Indice

Introduzione

In questi ultimi mesi io ed il mio relatore ci siamo messi alla ricerca degli invarianti di alcuni gruppi poliedrali. Che cos'è un gruppo poliedrale? Dato un poliedro, il suo gruppo poliedrale, o il suo gruppo delle rotazioni, è il gruppo formato dalle isometrie dirette dello spazio che trasformano il poliedro in se stesso. Noi ci siamo concentrati sui gruppi delle rotazioni dei 5 solidi platonici: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro, l'icosaedro. Poiché da un lato il cubo e l'ottaedro e dall'altro il dodecaedro e l'icosaedro sono l'uno il poliedro duale dell'altro, il gruppo delle rotazioni del cubo coincide con il gruppo ottaedrale, e il gruppo delle rotazioni del dodecaedro coincide con il gruppo icosaedrale. Dunque abbiamo a che fare con soli tre gruppi poliedrali: il gruppo tetraedrale, il gruppo ottaedrale e quello icosaedrale. Gli elementi di questi gruppi poliedrali sono appunto rotazioni dello spazio, ovvero sono matrici di $SO(3)$. [1] Tuttavia, i solidi platonici sono inscrivibili in una sfera bidimensionale, pertanto possiamo vedere le loro rotazioni come rotazioni della sfera. Quest'ultima può essere identificata con il piano complesso esteso a ∞. Infatti, se consideriamo la sfera unitaria bidimensionale $S^2 = \{(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1\}$ centrata nell'origine O di un riferimento cartesiano ortogonale di assi coordinati ξ,η,ζ, chiamiamo $N = (0,0,1)$ il suo polo nord e identifichiamo in $\mathbb{C}$ tutti i punti all'infinito con un unico punto, che indicheremo con ∞, la funzione

$$\begin{array}{rccc} \pi: & S^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}\cup\{\infty\} \\ & (\xi,\eta,\zeta) & \longmapsto & \begin{cases} x+iy = \dfrac{\xi+i\eta}{1-\zeta} & \text{se } (\xi,\eta,\zeta) \neq N, \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{array}$$

è un omeomorfismo di spazi topologici, detto proiezione stereografica. Quindi possiamo vedere le rotazioni dei solidi platonici come trasformazioni del piano complesso esteso.
Vediamo ora come scrivere una generica rotazione di S^2 vista come $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Dato $P = (\lambda,\mu,\nu) \in S^2$, la rotazione di S^2 attorno all'asse OP di un angolo α in senso antiorario visto da P verso O è

$$\begin{array}{rccc} r_{P,\alpha}: & \mathbb{C}\cup\{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\cup\{\infty\} \\ & z & \longmapsto & z' = \dfrac{(d+ic)z-(b-ia)}{(b+ia)z+(d-ic)}, \end{array}$$

dove $a = \lambda\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $b = \mu\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $c = \nu\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $d = \cos\dfrac{\alpha}{2}$. Alla rotazione $r_{P,\alpha}$ corrispondono due trasformazioni lineari omogenee, ottenute ponendo $z = \dfrac{u}{v}$ e $z' = \dfrac{u'}{v'}$: la trasformazione

$$\begin{array}{rccl} r'_{P,\alpha}: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d+ic)u-(b-ia)v \\ (b+ia)u+(d-ic)v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+ic & -(b-ia) \\ b+ia & d-ic \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = R_{P,\alpha}\mathbf{u}, \end{array}$$

dove $R_{P,\alpha} \in SU(2)$, e quella associata alla matrice $-R_{P,\alpha}$.
Dunque, riassumendo, una rotazione di un solido platonico corrisponde ad una matrice di $SO(3)$ o

[1] In generale, fissato $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $SO(n)$ è l'insieme delle matrici di $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonali con determinante 1, ed è detto gruppo ortogonale speciale di ordine n. $SU(n)$ è l'insieme delle matrici di $\mathbb{C}^{n\times n}$ unitarie con determinante 1 ed è detto gruppo unitario speciale di ordine n. Risulta $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{C}, |a|^2+|b|^2 = 1 \right\}$. Fissato un campo $\mathbb{K}$, $GL(n,\mathbb{K})$ è l'insieme delle matrici di $\mathbb{K}^{n\times n}$ invertibili, ed è detto gruppo lineare su $\mathbb{K}$ di ordine n.

equivalentemente a due matrici di $SU(2)$ che sono l'una l'opposta dell'altra. Questo accade perché la funzione

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & SU(2) & \longrightarrow & SO(3) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a\overline{a}-b\overline{b} & i(\overline{a}b-a\overline{b}) & \overline{a}b+a\overline{b} \\ i(\overline{ab}-ab) & \frac{1}{2}(a^2+\overline{a}^2+b^2+\overline{b}^2) & \frac{i}{2}(a^2-\overline{a}^2-b^2+\overline{b}^2) \\ -(\overline{ab}+ab) & \frac{i}{2}(\overline{a}^2-a^2+\overline{b}^2-b^2) & \frac{1}{2}(a^2+\overline{a}^2-b^2-\overline{b}^2) \end{pmatrix} \end{array}$$

è un omomorfismo di gruppi suriettivo di tipo 2:1, cioè tale che per ogni $\rho \in SO(3)$ esistono esattamente due matrici $R, -R \in SU(2)$ la cui immagine tramite φ sia ρ (v. [AR], §8.3).
Dunque ciascuno dei nostri gruppi poliedrali può essere visto come un insieme di n matrici di $SO(3)$ o equivalentemente come un insieme di $2n$ matrici di $SU(2)$. Comunque li si vogliano vedere, i nostri tre gruppi poliedrali sono gruppi finiti di matrici: in generale, infatti, fissati $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica 0, si dice gruppo finito di matrici un sottogruppo finito di $GL(n, \mathbb{K})$. Dato G un gruppo finito di matrici, un polinomio $f \in \mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]$ si dice un invariante di G se

$$f(A\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) \qquad \forall A \in G;$$

indichiamo con $\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]^G$ l'insieme degli invarianti di G (v. [CLO], §7.2).
Noi abbiamo cercato gli invarianti dei tre gruppi tetraedrale, ottaedrale e icosaedrale visti dapprima come sottoinsiemi di $SU(2)$ e poi di $SO(3)$; nel primo caso abbiamo trovato dei polinomi di $\mathbb{C}[u, v]$, e questi risultati sono presenti in letteratura (v. [DICKSON], §13.121 - §13.129); nel secondo caso, invece, abbiamo trovato polinomi di $\mathbb{R}[u, v, w]$, e tali risultati sono originali di questa tesi.

Osservazione 1. Se $G = \langle A_1, \dots, A_m \rangle$, allora $\forall f \in \mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]$ risulta

$$f \in \mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]^G \quad \iff \quad f(A_1\mathbf{u}) = \ldots = f(A_m\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}).$$

Indichiamo con $\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]_d$ l'insieme dei polinomi omogenei di grado d. Un polinomio è invariante se e solo se ogni sua componente omogenea lo è. Dunque

$$\dim\left(\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]^G\right) = \sum_{d=0}^{+\infty} \dim\left(\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]_d^G\right).$$

Al crescere di d la funzione $\dim\left(\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]_d^G\right)$ descrive la crescita dell'anello $\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]^G$. Per valutare la crescita dell'anello $\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]^G$ è conveniente introdurre la sua funzione generatrice $\sum_{d=0}^{+\infty} \dim\left(\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]_d^G\right) t^d$, detta serie (formale) di Hilbert di $\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]^G$.

Teorema 1 (Molien)**.** ([STUR], §2.2) $\displaystyle\sum_{d=0}^{+\infty} \dim\left(\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]_d^G\right) t^d = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \frac{1}{\det(I_n - tA)}$. [2]

Teorema 2 (Emmy Noether)**.** ([CLO], §7.3) $\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]^G$ è generato da un numero finito di invarianti omogenei $f_1, \dots, f_m$, cioè $\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]^G = \mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]$. In particolare risulta[3]

$$\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]^G = \mathbb{K}[R_G(u_1^{\beta_1} \cdots u_n^{\beta_n}) : (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \beta_1 + \ldots + \beta_n \leq |G|].$$

[2] La divisione per $|G|$ è permessa poiché $\mathbb{K}$ ha caratteristica 0.

[3] Si dice operatore di Reynolds la funzione

$$\begin{array}{rccc} R_G: & \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^G \\ & f & \longmapsto & R_G(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} f(A\mathbf{x}). \end{array}$$

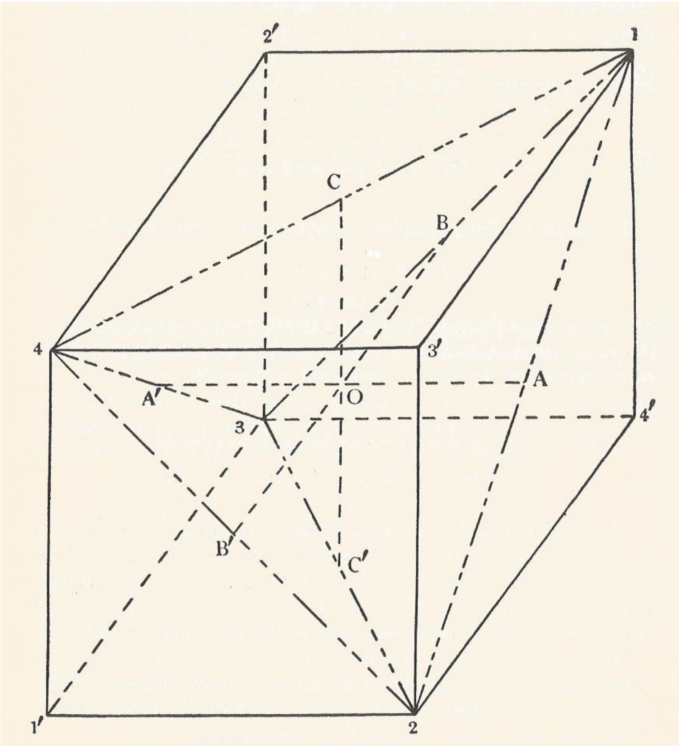

Figura 1: tetraedro 1234, tetraedro diametrale $1'2'3'4'$ e ottaedro CABA$'$B$'$C$'$.

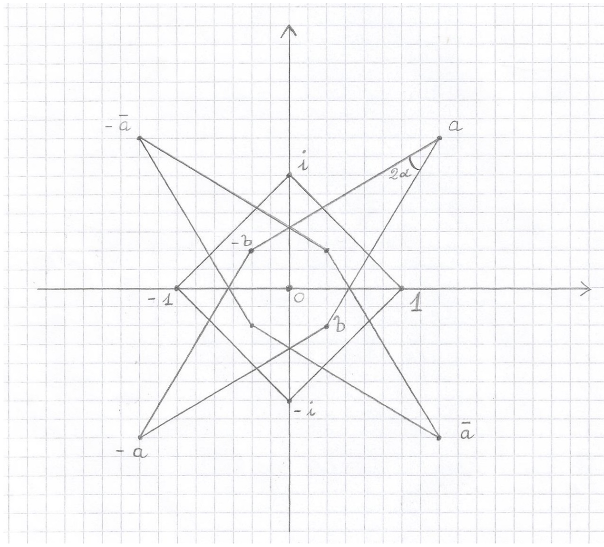

Figura 2: i vertici del tetraedro, del tetraedro diametrale e i punti $1, -1, i, -i, 0$ sul piano complesso.

Lemma 1. ([STUR], §2.2) Se $\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]^G = \mathbb{K}[f_1, \dots, f_m]$ con $f_1, \dots, f_m$ invarianti omogenei di rispettivi gradi $d_1, \dots, d_m$ e algebricamente indipendenti[4], allora

$$\sum_{d=0}^{+\infty} \dim\big(\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]^G_d\big) t^d \;=\; \frac{1}{(1-t^{d_1})\cdots(1-t^{d_m})}.$$

1 Gruppo tetraedrale

Consideriamo un cubo inscritto in una sfera di centro O e raggio unitario. Quattro dei suoi vertici $1, 2, 3, 4$ mostrati in figura 1 sono i vertici di un tetraedro regolare. I loro punti diametrali $1', 2', 3', 4'$ sono i vertici di un altro tetraedro regolare, detto il tetraedro diametrale di 1234; questi due tetraedri sono costruiti come l'uno il poliedro duale (combinatorio) dell'altro. Le linee due a due ortogonali AA', BB', CC', ognuna delle quali unisce i punti medi di due lati opposti del tetraedro, sono prese rispettivamente come gli assi coordinati ξ, η, ζ, e consideriamo positive le direzioni che vanno da O (il loro punto di incontro) verso A, B, C rispettivamente. Il tetraedro 1234 è lasciato invariato dalla rotazione di $0°$ rispetto ad un qualunque asse (la rotazione identica), dalle 3 rotazioni di $180°$ rispetto ad uno degli assi AA', BB', CC' e dalle 8 rotazioni di $120°$, $240°$ rispetto ad uno degli assi $O1, O2, O3, O4$ in senso antiorario visto da $1, 2, 3, 4$ verso O. Queste 12 sono tutte e sole le rotazioni del tetraedro. Infatti ogni simmetria del tetraedro 1234 realizza una permutazione dei vertici $1, 2, 3, 4$, dunque possiamo identificare il gruppo delle simmetrie del tetraedro con il gruppo S_4 delle permutazioni su 4 elementi. Le simmetrie del tetraedro sono dunque 24; tra queste, quelle che conservano l'orientazione dello spazio costituiscono il gruppo alterno $\mathrm{Alt}(4)$. Dunque il gruppo tetraedrale, visto

[4] Siano $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]$. Una relazione algebrica (o sizigia) tra $f_1, \dots, f_m$ è un polinomio $h \in \mathbb{K}[v_1, \dots, v_m], h \neq 0$ tale che $h(f_1, \dots, f_m) = 0$ in $\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]$. $f_1, \dots, f_m$ si dicono algebricamente indipendenti se tra essi non esiste alcuna relazione algebrica. L'insieme

$$I_S = \{h \in \mathbb{K}[v_1, \dots, v_m] \mid h(f_1, \dots, f_m) = 0 \text{ in } \mathbb{K}[u_1, \dots, u_n]\}$$

di tutte le relazioni algebriche tra $f_1, \dots, f_m$ è un ideale di $\mathbb{K}[v_1, \dots, v_m]$ ed è detto ideale delle sizigie di $f_1, \dots, f_m$. Si può calcolare esplicitamente I_S eliminando dall'ideale $I = \big(v_1 - f_1(u_1, \dots, u_n), \dots, v_m - f_m(u_1, \dots, u_n)\big)$ di $\mathbb{K}[u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m]$ le variabili $u_1, \dots, u_n$.

come sottoinsieme di $SO(3)$, è $\mathrm{Alt}(4)$, ha 12 elementi ed è generato dalla rotazione ρ di 180° rispetto all'asse CC' e dalla rotazione σ di 120° rispetto all'asse $O1$.
Volendo scrivere ρ e σ come rotazioni di S^2 in una delle due forme lineari omogenee, si ha[5]

$$\rho' : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = R\mathbf{u}, \end{array} , \qquad \sigma' : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \longmapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & -(1-i) \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S\mathbf{u}. \end{array}$$

Il gruppo tetraedrale, visto come sottoinsieme di $SU(2)$, è $H_{24} = \varphi^{-1}(\mathrm{Alt}(4))$, ha 24 elementi ed è generato da R e S. Risulta

$$\rho = \varphi(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \varphi(S) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Invarianti di H_{24} Le classi di coniugio di $\mathrm{Alt}(4)$ sono 4, di rispettive cardinalità $1, 3, 4, 4$ e di rispettivi rappresentanti $\varphi(I_2) = I_3, \varphi(R), \varphi(S), \varphi(S^2)$; quindi le classi di coniugio di H_{24} sono 8, di rispettive cardinalità $1, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 4$ e di rispettivi rappresentanti $I_2, -I_2, R, -R, S, -S, S^2, -S^2$.
Dunque, poiché $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ la quantità $\det(I_n - tA)$ è invariante per similitudine, la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[u, v]^{H_{24}}$ è

$$\sum_{d=0}^{+\infty} \dim(\mathbb{C}[u,v]_d^{H_{24}})t^d \underset{\text{teor. di Molien}}{=} \frac{1}{|H_{24}|} \sum_{A\in H_{24}} \frac{1}{\det(I_2 - tA)} =$$

$$= \frac{1}{24}\left(\frac{1}{\det(I_2 - tI_2)} + \frac{1}{\det(I_2 + tI_2)} + 3\frac{1}{\det(I_2 - tR)} + 3\frac{1}{\det(I_2 + tR)} + \right.$$

$$\left. +4\frac{1}{\det(I_2 - tS)} + 4\frac{1}{\det(I_2 + tS)} + 4\frac{1}{\det(I_2 - tS^2)} + 4\frac{1}{\det(I_2 + tS^2)} \right) =$$

$$= \frac{1}{24}\left(\frac{1}{1-2t+t^2} + \frac{1}{1+2t+t^2} + 3\frac{1}{1+t^2} + 3\frac{1}{1+t^2} + \right.$$

$$\left. +4\frac{1}{1-t+t^2} + 4\frac{1}{1+t+t^2} + 4\frac{1}{1+t+t^2} + 4\frac{1}{1-t+t^2} \right) = (*);$$

una volta ridotto al minimo comune denominatore, moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per $(1 + t^4)(1 - t^{12})$, ottenendo

$$(*) = \frac{1 - t^{24}}{(1 - t^6)(1 - t^8)(1 - t^{12})}.$$

Questo fa congetturare che $\mathbb{C}[u, v]^{H_{24}}$ abbia 3 generatori, di rispettivi gradi $6, 8, 12$, legati da un'unica relazione algebrica avente grado 24. Mostriamo che effettivamente è così, trovando esplicitamente questi generatori con l'aiuto di osservazioni di carattere geometrico.
I vertici $1, 2, 3, 4$ del tetraedro 1234 hanno rispettive coordinate (ξ, η, ζ)

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1), \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1), \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1);$$

essi appartengono alla sfera S^2 e le loro rispettive immagini tramite la proiezione stereografica π sono i punti $a, b, -b, -a$ di $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, dove $a = \frac{1}{\sqrt{3}-1}(1+i)$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}+1}(1-i)$. Rappresentiamoli sul piano complesso (figura 2) dopo aver osservato che $|a| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \approx 1.93$ e $|b| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \approx 0.52$. L'angolo α in figura è $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$ poiché $\tan\alpha = \frac{|b|}{|a|} = 2 - \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$. I quattro polinomi $u \mp av, u \mp bv$ di

[5] Per quanto riguarda ρ risulta $P = N = (0, 0, 1)$ e $\alpha = \pi$, dunque $a = b = d = 0, c = 1$; riguardo a σ, P è il punto 1 di coordinate $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ e $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, dunque $a = b = c = d = \frac{1}{2}$.

$\mathbb{C}[u,v]_1$ si annullano rispettivamente nei quattro punti $z = \pm a, z = \pm b$ (sempre ponendo $z = \frac{u}{v}$). Il prodotto di queste quattro funzioni lineari è il polinomio

$$g_4 = g_4(u,v) = u^4 - 2\sqrt{3}iu^2v^2 + v^4$$

di $\mathbb{C}[u,v]_4$ che si annulla nei 4 vertici del tetraedro. Le 12 rotazioni di Alt(4) che lasciano il tetraedro 1234 inalterato ne permutano i vertici, quindi lasciano g_4 invariato a meno di una costante moltiplicativa (si dice in tal caso che il polinomio è un semiinvariante). Tale costante è 1 nel caso di R ed è $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ nel caso di S; infatti con il sistema di algebra computazionale Macaulay 2 (che nel seguito abbrevieremo con M2) si verifica che $g_4(R\mathbf{u}) = g_4(u,v)$ e $g_4(S\mathbf{u}) = e^{i\frac{2\pi}{3}}g_4(u,v)$. Dunque, per l'osservazione 1, $\tilde{f}_{12} = g_4^3$ è un invariante di H_{24}.
I vertici $1', 2', 3', 4'$ del tetraedro diametrale hanno rispettive coordinate (ξ, η, ζ) uguali a $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$; le loro rispettive immagini tramite π sono $-\bar{b}, -\bar{a}, \bar{a}, \bar{b}$.
Il polinomio di $\mathbb{C}[u,v]_4$ che si annulla nei 4 vertici del tetraedro diametrale è $h_4 = h_4(u,v) = u^4 + 2\sqrt{3}iu^2v^2 + v^4$; con M2 si vede che $h_4(R\mathbf{u}) = h_4(u,v)$ e $h_4(S\mathbf{u}) = e^{-i\frac{2\pi}{3}}h_4(u,v)$. Dunque il prodotto

$$f_8 = f_8(u,v) = g_4h_4 = u^8 + 14u^4v^4 + v^8$$

è un invariante di H_{24}.
Le 12 rotazioni di Alt(4) che lasciano il tetraedro 1234 inalterato ne permutano i lati, dunque permutano i punti medi dei lati, e quindi permutano i punti nei quali gli assi coordinati intersecano la sfera S^2. Tali punti hanno coordinate (ξ, η, ζ) rispettivamente uguali a $\pm(1,0,0)$, $\pm(0,1,0)$, $\pm(0,0,1)$; le loro rispettive immagini tramite π sono $\pm 1, \pm i, \infty, 0$. Osserviamo che il prodotto delle sei funzioni lineari $u \mp v, u \mp iv, v, u$ è

$$f_6 = f_6(u,v) = u^5v - uv^5,$$

che è un invariante di H_{24}: con M2 è facile verificare che $f_6(R\mathbf{u}) = f_6(S\mathbf{u}) = f_6(u,v)$.
Abbiamo dunque provato che $f_6, f_8, \tilde{f}_{12}$ sono invarianti di H_{24}. Essi hanno gradi rispettivamente $6, 8, 12$ e non sono algebricamente indipendenti: con M2, usando il metodo di eliminazione illustrato in nota 4, vediamo che essi sono legati dall'unica relazione

$$12\sqrt{3}i\tilde{f}_{12}f_6^2 - f_8^3 + \tilde{f}_{12}^2 = 0,$$

che ha grado grado 24. Dopo aver moltiplicato f_6 e f_8 per opportune costanti[6] (e continuando, con abuso di notazione, ad indicarli con i medesimi nomi), la relazione precedente assume la forma $\tilde{f}_{12}f_6^2 + f_8^3 + \tilde{f}_{12}^2 = 0$; detto $f_{12} = \tilde{f}_{12} + \frac{1}{2}f_6^2$, la relazione (dopo aver moltiplicato f_6 per un'opportuna costante) diventa $f_6^4 + f_8^3 + f_{12}^2 = 0$.

Teorema 3. $\mathbb{C}[u,v]^{H_{24}} = \dfrac{\mathbb{C}[f_6, f_8, f_{12}]}{(f_6^4 + f_8^3 + f_{12}^2)}$.

Invarianti di Alt(4) Per quanto detto sulle classi di coniugio di Alt(4), la serie di Hilbert di $\mathbb{R}[u,v,w]^{\mathrm{Alt}(4)}$ è

$$\sum_{d=0}^{+\infty} \dim(\mathbb{R}[u,v,w]_d^{\mathrm{Alt}(4)})t^d \underset{\text{teor. di Molien}}{=} \frac{1}{|\mathrm{Alt}(4)|}\sum_{A\in \mathrm{Alt}(4)} \frac{1}{\det(I_3 - tA)} =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\det(I_3 - tI_3)} + 3\frac{1}{\det(I_3 - t\varphi(R))} + 4\frac{1}{\det(I_3 - t\varphi(S))} + 4\frac{1}{\det(I_3 - t\varphi(S^2))}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{1 - 3t + 3t^3 - t^3} + 3\frac{1}{1 + t - t^2 - t^3} + 4\frac{1}{1 - t^3} + 4\frac{1}{1 - t^3}\right) = (*);$$

[6]In generale, se $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}[u_1, \ldots, u_n]$ sono invarianti di un gruppo finito G, allora $\forall g \in \mathbb{K}[v_1, \ldots, v_n]$ il polinomio $g(f_1, \ldots, f_n)$ è un invariante di G.

una volta ridotto al minimo comune denominatore, moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per $(1+t^2)(1-t^6)$, ottenendo

$$(*) \quad = \quad \frac{1-t^{12}}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)(1-t^6)}.$$

Questo fa congetturare che $\mathbb{R}[u,v,w]^{\mathrm{Alt}(4)}$ abbia 4 generatori, di rispettivi gradi $2,3,4,6$, legati da un'unica relazione algebrica avente grado 12. Mostriamo che effettivamente è così, trovando esplicitamente questi generatori con l'aiuto di osservazioni di carattere geometrico.
Mettiamoci nel riferimento $(O,(u,v,w)) = (O,(\xi,\eta,\zeta))$. Tramite una rotazione di Alt(4) rimangono invariati:

(-) l'unione dei vertici del tetraedro, i quali appartengono alla sfera S^2 di equazione $u^2+v^2+w^2-1=0$, la cui espressione omogeneizzata è $f_2 = u^2+v^2+w^2$;

(-) l'unione dei 3 piani $u=0, v=0, z=0$, il prodotto delle cui espressioni omogeneizzate è $f_3 = uvw$;

(-) l'unione dei 4 piani affini su cui giacciono le facce del tetraedro, il prodotto delle cui espressioni omogeneizzate è $f_4 = (u+v+w)(u+v-w)(u-v+w)(-u+v+w)$;

(-) l'unione dei 6 piani affini assi degli spigoli del tetraedro (cioè i piani ortogonali agli spigoli e passanti per i loro punti medi), il prodotto delle cui espressioni omogeneizzate è
$f_6 = (u+v)(u-v)(u+w)(u-w)(v+w)(v-w)$.

Per ogni $i = 2,3,4,6$ il polinomio f_i di $\mathbb{R}[u,v,w]_i$ è un invariante di Alt(4) per l'osservazione 1 e poiché $f(\varphi(R)\mathbf{u}) = f(\varphi(S)\mathbf{u}) = f(u,v,w)$, come si verifica con M2. Sempre con M2, usando il metodo di eliminazione illustrato in nota 4, vediamo che essi sono legati dall'unica relazione

$$8f_2^3f_3^2 - f_2^4f_4 - 432f_3^4 + 72f_2f_3^2f_4 - 2f_2^2f_4^2 - f_4^3 - 16f_6^2 = 0,$$

che ha grado grado 12.

Teorema 4. $\mathbb{R}[u,v,w]^{\mathrm{Alt}(4)} = \dfrac{\mathbb{R}[f_2,f_3,f_4,f_6]}{(8f_2^3f_3^2 - f_2^4f_4 - 432f_3^4 + 72f_2f_3^2f_4 - 2f_2^2f_4^2 - f_4^3 - 16f_6^2)}.$

2 Gruppo ottaedrale

In figura 1, il solido composto dalle due piramidi di vertici C e C' e di base comune $ABA'B'$ è un ottaedro regolare. Esso è lasciato invariato dalle 12 rotazioni del gruppo Alt(4) che lasciano il tetraedro 1234 invariato e dalle 12 rotazioni che scambiano quest'ultimo con il suo tetraedro diametrale $1'2'3'4'$, ovvero dalle 6 rotazioni di $\pm 90°$ attorno agli assi AA', BB', CC' e dalle 6 rotazioni di $180°$ attorno ai 6 diametri (della sfera) ognuno dei quali biseziona due lati opposti dell'ottaedro. Queste 24 sono tutte e sole le rotazioni dell'ottaedro. Infatti esiste esattamente una rotazione per ogni permutazione delle 4 coppie di facce opposte dell'ottaedro. Dunque il gruppo ottaedrale, visto come sottoinsieme di $SO(3)$, è S_4, ha 24 elementi ed è generato dalle rotazioni ρ e σ di Alt(4) e dalla rotazione τ di $90°$ attorno all'asse verticale $CC' = ON$ in senso antiorario visto da N verso O. Una delle due matrici corrispondenti a τ vista come rotazione di S^2 è $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$. Il gruppo ottaedrale, visto come sottoinsieme di $SU(2)$, è $H_{48} = \varphi^{-1}(S_4)$, ha 48 elementi ed è generato da R, S, T. Risulta

$$\tau = \varphi(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Invarianti di H_{48} Le classi di coniugio di S_4 sono 5, di rispettive cardinalità $1,3,6,6,8$ e di rispettivi rappresentanti $\varphi(I_2) = I_3, \varphi(R), \varphi(E), \varphi(RE), \varphi(S)$. Dunque la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[u,v]^{H_{48}}$ è

$$\frac{1}{48}\left(\frac{1}{1-2t+t^2} + \frac{1}{1+2t+t^2} + 6\frac{1}{1-\sqrt{2}t+t^2} + 6\frac{1}{1+\sqrt{2}t+t^2} + \right.$$

$$\left. +8\frac{1}{1-t+t^2} + 8\frac{1}{1+t+t^2} + 18\frac{1}{1+t^2}\right) \quad = \quad (*);$$

una volta ridotto al minimo comune denominatore, moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per $(1+t^6)(1-t^{18})$, ottenendo

$$(*) \quad = \quad \frac{1-t^{36}}{(1-t^8)(1-t^{12})(1-t^{18})}.$$

Questo fa sospettare che $\mathbb{K}[u,v]^{H_{48}}$ abbia 3 generatori, di rispettivi gradi $8, 12, 18$, legati da un'unica relazione avente grado 36.
Consideriamo l'ottaedro in figura 1 i cui vertici sono le intersezioni dei tre assi coordinati con S^2. $g_6(u,v) = u^5v - uv^5$ è il polinomio di $\mathbb{C}[u,v]_6$ che si annulla nei punti $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ immagini tramite π dei sei vertici dell'ottaedro considerato (è il polinomio f_6 invariante di H_{24}); abbiamo visto che $g_6(R\mathbf{u}) = g_6(S\mathbf{u}) = g_6(u,v)$ e con M2 osserviamo che $g_6(E\mathbf{u}) = -g_6(u,v)$, dunque $f_{12} = g_6^2$ è un invariante di H_{48}. Il determinante della matrice Hessiana di $g_6(u,v)$ è

$$\det Hg_6(u,v) \quad = \quad -25u^8 - 350u^4v^4 - 25v^8 \quad = \quad -25f_8(u,v).$$

Abbiamo visto che $f_8(R\mathbf{u}) = f_8(S\mathbf{u}) = f_8(u,v)$ e con M2 osserviamo che $f_8(E\mathbf{u}) = f_8(u,v)$, dunque f_8 è un invariante di H_{48}. Il determinante della matrice Jacobiana della funzione $(g_6, f_8)(u,v)$ è

$$\det J(g_6, f_8)(u,v) \quad = \quad -8u^{12} + 264u^8v^4 + 264u^4v^8 - 8v^{12} \quad = \quad -8g_{12}(u,v),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo chiamato

$$g_{12}(u,v) = u^{12} - 33u^8v^4 - 33u^4v^8 + v^{12}.$$

Usando M2 osserviamo che $g_{12}(R\mathbf{u}) = g_{12}(S\mathbf{u}) = g_{12}(u,v)$ e che $g_{12}(E\mathbf{u}) = -g_{12}(u,v)$, pertanto

$$f_{18} = f_{18}(u,v) = (g_6g_{12})(u,v) = u^{17}v - 34u^{13}v^5 + 34u^5v^{13} + 34u^5v^{13} - uv^{17}$$

è un invariante di H_{48}. Abbiamo dunque provato che f_8, f_{12}, f_{18} sono invarianti di H_{48}. Essi hanno gradi rispettivamente $8, 12, 18$ e sono legati dall'unica relazione

$$f_8^3f_{12} - 108f_{12}^3 - f_{18}^2 = 0,$$

che ha grado 36; moltiplicando gli invarianti per opportune costanti, la relazione precedente diventa $f_8^3f_{12} + f_{12}^3 + f_{18}^2 = 0$.

Teorema 5. $\mathbb{C}[u,v]^{H_{48}} = \dfrac{\mathbb{C}[f_8, f_{12}, f_{18}]}{(f_8^3f_{12} + f_{12}^3 + f_{18}^2)}$.

Invarianti di S_4 Per quanto detto sulle classi di coniugio di S_4, la serie di Hilbert di $\mathbb{R}[u,v,w]^{S_4}$ è

$$\frac{1}{24}\left(\frac{1}{\det(I_3 - tI_3)} + 3\frac{1}{\det(I_3 - t\varphi(R))} + 6\frac{1}{\det(I_3 - t\varphi(E))} + 6\frac{1}{\det(I_3 - t\varphi(RE))} + 8\frac{1}{\det(I_3 - t\varphi(S))}\right) =$$

$$= \quad \frac{1}{24}\left(\frac{1}{1-3t+3t^2-t^3} + 3\frac{1}{1+t-t^2-t^3} + 6\frac{1}{1-t+t^2-t^3} + 6\frac{1}{1+t-t^2-t^3} + 8\frac{1}{1-t^3}\right) \quad = \quad (*);$$

una volta ridotto al minimo comune denominatore, moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per $(1+t^3)(1-t^9)$, ottenendo

$$(*) \quad = \quad \frac{1-t^{18}}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^9)}.$$

Questo fa sospettare che $\mathbb{R}[u,v,w]^{R_{24}}$ abbia 4 generatori, di rispettivi gradi $2, 4, 6, 9$, legati da un'unica relazione algebrica avente grado 18. Tali generatori sono

$$f_2 = u^2 + v^2 + w^2, \qquad f_4 = u^4 + v^4 + w^4, \qquad f_6 = u^2v^2w^2,$$
$$f_9 = u^5v^3w - u^3v^5w - u^5vw^3 + uv^5w^3 + u^3vw^5 - uv^3w^5.$$

Essi sono legati dall'unica relazione

$$f_2^6f_6 - 4f_2^4f_4f_6 + 5f_2^2f_4^2f_6 - 20f_2^3f_6^2 - 2f_4^3f_6 + 36f_2f_4f_6^2 + 108f_6^3 + 4f_9^2 = 0,$$

che ha grado 18. Abbiamo trovato f_2 e f_6 grazie ad osservazioni di tipo geometrico (corrispondono rispettivamente alla sfera e ai tre piani $u = 0$, $v = 0$, $z = 0$), mentre abbiamo trovato f_4 e f_9 con M2 usando il teorema di Emmy Noether.

Teorema 6. $\mathbb{R}[u,v,w]^{S_4} = \dfrac{\mathbb{R}[f_2, f_4, f_6, f_9]}{(f_2^6f_6 - 4f_2^4f_4f_6 + 5f_2^2f_4^2f_6 - 20f_2^3f_6^2 - 2f_4^3f_6 + 36f_2f_4f_6^2 + 108f_6^3 + 4f_9^2)}$.

3 Gruppo icosaedrale

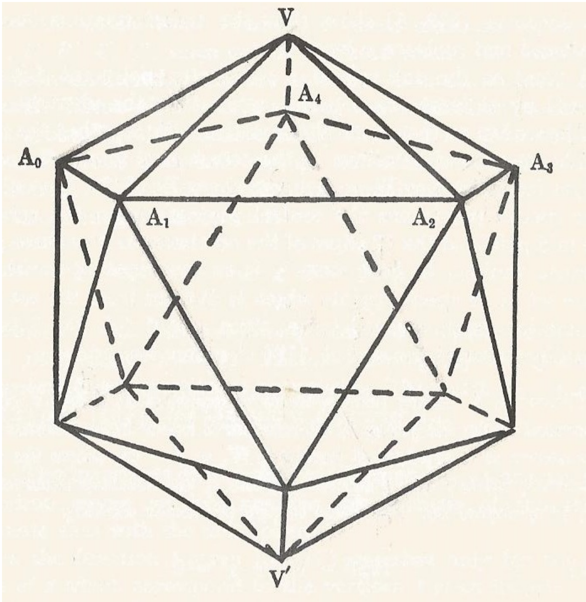

Figura 3: icosaedro.

Consideriamo un icosaedro regolare inscritto in una sfera di centro O e raggio unitario (figura 3). Il gruppo icosaedrale, visto come sottoinsieme di $SO(3)$, è Alt(5), ha 60 elementi ed è generato dalla rotazione σ di $\frac{2\pi}{5}$ attorno all'asse OV in senso antiorario visto da V e dalla rotazione τ di π attorno all'asse congiungente O con il punto medio di A_0V. Scegliamo un riferimento $(O, (\xi, \eta, \zeta))$ cartesiano ortogonale dove ζ è la retta orientata che va da O verso V e ξ è tale che l'asse di rotazione di τ giaccia sul secondo e quarto quadrante del piano $\xi\zeta$. Detto $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, una delle due matrici corrispondenti a σ vista come rotazione di S^2 è $S = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$, ed una delle due matrici corrispondenti a τ vista come rotazione di S^2 è $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varepsilon - \varepsilon^4 & \varepsilon^3 - \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 - \varepsilon^2 & -(\varepsilon - \varepsilon^4) \end{pmatrix}$. Il gruppo icosaedrale, visto come sottoinsieme di $SU(2)$, è $H_{120} = \varphi^{-1}(\mathrm{Alt}(5))$, ha 120 elementi ed è generato da S e da T. Risulta

$$\sigma = \varphi(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{pmatrix}, \qquad \tau = \varphi(T) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Invarianti di H_{120} Le classi di coniugio di Alt(5) sono 5, di rispettive cardinalità $1, 12, 12, 15, 20$ e di rispettivi rappresentanti $\varphi(I_2) = I_3, \varphi(S), \varphi(S^2), \varphi(T), \varphi(ST)$. Dunque la serie di Hilbert di $\mathbb{C}[u,v]^{H_{120}}$ è

$$= \frac{1}{120}\left(\frac{1}{1-2t+t^2} + \frac{1}{1+2t+t^2} + 12\frac{1}{1-r_0t+t^2} + 12\frac{1}{1+r_0t+t^2} + 12\frac{1}{1+r_1t+t^2} + \right.$$
$$\left. +12\frac{1}{1-r_1t+t^2} + 15\frac{1}{1+t^2} + 15\frac{1}{1+t^2} + 20\frac{1}{1-t+t^2} + 20\frac{1}{1+t+t^2}\right) = (*),$$

dove $r_0 = 2\mathrm{Re}(\varepsilon)$ e $r_1 = 1 + r_0$; una volta ridotto al minimo comune denominatore, moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per $\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq 1,20}}^{21} t^{2j} + \sum_{\substack{j=5 \\ j\neq 6,15}}^{16} t^{2j}$, ottenendo

$$(*) = \frac{1-t^{60}}{(1-t^{12})(1-t^{20})(1-t^{30})}.$$

Questo fa sospettare che $\mathbb{C}[u,v]^{H_{120}}$ abbia 3 generatori, di rispettivi gradi $12, 20, 30$, legati da un'unica relazione algebrica avente grado 60.
L'immagine di A_0 tramite π è un numero reale negativo n e l'immagine del punto A_0' diametralmente opposto ad A_0 è $m = -\dfrac{1}{n}$. Il polinomio di $\mathbb{C}[u,v]$ che si annulla nei 12 vertici $\infty, 0, n, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^4 n$, $m, \varepsilon m, \ldots, \varepsilon^4 m$ dell'icosaedro è il polinomio di $\mathbb{C}[u,v]_{12}$

$$f_{12} = f_{12}(u,v) = vu(u-\varepsilon nv)\cdots(u-\varepsilon^4 nv)(u-\varepsilon mv)\cdots(u-\varepsilon^4 nv) = u^{11}v + 11u^6v^6 - uv^{11},$$

che si verifica essere un invariante di H_{120}. Il determinante della matrice Hessiana di $f_{12}(u,v)$ è $121 f_{20}(u,v)$ e il determinante della matrice Jacobiana di $(f_{12}, f_{20})(u,v)$ è $20 f_{30}(u,v)$, dove

$$f_{20} = f_{20}(u,v) = -u^{20} - v^{20} + 228(u^{15}v^5 - u^5v^{15}) - 494u^{10}v^{10}$$

e

$$f_{30} = f_{30}(u,v) = u^{30} + v^{30} + 522(u^{25}v^5 - u^5v^{25}) - 10005(u^{20}v^{10} + u^{10}v^{20})$$

sono invarianti assoluti di H_{120}, come si verifica con M2.
Abbiamo dunque provato che f_{12}, f_{20}, f_{30} sono invarianti di H_{120}. Essi hanno gradi rispettivamente $12, 20, 30$ e sono legati dall'unica relazione

$$1728 f_{12}^5 - f_{20}^3 - f_{30}^2 = 0,$$

che ha grado 60 e che, moltiplicando gli invarianti per opportune costanti, diventa $f_{12}^5 + f_{20}^3 + f_{30}^2 = 0$.

Teorema 7. $\mathbb{C}[u,v]^{H_{120}} = \dfrac{\mathbb{C}[f_{12}, f_{20}, f_{30}]}{(f_{12}^5 + f_{20}^3 + f_{30}^2)}$.

Invarianti di Alt(5) Per quanto detto sulle classi di coniugio di Alt(5), la serie di Hilbert di $\mathbb{R}[u,v,w]^{\mathrm{Alt}(5)}$ è

$$\frac{1}{60}\left(\frac{1}{\det(I_3 - tI_3)} + 12\frac{1}{\det(I_3 - t\varphi(S))} + 12\frac{1}{\det(I_3 - t\varphi(S^2))} + \right.$$

$$\left. +15\frac{1}{\det(I_3 - t\varphi(T))} + 20\frac{1}{\det(I_3 - t\varphi(ST))}\right) \quad =$$

$$\frac{1}{60}\left(\frac{1}{1-3t+3t^3-t^3} + 12\frac{1}{1+r_0t-r_0t^2-t^3} + 12\frac{1}{1-r_1t+r_1t^2-t^3} + 15\frac{1}{1+t-t^2-t^3} + 20\frac{1}{1-t^3}\right) \quad = \quad (*);$$

una volta ridotto al minimo comune denominatore, moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per $1 - t + t^2 + t^5 - t^6 + t^7 - t^{15} + t^{16} - t^{17} - t^{20} + t^{21} - t^{22}$, ottenendo

$$(*) \quad = \quad \frac{1 - t^{30}}{(1-t^2)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{15})}.$$

Questo fa sospettare che $\mathbb{R}[u,v,w]^{\mathrm{Alt}(5)}$ abbia 4 generatori, di rispettivi gradi $2, 6, 10, 15$, legati da un'unica relazione avente grado 30. Abbiamo trovato questi invarianti usando il teorema di Emmy Noether ed abbiamo trovato la relazione, ma non li riportiamo in queste pagine vista la loro eccessiva lunghezza.

Bibliografia

[CLO] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer, New York, 2007

[STUR] B. Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory*, Springer, New York, 1998

[AR] M. Artin, *Algebra*, Bollati Boringhieri, Torino, 1997

[DICKSON] L. E. Dickson, *Algebraic Theories*, Dover, New York, 1959

[KLEIN] F. Klein, *Lectures on the icosahedron and the solutions of equations of the fifth degree*, Dover, New York, 1956

[PV] V. L. Popov, E. B. Vinberg, *Invariant Theory*, Springer, Berlino, 1994