Alcuni risultati sui triangoli sferici

Consideriamo una sfera S di raggio R. Siano A, B, C tre punti di S che non stanno sullo stesso cerchio massimo (cioè che non siano "allineati"). Supponiamo anche tra A, B e C non ci siano punti antipodali. Il triangolo sferico di vertici A, B, C è individuato dai tre archi (minori) di cerchio massimo che uniscono a due a due i tre punti A, B, C. I tre archi si dicono i tre lati del triangolo.

Scegliendo l'origine delle coordinate nel centro O della sfera, i tre punti A, B, C si identificano con tre vettori applicati nell'origine, di lunghezza pari al raggio, che denoteremo ancora con A, B e C. Chiamando con a, b, c le misure dei tre lati opposti rispettivamente a A, B, C, seguono le formule

$$\cos(\frac{a}{R}) = \frac{B \cdot C}{R^2}$$

$$\cos(\frac{b}{R}) = \frac{A \cdot C}{R^2}$$

$$\cos(\frac{c}{R}) = \frac{A \cdot B}{R^2}$$

Gli angoli del triangolo sferico sono gli angoli tra i vettori tangenti ai suoi lati. I vettori tangenti ai lati in A si ottengono togliendo rispettivamente da B e C le loro proiezioni ortogonali su A, perché il piano tangente alla sfera in ogni suo punto è perpendicolare al vettore che unisce il punto col centro della sfera.

Pertanto i vettori tangenti ai lati in A sono

$$B - \frac{(B \cdot A)A}{R^2}$$

$$C - \frac{(C \cdot A)A}{R^2}$$

e similmente per i vettori tangenti in B e C.

Lemma 0.1 *La lunghezza di* $B - \frac{(B \cdot A)A}{R^2}$ *è* $R\sin(\frac{c}{R})$.

Dimostrazione Calcolando il prodotto scalare si ottiene

$$\left(B - \frac{(B \cdot A)A}{R^2}\right) \cdot \left(B - \frac{(B \cdot A)A}{R^2}\right) = R^2 + \frac{(B \cdot A)^2}{R^2} - 2\frac{(B \cdot A)^2}{R^2} =$$

$$= R^2 - \frac{(B \cdot A)^2}{R^2} = R^2 \left(1 - \cos^2(\frac{c}{R})\right)$$

□

Quindi abbiamo

$$R^2 \sin(\frac{c}{R}) \sin(\frac{b}{R}) \cos(\hat{A}) = \left(B - \frac{(B \cdot A)A}{R^2}\right) \cdot \left(C - \frac{(C \cdot A)A}{R^2}\right) =$$

$$= B \cdot C - 2\frac{(B \cdot A)(C \cdot A)}{R^2} + \frac{(B \cdot A)(C \cdot A)}{R^2} = B \cdot C - \frac{(B \cdot A)(C \cdot A)}{R^2} = R^2 \left(\cos(\frac{a}{R}) - \cos(\frac{c}{R}) \cos(\frac{b}{R}) \right)$$

e formule analoghe per gli altri angoli.

In particolare se $\hat{A}$ è retto abbiamo $\cos(\hat{A}) = 0$ da cui il

Teorema 0.2 Teorema di Pitagora sferico *In un triangolo sferico rettangolo con ipotenusa a e cateti b, c vale*

$$\cos(\frac{a}{R}) = \cos(\frac{b}{R}) \cos(\frac{c}{R})$$

Notiamo che nella dimostrazione del teorema di Pitagora sferico il lemma Lemma 0.1 non è neanche necessario.

Sviluppando i primi termini di cos secondo la formula di Taylor abbiamo

$$(1 - \frac{a^2}{2R^2} + \dots) = (1 - \frac{b^2}{2R^2} + \dots)(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \dots)$$

da cui

$$\frac{(a^2 - b^2 - c^2)}{2R^2} + \frac{*}{R^4} \dots = 0$$

e moltiplicando per R^2 e facendo il limite per $R \to \infty$ si ottiene il teorema di Pitagora euclideo.

La formula precedente il teorema di Pitagora può essere pensata come l'analoga sferica della formula di Carnot.

Teorema 0.3 Teorema dei seni sferico

$$\frac{\sin(a/R)}{\sin(\hat{A})} = \frac{\sin(b/R)}{\sin(\hat{B})} = \frac{\sin(c/R)}{\sin(\hat{C})}$$

Dimostrazione Possiamo supporre $R = 1$ (per similitudine) e che l'ordine dei punti A, B, C segua il verso antiorario rispetto al baricentro del triangolo. L'angolo tra $C - (C \cdot A)A$ e $A \wedge B$ (che sono entrambi vettori perpendicolari a A, di lunghezza rispettivamente $\sin(b)$ e $\sin(c)$) è $\frac{\pi}{2} - \hat{A}$. Pertanto il loro prodotto scalare è uguale a $\sin(b)\sin(c)\cos(\frac{\pi}{2} - \hat{A}) = \sin(b)\sin(c)\sin(\hat{A})$

Ma il prodotto scalare è uguale in questo caso al prodotto misto $A \wedge B \cdot C$, che è simmetrico rispetto alla permutazione ciclica di A, B e C. quindi

$$A \wedge B \cdot C = \sin(b)\sin(c)\sin(\hat{A})$$

che è un risultato interessante di per sé perché il prodotto misto corrisponde a sei volte il volume (orientato) del tetraedro di vertici O, A, B, C. Permutando si ottiene

$$\sin(b)\sin(c)\sin(\hat{A}) = \sin(c)\sin(a)\sin(\hat{B})$$

da cui

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\hat{A})} = \frac{\sin(b)}{\sin(\hat{B})}$$

Permutando ancora si ottiene l'ultima uguaglianza. □