inverse delle matrici associate

$$\begin{pmatrix} a & -b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -a & b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando le equazioni della similitudine si può dimostrare che una **similitudine diretta, che non sia una traslazione, ha sempre uno ed un solo punto unito** e che una **similitudine indiretta, che non sia un'isometria, ha sempre uno ed un solo punto unito**.

6.2 Esercizi svolti

1. Sia data la similitudine di equazioni $\begin{cases} x' = 3x - y + 1 \\ y' = -x - 3y + 2. \end{cases}$

Trovare il corrispondente del triangolo di vertici *A* = (1, 2), *B* = (0, 2), *C* = (3, 3), **dire se la similitudine è diretta oppure indiretta e trovare il rapporto di similitudine.**

Si ha:

$$\begin{aligned} A &= (1,2) \longrightarrow A' = (2,-5), \\ B &= (0,2) \longrightarrow B' = (-1,-4), \\ C &= (3,3) \longrightarrow C' = (7,-10). \end{aligned}$$

Le equazioni della similitudine sono della forma 6.3 con *a* = -3 e *b* = -1; perciò la similitudine è indiretta ed il suo rapporto è $\sqrt{(-3)^2 + 1} = \sqrt{10}.$

2. Sia data la similitudine di equazioni $\begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = -x + 2y + 2. \end{cases}$

Sia *P'* = (2, 1) **il corrispondente del punto** *P*.

Trovare le coordinate del punto *P*, **dire se la similitudine è diretta od indiretta e trovare il rapporto di similitudine.**

Le coordinate del punto *P* = (*x*, *y*) sono date dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2 = 2x + y - 1 \\ 1 = -x + 2y + 2, \end{cases} \quad \text{da cui si ha:} \quad \begin{cases} x = \dfrac{7}{5} \\ y = \dfrac{1}{5}; \end{cases}$$

perciò $P = \left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{1}{5}\right).$

Le equazioni della similitudine sono della forma 6.2 con $a = 2$ e $b = -1$; perciò la similitudine è diretta ed il suo rapporto è $\sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$.

3. Dimostrare che la composizione di due similitudini è una similitudine il cui rapporto è dato dal prodotto dei rapporti delle due similitudini.

Siano *s* e s_1 due similitudini di rapporto *k* e k_1 rispettivamente.

Supponiamo che le similitudini siano entrambe indirette (gli altri casi si trattano in maniera analoga); consideriamo le rispettive matrici associate:

$$\begin{pmatrix} -a & b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i cui rapporti di similitudine sono rispettivamente: $k = \sqrt{a^2+b^2}$ e $k_1 = \sqrt{a_1{}^2 + b_1{}^2}$

La matrice associata alla composizione è data dal prodotto delle due matrici

$$\begin{pmatrix} -a & b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 + bb_1 & -ab_1 + a_1 b & -ac_1 + bd_1 + c \\ -a_1 b + ab_1 & aa_1 + bb_1 & bc_1 + ad_1 + d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il rapporto di similitudine della matrice prodotto è dato da

$$\sqrt{(aa_1+bb_1)^2 + (ab_1 - a_1 b)^2} = \sqrt{a^2 a_1{}^2 + b^2 b_1{}^2 + a^2 b_1{}^2 + a_1{}^2 b^2} =$$

$= \sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{a_1{}^2 + b_1{}^2}$, cioè il prodotto dei rapporti di similitudine delle due similitudini.

4. Dimostrare che ogni similitudine si può esprimere come la composizione di un'omotetia di rapporto diverso da 0 e di un'isometria.

Sia data una similitudine *s* di rapporto *k*; sia σ un'omotetia di rapporto *k*.

E' stato così dimostrato che la similitudine *s* è la composizione di un'omotetia σ e di un'isometria *c*.

5. Data la similitudine di equazioni $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y - 2, \end{cases}$ **trovare la retta** *r′* **corrispondente della retta** *r* **di equazione** *y* = 3*x* + 1.

Per ottenere le equazioni della retta *r′*, occorre ricavare dalle equazioni della similitudine la *x* e la *y* in funzione di *x′* e *y′*; si ha:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'+y'+1}{2} \\ y = \dfrac{x'-y'-3}{2}; \end{cases}$$

sostituendo tali valori nell'equazione della retta *r*, otteniamo l'equazione della retta corrispondente *r′*:

$$\frac{x'-y'-3}{2} = 3\left(\frac{x'+y'+1}{2}\right)+1,$$ da cui si ha: $x' + 2y' + 4 = 0$.

6. Dimostrare che la composizione di due similitudini dirette è una similitudine diretta.

Siano date due similitudini dirette *s* ed s_1 rispettivamente di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + d, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = a_1x - b_1y + c_1 \\ y' = b_1x + a_1y + d_1. \end{cases}$$

Per ogni punto *P* = (*x*, *y*) del piano si ha.

$$P = (x,y) \xrightarrow{s_1} P' = (a_1x - b_1y + c_1, b_1x + a_1y + d_1) \xrightarrow{s}$$

$$\left(a_1(ax-by+c)-b_1(bx+ay+d)+c_1, b_1(ax-by+c)+a_1(bx+ay+d)+d_1\right)=$$
$$\left(x(a_1a-b_1b)-y(a_1b+b_1a)+a_1c-b_1d+c_1, x(a_1b+b_1a)+y(a_1a-b_1b)+b_1c+a_1d+d_1\right).$$

Perciò le equazioni della similitudine $s \circ s_1$ sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = x(a_1a-b_1b)-y(a_1b+b_1a)+a_1c-b_1d+c_1 \\ y' = x(a_1b+b_1a)+y(a_1a-b_1b)+b_1c+a_1d+d_1; \end{cases}$$

dai coefficienti delle variabili x e y di queste equazioni, si deduce immediatamente che si tratta di una similitudine diretta.

Usando le matrici associate, si ha:

$$\begin{pmatrix} a & -b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & c_1 \\ b_1 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1-bb_1 & -ab_1-a_1b & ac_1-bd_1+c \\ a_1b+ab_1 & aa_1-bb_1 & bc_1+ad_1+d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il loro prodotto è la matrice associata alla composizione delle due similitudini e si vede immediatamente che è la matrice associata ad una similitudune diretta.

7. Determinare le equazioni della similitudine s **ottenuta componendo l'omotetia** σ **di centro l'origine** O **degli assi coordinati e rapporto** 3 **e la simmetria centrale di centro** O. **Verificare che si ha:** $\sigma \circ c = c \circ \sigma$.

Le equazioni dell'omotetia σ e della simmetria c sono rispettivamente:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$$

Si ha:

$$P=(x,y) \xrightarrow{\sigma} P'=(3x,3y) \xrightarrow{c} P''=(-3x,-3y),$$

$$P=(x,y)\xrightarrow{c}P_1'=(-x,-y)\xrightarrow{\sigma}P_1''=(3(-x),3(-y))=(-3x,-3y)=P''.$$

Perciò si ha $s=\sigma\circ c=c\circ\sigma$; inoltre le equazioni di s sono le seguenti:

$$\begin{cases}x'=-3x\\ y'=-3y.\end{cases}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare usando le matrici associate:

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

8. Date un'omotetia σ di centro $C=(c,d)$ e una simmetria assiale c avente per asse l'asse delle ascisse, determinare le equazioni della similitudine $s=\sigma\circ c$.

Le equazioni dell'omotetia e della simmetria assiale sono rispettivamente:

$$\begin{cases}x'=kx+c-kc\\ y'=ky+d-kd\end{cases}\qquad \text{e} \qquad \begin{cases}x'=x\\ y'=-y.\end{cases}$$

Si ottiene perciò:

$$P=(x,y)\xrightarrow{c}P'=(x,-y)\xrightarrow{\sigma}P''=(kx+c-kc,k(-y)+d-kd)=(kx+c-kc,-ky+d-kd).$$

Perciò le equazioni della similitudine sono:

$$\begin{cases}x'=kx+c-kc\\ y'=-ky+d-kd.\end{cases}$$

Possiamo notare che si tratta di una similitudine inversa di rapporto $|k|$.

Usando le matrici associate, si arriva allo stesso risultato:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & c-kc \\ 0 & k & d-kd \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & c-kc \\ 0 & -k & d-kd \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.3 Esercizi proposti

1. *Data la similitudine di equazioni* $\begin{cases} x' = 3x - 4y + 3 \\ y' = -4x - 3y + 1, \end{cases}$ *trovare il corrispondente A' del punto A* = (2, -1). *Dire se si tratta di una similitudine diretta od indiretta e trovare il rapporto k di similitudine.*

R. *A'* = (13, -4); indiretta; *k* = 5.

2. *Determinare le equazioni della similitudine ottenuta componendo l'omotetia di centro C* = (1, 2) *e rapporto* -3 *con la traslazione di vettore* **v** = -***i*** - 3***j***.
É una similitudine diretta o indiretta? La composizione dell'omotetia e della traslazione è in questo caso commutativa?

R. $\begin{cases} x' = -3x - 3 \\ y' = -3y - 7. \end{cases}$ E' diretta. No

3. *Sia data la similitudine s di equazioni* $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 2. \end{cases}$ *Sia data la retta r di equazione y* = 2*x* + 3

Determinare le equazioni delle rette r' = *s*(*r*) *e r''* =*s*(*r'*).

Che relazione sussiste tra r e r'' ?

R. r': $y = -3x - 5$, $y = -\frac{1}{2}x - 4$; r e r'' sono perpendicolari.

4. *Dimostrare che la composizione di una similitudine diretta e di una similitudine indiretta è una similitudine indiretta.*

5. *Dimostrare che la composizione di due similitudini indirette è una similitudine diretta.*

6. *Dimostrare che la composizione di due similitudini indirette è la composizione di un'omotetia e di una traslazione.*

7. *Determinare le rette unite nella similitudine di equazioni* $\begin{cases} x' = 2x + y - 2 \\ y' = x - 2y + 1. \end{cases}$

R. $y = \left(-\sqrt{5} - 2\right)x + \frac{5\sqrt{5} + 13}{4}, y = \left(\sqrt{5} - 2\right)x + \frac{13 - 5\sqrt{5}}{4}.$

8. *Dimostrare analiticamente che la composizione di due similitudini è ancora una similitudine.*

9. *Data una similitudine di rapporto k, verificare che il rapporto delle aree di due triangoli corrispondenti in questa similitudine è* k^2.

10. *Dimostrare che i triangoli ABC e A'B'C' di vertici A* = (-1, 2), *B* = (0, 2), *C* = (1, 0) *e A'* = (-7, 11), *B'* = (-8, 7), *C'* = (-1, 2) *si corrispondono in una similitudine, sia determinando le equazioni della similitudine, sia usando il secondo criterio di similitudine.*

R. Equazioni della similitudine: $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = -4x + y + 5. \end{cases}$

11. *Determinare tra tutte le similitudini dirette quelle che lasciano fissa la retta* $y = x$.

R. Sono tutte e sole le omotetie di centro l'origine oppure le traslazioni di vettore $\boldsymbol{v} = h\boldsymbol{i} + h\boldsymbol{j}$, con h numero reale.

12. *Determinare il punto unito e l'inversa della similitudine diretta che porta i punti A* = (0, 2), *B* = (-1, 3) *nei punti A'* = (1, 5), *B'* = (4, 6).

R. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$; $\begin{cases} x = \dfrac{-2x'+y'-3}{5} \\ y = \dfrac{x'+2y'-1}{5} \end{cases}$

13. *Determinare il corrispondente del quadrato di vertici O* = (0, 0), *A* = (2, 0), *B* = (2, 2), *C* = (0, 2) *nella similitudine data dalla composizione dell'omotetia di centro l'origine e rapporto* -2 *con la traslazione di vettore* **v** = -***i*** + ***j***

R. *O'* = (1, -1), *A'* = (-3, -1), *B'* = (-3, -5), *C'* = (1, -5).

14. *Determinare, se esiste, una similitudine indiretta che trasforma la parabola* $x = y^2 - 2$ *in se stessa.*

R. E' la simmetria assiale di asse l'asse delle ascisse.

15. *Determinare le similitudini dirette ed indirette che trasformano il triangolo AOB nel triangolo A'O'B', dove A* = (0, 3), *O* = (0, 0), *B* = (3, 0), *A'* = (-11, -1), *O'* = (-2, -4), *B'* = (1, 5).

R. $\begin{cases} x' = x - 3y - 2 \\ y' = 3x + y - 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x' = -3x + y - 2 \\ y' = x + 3y - 4. \end{cases}$

16. *Data una similitudine diretta di equazioni* $\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + d, \end{cases}$ *determinare i coefficienti di queste equazioni affinché questa risulti:*

a) la composizione di una omotetia con una simmetria di asse x,

b) la composizione di una omotetia con una simmetria di asse y,

c) la composizione di una omotetia con una simmetria di centro l'origine,

d) la composizione di una omotetia con una traslazione,

e) la composizione di una omotetia con una rotazione oraria di centro l'origine e di ampiezza 45°.

R. *a*) nessuna soluzione; *b*) nessuna soluzione; *c*) per ogni $a \neq 0$, $b = c = d = 0$; *d*) $b = 0$, per ogni a, c, d, con $a \neq 0$; per ogni $a \neq 0$, $b = -a$, $c = d = 0$.

17. *Svolgere i punti d) ed e) dell'esercizio precedente nel caso di una similitudine indiretta.*

[R.] *d*) nessuna soluzione; *e*) nessuna soluzione.

18. *La composizione di similitudini gode della proprietà commutativa?*

R. No

19. *Dimostrare che una retta r è una retta unita di una similitudine se e soltanto se r è una retta unita della similitudine inversa.*