Capitolo 5

Le omotetie

5.1 Richiami di teoria

Definizione Siano fissati un punto *C* del piano ed un numero reale *k*.
Si chiama **omotetia di centro** *C* e **rapporto** *k* (che si indica con il simbolo $\sigma_{O,k}$) la corrispondenza dal piano in sé, che ad ogni punto *P* del piano fa corrispondere il punto *P'* in modo tale che:

5.1 $$\vec{CP'} = k\,\vec{CP}.$$

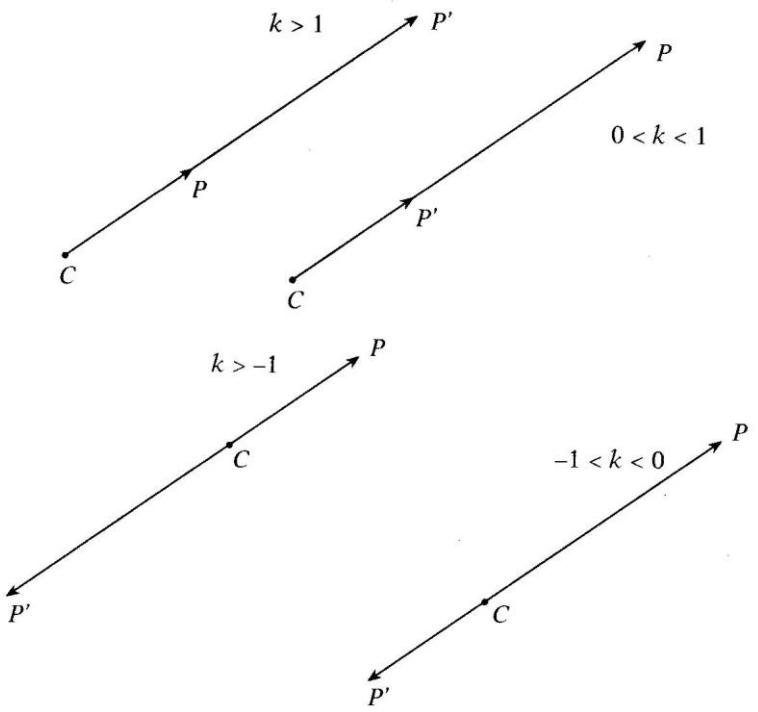

Figura 1

Il centro *C* dell'omotetia è un **punto unito** di questa corrispondenza.
Talvolta un'omotetia si indica anche semplicemente con il simbolo σ.

Si noti che, se $|k| > 1$, allora l'omotetia "ingrandisce" le figure.

Se, invece, $|k| < 1$, allora l'omotetia "rende più piccole" le figure.

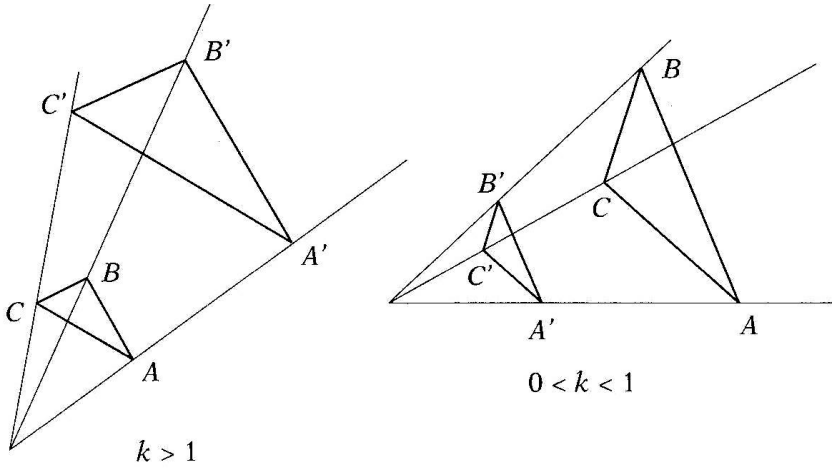

Figura 2

Per k = -1 l'omotetia è una simmetria centrale di centro C (vedere il capitolo 3).

Invece, se k = 1, i punti P e P' coincidono, dunque l'omotetia è la trasformazione identica.

Se k = 0, allora l'omotetia è una trasformazione costante; infatti ad ogni punto P del piano essa fa corrispondere il punto C.

Come nel caso delle isometrie, per studiare le proprietà delle omotetie, può essere conveniente riferire il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali *xOy;* in tal modo, data un'omotetia $\sigma_{C,k}$, possiamo trovare le equazioni che permettono di ottenere le coordinate del punto $\sigma_{C,k}(P) = P' = (x', y')$ tramite le coordinate del punto $P = (x, y)$.

Supponiamo che il centro C dell'omotetia $\sigma_{C,k}$ abbia coordinate: $C = (a, b)$; dato il punto $P = (x, y)$, sia $\sigma_{C,k}(P) = P' = (x', y')$ il suo corrispondente. Dalla formula 1.6 del capitolo 1 si ha:

$$\vec{CP} = (x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \vec{CP'} = (x'-a)\mathbf{i} + (y'-b)\mathbf{j}.$$

Poiché deve essere $\vec{CP'} = k\,\vec{CP}$, dall'uguaglianza precedente si ottiene:

$$(x'-a)\mathbf{i}+(y'-b)\mathbf{j}=k((x-a)\mathbf{i}+(y-b)\mathbf{j});$$

uguagliando le componenti, si ha:

$$\begin{cases} x'-a=k(x-a) \\ y'-b=k(y-b), \end{cases}$$

da cui si ottengono le **equazioni dell'omotetia di centro** $C = (a, b)$ e **rapporto** $k \neq 0$:

5.2 $\begin{cases} x'=kx+a-ka \\ y'=ky+b-kb \end{cases}$ la cui matrice associata è $\begin{pmatrix} k & 0 & a-ka \\ 0 & k & b-kb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si noti che, nel caso in cui $k = 0$, le equazioni 5.2 assumono la forma seguente:

$$\begin{cases} x'=a \\ y'=b; \end{cases}$$

dunque, in tal caso, l'omotetia, come era già stato osservato, associa ad ogni punto del piano il centro $C = (a, b)$.

Se il centro dell'omotetia è l'origine O degli assi cartesiani, allora le equazioni 5.2 diventano:

5.3 $$\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky, \end{cases}$$

che rappresentano le equazioni di un'**omotetia con il centro nell'origine**.

Se $k \neq 0$, si può dimostrare che l'omotetia è una **corrispondenza biunivoca** dal piano in sé.

Poiché un'omotetia con $k \neq 0$ è una corrispondenza biunivoca, allora esiste l'**omotetia inversa** $\sigma^{-1}_{C,k}$; le sue equazioni sono:

5.4
$$\begin{cases} x = \frac{1}{k}x' + a - \frac{a}{k} \\ y = \frac{1}{k}y' + b - \frac{b}{k}. \end{cases}$$

Perciò l'inversa di un'omotetia di centro $C = (a, b)$ e rapporto $k \neq 0$ è un'omotetia che ha lo stesso centro e rapporto $\frac{1}{k}$.

Si può arrivare a questo risultato anche considerando l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} k & 0 & a-ka \\ 0 & k & b-kb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{che è proprio} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 & a-\frac{a}{k} \\ 0 & \frac{1}{k} & b-\frac{b}{k} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definizione Due figure che si corrispondono in una omotetia sono chiamate **figure omotetiche**.

Si ha il seguente risultato: **la corrispondente** r' **di una retta** r **del piano per mezzo di un'omotetia di costante** $k \neq 0$ **è una retta parallela alla retta** r.

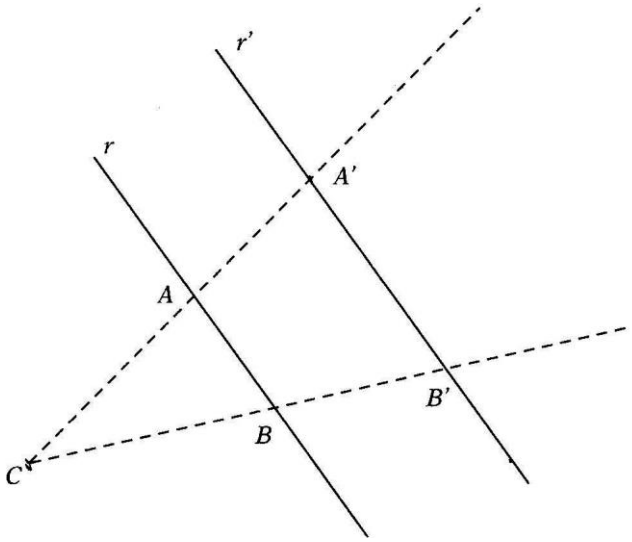

Figura 3

Il prossimo risultato riguarda invece i trasformati dei segmenti per mezzo di un'omotetia: **il trasformato di un segmento** *AB* **per mezzo di un'omotetia di rapporto** $k \neq 0$ **è un segmento** *A'B'* **parallelo al segmento** *AB,* **la cui misura è** $|k|\overline{AB}$.

Dal risultato precedente si ha dunque che **in un'omotetia di rapporto** $k \neq 0$ **è costante il rapporto delle misure di due segmenti non nulli corrispondenti**, cioè:

5.5 $$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |k| .$$

Ne consegue che il rapporto di due poligoni che si corrispondono in un'omotetia di rapporto $k \neq 0$ è $|k|$.

Si dimostra che il rapporto delle aree di due poligoni che si corrispondono in un'omotetia di rapporto $k \neq 0$ è k^2.

Un'omotetia con il rapporto diverso da 0 **trasforma una circonferenza in una circonferenza**.

Si ha inoltre che un'omotetia **trasforma una semiretta** *a* **in una semiretta** *a'*; naturalmente all'origine *A* della semiretta *a* corrisponde l'origine *A'* della semiretta *a'*.

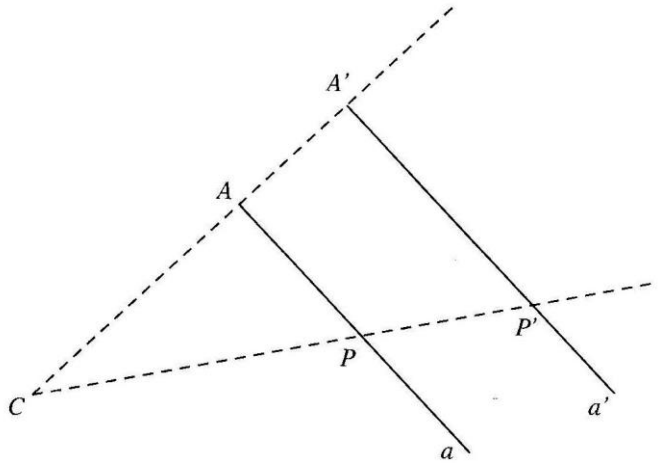

Figura 4

Si ha inoltre che un'omotetia **trasforma angoli congruenti in angoli congruenti**.
Si dice anche che un'omotetia **conserva le ampiezze degli angoli**.

Dal fatto che un'omotetia conserva le ampiezze degli angoli e che il rapporto di due segmenti corrispondenti è costante, segue che essa **trasforma**, ad esempio, **rettangoli in rettangoli, rombi in rombi, quadrati in quadrati, triangoli isosceli in triangoli isosceli, trapezi in trapezi.**

Si è visto che il centro di un'omotetia è un punto unito; è naturale chiedersi se un'omotetia ha altri punti uniti. La risposta è negativa per le omotetie con rapporto diverso da 0, cioè l'**unico punto unito di un'omotetia con rapporto** $k \neq 0$ **è il suo centro**.

Ponendo nelle equazioni 5.2 $a - ka = m$ e $b - kb = n$, si ottiene che le equazioni 5.2 di un'omotetia possono essere scritte nella forma più semplice:

5.6 $\begin{cases} x' = kx + m \\ y' = ky + n \end{cases}$ la cui matrice associata è $\begin{pmatrix} k & 0 & m \\ 0 & k & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Notiamo che per $k = 1$ le equazioni 5.6 rappresentano le equazioni di una traslazione (vedere le equazioni 2.2 del capitolo 2).

Si chiama **dilatazione** una trasformazione dal piano in sé che è un'omotetia oppure una traslazione. Perciò le 5.6 rappresentano le equazioni di una generica dilatazione.

Il centro C di un'omotetia di equazioni 5.6 e diversa da una traslazione è:

5.7 $$C = \left(\frac{m}{1-k}, \frac{n}{1-k} \right).$$

Oltre ai punti uniti, un'omotetia può avere anche delle rette unite; è opportuno ricordare che una retta si dice unita se la sue corrispondente è la retta stessa.

E' naturale chiedersi da quante condizioni è determinata un'omotetia. Si ha che un'omotetia (con il rapporto $k \neq 0$) è determinata se si conoscono il rapporto k ed il corrispondente di un punto, oppure se si conoscono il centro ed il corrispondente di un punto, oppure se si conoscono i corrispondenti di due punti.

Per quanto riguarda la composizione di omotetie, si ha che la composizione di due omotetie di centro qualunque è sempre un'omotetia.

5.2 Esercizi svolti

1. Determinare il corrispondente del punto $A = (2, 3)$ **nella omotetia di centro** $C = (2, -1)$ **e rapporto** 2.

Le equazioni dell'omotetia sono $\begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = 2y + 1. \end{cases}$

Si ha:

$$A=(2,3)\longrightarrow A'=(2,7).$$

2. Determinare il corrispondente del triangolo di vertici A = (1, 2), B = (3, 2), C = (2, 4) **nell'omotetia di centro l'origine e rapporto** $\frac{1}{2}$.

Dalla formula 5.3 si ha che le equazioni dell'omotetia sono:

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x \\ y'=\frac{1}{2}y. \end{cases}$$

Tenendo conto di queste equazioni, si ottiene:

$$A=(1,2)\longrightarrow A'=\left(\frac{1}{2},1\right),$$
$$B=(3,2)\longrightarrow B'=\left(\frac{3}{2},1\right),$$
$$C=(2,4)\longrightarrow C'=(1,2).$$

Quindi il triangolo ABC viene trasformato nel triangolo di vertici: $A'=\left(\frac{1}{2},1\right)$, $B'=\left(\frac{3}{2},1\right)$, $C'=(1,2).$

3. Determinare, se esiste, un'omotetia di centro C = (-1, 2) **e rapporto** k **tale che i punti** A = (1, 2) **e** A' = (0, 1) **siano corrispondenti.**

Non esiste alcuna omotetia che soddisfa il problema, poiché, se esistesse, i punti corrispondenti e il centro dovrebbero risultare allineati, mentre C, A ed A' non lo sono.

Infatti l'equazione della retta che unisce i punti A e A' è: $y = x + 1$, e tale equazione non è soddisfatta dalle coordinate del punto C.

4. Data la retta r **di equazione** $y = 2x + 3$, **determinare l'equazione della retta ad essa corrispondente nella omotetia di centro l'origine e rapporto** 3.

Le equazioni della omotetia data sono:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y, \end{cases} \quad \text{da cui si ha:} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}x' \\ y = \frac{1}{3}y'. \end{cases}$$

Alla retta r corrisponde la retta di equazione:

$$\frac{y'}{3} = \frac{2}{3}x' + 3, \text{ ovvero} \qquad y' = 2x' + 9.$$

Si noti che le due rette r e r' hanno lo stesso coefficiente angolare, perciò sono parallele, come d'altra parte è noto dalle proprietà delle omotetie.

5. Dimostrare analiticamente che la corrispondente r' **di una retta** r **per mezzo di un'omotetia di costante** $k \neq 0$ **è una retta parallela alla retta** r.

Data un'omotetia, possiamo considerare un sistema di riferimento cartesiano xOy con l'origine O coincidente con il centro dell'omotetia. Perciò le equazioni dell'omotetia sono le 5.3.
Da queste equazioni possiamo ricavare le equazioni dell'omotetia inversa:

5.9
$$\begin{cases} x = \frac{1}{k}x' \\ y = \frac{1}{k}y'. \end{cases}$$

Sia data una generica retta *r* del piano di equazione $ax + by + c = 0$; sostituendo al posto di *x* ed *y* i valori dati dalle equazioni 5.9, si ottiene l'equazione della retta corrispondente *r'*:

$$\frac{a}{k}x'+\frac{b}{k}y'+c=0,$$

da cui si ha:

5.10 $ax' + by' + ck = 0.$

Le rette *r* ed *r'* hanno gli stessi coefficienti delle incognite, perciò esse sono parallele.

6. Determinare, se esiste, l'omotetia di centro l'origine che fa corrispondere al triangolo di vertici $A = (-1, 2)$, $B = (2, 3)$, $C = (0, 1)$ **il triangolo di vertici**

$$A'=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\ B'=\left(-\frac{2}{3},-1\right),\ C'=\left(0,\frac{1}{3}\right).$$

Consideriamo le equazioni 5.3 di generica omotetia di centro l'origine.

Ai vertici *A*, *B*, *C* devono corrispondere rispettivamente i vertici *A'*, *B'*, *C'*; pertanto considerando, ad esempio, l'ascissa di *A* si ha: $k=-\frac{1}{3}.$

Per tale valore di *k*, tuttavia, si ottiene una omotetia nella quale non si corrispondono i punti *C* e *C'*.

Da ciò segue che non esiste un'omotetia che soddisfa le condizioni del problema.

7. Indicare quali delle seguenti coppie di equazioni rappresentano un'omotetia di centro l'origine:

a) $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = \frac{5}{3}y, \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = \frac{1}{3}y, \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x \\ y' = -\frac{1}{3}y, \end{cases}$ *d*) $\begin{cases} x' = -4x \\ y' = 4y, \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}x \\ y' = \frac{1}{5}y, \end{cases}$ *f*) $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0, \end{cases}$ *g*) $\begin{cases} x' = 3x + 1 \\ y' = 3y. \end{cases}$

Le *c*) e le *e*) rappresentano un'omotetia di centro l'origine e rapporto rispettivamente $-\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$;

le equazioni *f*) rappresentano un'omotetia di rapporto 0.

La *g*) rappresenta un'omotetia, ma non di centro l'origine.

Le altre coppie di equazioni non rappresentano delle omotetie.

8. Dimostrare che la composizione di due omotetie è ancora un'omotetia.

Usando le matrici associate alle due omotetie, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & m_1 \\ 0 & k_1 & n_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & m \\ 0 & k & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 k & 0 & k_1 m + m_1 \\ 0 & k_1 k & k_1 n + n_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque la composizione di due omotetie è ancora un'omotetia.

9. Verificare che l'unico punto unito di un'omotetia di centro C e rapporto $k \neq 0$ e $k \neq 1$ è il suo centro.

Se $P = (x, y)$ è un punto unito, si ha che il suo corrispondente è il punto P stesso; perciò, sostituendo nelle equazioni 5.2 dell'omotetia x ed y al posto di x' e y' rispettivamente, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} x = kx + a - ka \\ y = ky + b - kb, \end{cases}$$

che ha per soluzione il punto (a, b), cioè il centro C dell'omotetia.
Dunque il centro è l'unico punto unito.

10. Determinare il centro dell'omotetia di rapporto 2 **che fa corrispondere al punto** $A = (-1, 3)$ **il punto** $A' = (1, 1)$.

Dalla formula 5.2 si ottiene che la generica omotetia di rapporto 2 e centro $C = (a, b)$ ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 2x - a \\ y = 2y - b. \end{cases}$$

Per mezzo di tale omotetia al punto $A = (-1, 3)$ corrisponde il punto $A' = (-2 - a, 6 - b)$. pertanto le coordinate del centro $C = (a, b)$ si trovano risolvendo l'equazione:

$$(-2 - a, 6 - b) = (1, 1),$$

che è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} -2 - a = 1 \\ 2 - b = 1, \end{cases} \text{ da cui si ha: } \begin{cases} a = -3 \\ b = 1. \end{cases}$$

Dunque si ottiene: $C = (-3, 1)$.

11. Determinare il centro dell'omotetia che fa corrispondere ai punti $A = (0, 2)$ **e** $B = (1, 3)$ **i punti** $A' = (2, 1)$ **e** $B' = (1, 0)$.

Ricordando la definizione di omotetia si ha che il suo centro C appartiene sia alla retta AA' che alla retta BB'; pertanto le coordinate del centro sono date dalla soluzione del sistema formato dalle equazioni delle suddette rette:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-1} \\ x = 1, \end{cases} \quad \text{da cui si ha:} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Perciò si ha: $C = \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

12. Determinare il triangolo $A'B'D'$ **corrispondente del triangolo di vertici** $A = (2, 0)$, $B = (0, 2)$, $D = (2, 2)$ **nell'omotetia di centro** $C = (1, 3)$ **e rapporto** -3.
Verificare che si ha:

$$area(A'B'D') = 3^2 area(ABD).$$

L'omotetia ha equazioni

$$\begin{cases} x' = -3x + 4 \\ y' = -3y + 12 \end{cases}$$

e quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} A = (2,0) &\longrightarrow A' = (-2,12), \\ B = (0,2) &\longrightarrow B' = (4,6), \\ D = (2,2) &\longrightarrow D' = (-2,6). \end{aligned}$$

Ricordando la formula dell'area di un triangolo (vedere anche l'esercizio 22 del capitolo 2), si ottiene:

area(*A'B'D'*) =18, *area*(*ABD*) = 2, da cui si ha: *area*(*A'B'D'*) = 3^2*area*(*ABD*).

13. Dimostrare per via analitica che un'omotetia di rapporto diverso da 0 **trasforma una circonferenza in una circonferenza**.

Senza perdere in generalità, possiamo considerare un sistema di riferimento cartesiano *xOy* con l'origine *O* coincidente con il centro dell'omotetia.
Dunque le equazioni dell'omotetia sono le 5.3.
Una circonferenza γ con centro nel punto $P_1 = (x_1, y_1)$ e raggio *r* ha equazione:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2.$$

Sostituendo in questa equazione al posto di *x*, *y*, le espressioni ottenute per mezzo delle equazioni 5.3, si ha l'equazione della curva corrispondente γ':

$$\left(\frac{1}{k}x - x_1\right)^2 + \left(\frac{1}{k}y - y_1\right)^2 = r^2,$$

da cui si ottiene:

$$(x - kx_1)^2 + (y - ky_1)^2 = k^2 r^2.$$

Dunque la corrispondente γ' della circonferenza γ è la circonferenza di centro $P'_1 = (kx_1, ky_1)$ e raggio $|k|r.$

Notiamo che P'_1 è proprio il corrispondente del punto P_1 per mezzo dell'omotetia.

5.3 Esercizi proposti

1. *Un'omotetia di centro l'origine e rapporto k trasforma un punto A in un punto A' in modo tale che* $2\overline{OA'} = 3\overline{OA}$. *Quale è il valore di k?*

R. $k = \pm\frac{3}{2}.$

2. *Sia* σ *un'omotetia di centro O =* (0, 0) *e rapporto k e* σ' *un'omotetia avente lo stesso centro e rapporto k'. Dimostrare che* $\sigma \circ \sigma'$ e $\sigma' \circ \sigma$ *sono ancora omotetie e determinare i rapporti.*

R. In entrambi i casi il rapporto è *kk'*.

3. *Determinare l'equazione della circonferenza corrispondente alla circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 = 36$ *per mezzo dell'omotetia di centro l'origine e rapporto* $\frac{1}{2}$ *e valutare il rapporto dei loro raggi.*

R. $x^2 + y^2 = 9, \frac{r'}{r} = \frac{1}{2}.$

4. *Data l'omotetia di equazioni:* $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 5 \end{cases}$ *determinare le coordinate del suo centro.*

R. (1, -5).

5. *Determinare l'equazione della parabola passante per il punto A =* (1, 2) *e corrispondente nell'omotetia di centro O =* (0, 0) *alla parabola di equazione* $y = -x^2 - 1.$

R. $y' = x'^2 + 1.$

6. *Un'omotetia trasforma il triangolo T di vertici A =* (1, 1), *B =* (-1, 2), *D =* (-1, 0) *nel triangolo T' di vertici A' =* (3, 2), *B' =* (2, 1), *D' =* (2, 0).

Determinare le equazioni dell'omotetia.

R. $\begin{cases} x' = 2x - 5 \\ y' = 2y. \end{cases}$

7. *Determinare il rapporto k dell'omotetia di centro C* = (-1, -2) *che trasforma A* = (0, 2) *in A'* = (3, 14).

R. $k = 4$.

8. *L'omotetia di centro C* = (1, 2) *e rapporto* $\frac{1}{3}$ *trasforma i punti A* = (3, 0) *e B* = (-1, 2) *rispettivamente nei punti* $A'=\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right)$ *e* $B'=\left(\frac{5}{3},2\right)$.

Verificare che al punto medio M del segmento AB corrisponde il punto medio M' del segmento A'B'.

9. *Determinare, se esiste, l'omotetia che fa corrispondere al rettangolo di vertici A* = (1, 0), *B* = (3, 2), *D* = (2, 3) e *E* = (0, 1) *il rettangolo di vertici A'* = (5, -2), *B'* = (11, 4), $D'=\left(\frac{19}{2},\frac{11}{2}\right)$ e $E'=\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

R. Non esiste.

10. *Determinare le equazioni dell'omotetia di centro l'origine che fa corrispondere al quadrato di perimetro 20 situato nel primo quadrante, il quadrato di perimetro 60 situato nel terzo quadrante.*

R. $\begin{cases} x' = -3x \\ y' = -3y. \end{cases}$