Una sperimentazione didattica: dall'introduzione alla geometria alle misure astronomiche

Candidata: Margherita Scarpelli   Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani
Supervisore della sperimentazione didattica: Stefania Bianchin

Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini"
Università degli Studi di Firenze
Anno Accademico 2010/2011

11 Novembre 2011

Informazioni generali

- Classe **III BL** del **Liceo Socio-Psico-Pedagogico dell'Istituto d'Istruzione Superiore "Galileo Galilei"** di Firenze.
- Prof.ssa Stefania Bianchin.
- 15 alunni.
- 12 lezioni tra Gennaio e Maggio 2011.
- 2 test di verifica.

Le misure indirette

Il lavoro di tirocinio è stato finalizzato alla spiegazione e/o svolgimento delle esperienze seguenti:

- Misura indiretta dell'**altezza di un edificio**.
- Misura indiretta della **lunghezza del meridiano e del raggio terrestre**: *esperienza di Eratostene*.
- Misura indiretta dell'**altezza della piramide di Cheope**:*esperienza di Talete*.

Prerequisiti

Per affrontare le esperienze “pratiche” elencate abbiamo bisogno dei seguenti prerequisiti:

- **elementi di geometria sintetica:** rette parallele tagliate da una trasversale, circonferenza e cerchio, teorema di Talete, similitudine fra triangoli;
- **elementi di astronomia:** sistema solare, rotazione terrestre, meridiani e paralleli.

Obiettivi della sperimentazione

Gli obiettivi del lavoro di tirocinio si possono riassumere nei seguenti quattro punti:

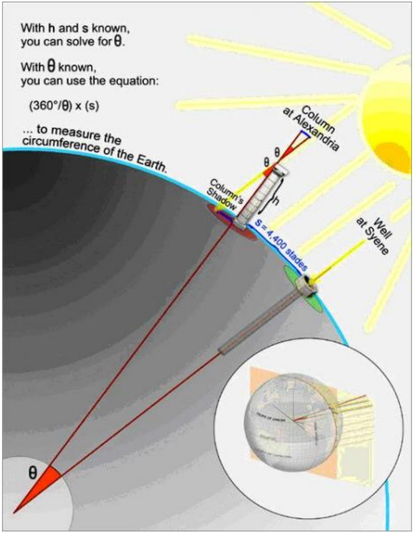
- consolidamento delle conoscenze geometriche;
- suscitare interesse e favorire l'apprendimento della geometria tramite le "esperienze pratiche";
- capire il ruolo della contestualizzazione storica;
- testare vari metodi di insegnamento.

Misura dell'altezza della scuola

Misura dell'altezza della scuola

Misura dell'altezza della scuola

Esperienza di Eratostene



Esperienza di Talete

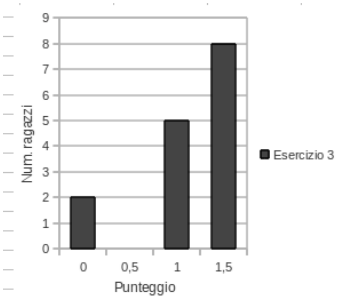
Primo test di valutazione: 28 Marzo 2011

Nel compito erano presenti i seguenti tipi di esercizi:

1. esercizio sull'applicazione del teorema di Talete;
2. esercizio sulla nomenclatura degli angoli formati da due rette parallele tagliate da una trasversale;
3. esercizio sulla similitudine di due triangoli, con proporzioni da impostare;
4. esercizio sul cerchio: misura dell'area e della circonferenza;
5. esercizio finale più elaborato sulla similitudine dei triangoli.

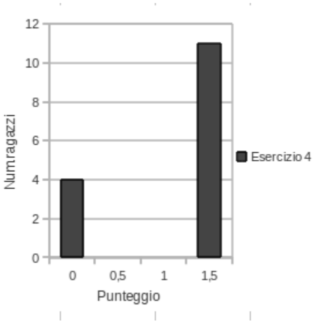
Esercizio3

Esercizio sulla similitudine di due triangoli, con proporzioni da impostare.

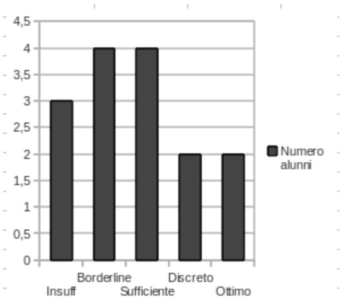


Esercizio4

Esercizio sul cerchio: misura dell'area e della circonferenza;



Valutazione



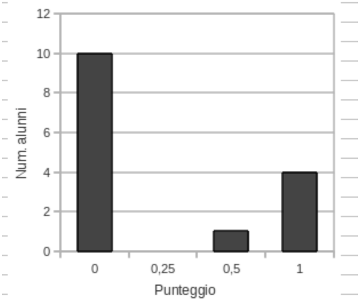
Test di fine sperimentazione: 11 Maggio 2011

Gli esercizi erano strutturati nel seguente modo:

1. esercizio su cerchio e circonferenza;
2. esercizio su angoli complementari, supplementari, acuti e ottusi;
3. esercizio sul teorema di Talete;
4. esercizio sulle proporzioni;
5. esercizio sugli angoli formati da rette parallele tagliate da una trasversale;
6. esercizio sulla similitudine;
7. esercizio sperimentale che riproduceva l'esperienza di Eratostene di misura del raggio e del meridiano terrestre.

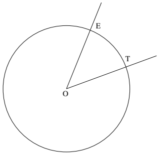
Esercizio 4

Per imbottigliare una certa quantità di vino occorrono 150 bottiglie da 750 *ml*. Quante bottiglie occorrerebbero per imbottigliare la stessa quantità di vino in bottiglie da 1*l*?



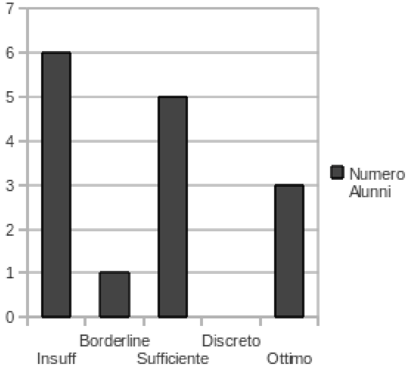
Esercizio 7

Dopo un viaggio nello spazio ti trovi sul pianeta TerzaBL della Galassia del Galilei.
Una stella molto simile al Sole illuminerà questo pianeta.
Tu vuoi essere un Eratostene di TerzaBL e puoi diventarlo svolgendo questo esercizio!
Osserva il seguente disegno:

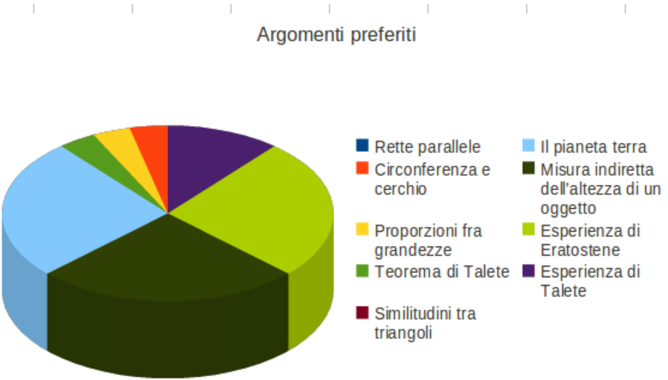


Il punto E corrisponde a una città chiamata Erastotilandia.
Il punto T corrisponde a una città chiamata Taletecity. Sai che, proprio in questo momento, il sole a Erastotilandia è allo Zenit (nessuna ombra) e a Taletecity un palo e la sua ombra hanno la stessa lunghezza.
Inoltre la distanza tra le due città (l'arco ET) è di 314 km.
Calcola la lunghezza del meridiano e il raggio di TerzaBL.

Valutazione finale



Nel seguente diagramma a torta riportiamo gli argomenti che maggiormente hanno interessato i ragazzi seguiti dalle motivazioni. Ogni ragazzo poteva esprimere più di una preferenza:

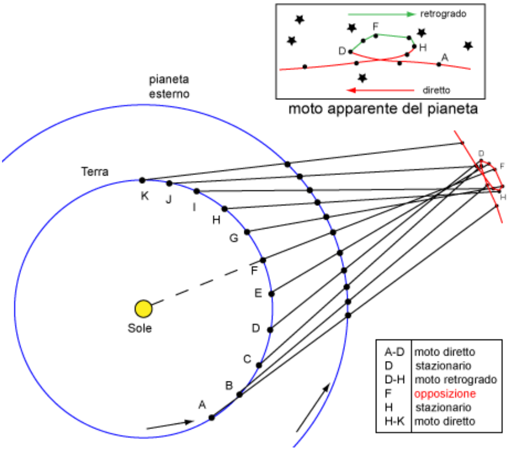


Considerazioni finali

Il lavoro svolto ha portato ai seguenti punti di riflessione:

- avanzamento nelle conoscenze geometriche dei ragazzi;
- progressi nel lavoro individuale;
- soddisfazione nell'applicare la geometria alle misure indirette;
- successo della "contestualizzazione storica".

Cos'è il moto retrogrado?



Ipotesi di lavoro

Lo scopo di questo modello è quello di dare una descrizione quantitativa del moto retrogrado dei pianeti esterni; di capire, cioè, ogni quanto avviene e per quanto tempo ogni pianeta è “retrogrado”. Faremo una descrizione della situazione per Marte, Giove, Saturno e Urano.
Le ipotesi del modello sono le seguenti:

- tutti i pianeti del Sistema Solare hanno orbite circolari;
- tutte le orbite giacciono sul piano dell’eclittica;
- i pianeti si muovono di moto circolare uniforme.

Studio di $\theta(t)$ e della sua derivata

$$\theta(t) = arctg\Big(\frac{R_E sin(\lambda_E(t)) - R_T sin(\lambda_T(t))}{R_E cos(\lambda_E(t)) - R_T cos(\lambda_T(t))}\Big) \tag{1}$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T - R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t - \lambda_{E0} + \lambda_{T0})(\omega_E + \omega_T)}{R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t - \lambda_{E0} + \lambda_{T0})} \tag{2}$$

con la condizione $R_E cos(\lambda_E(t)) - R_T cos(\lambda_T(t)) \neq 0$

In (2) ho sostituito le espressioni di $\lambda_T(t)$ e $\lambda_E(t)$.

Zeri della derivata

Possiamo manualmente trovare gli zeri della derivata che sono dati dalla seguente espressione:

$$t_{sol} = \frac{\pm arccos\left(\frac{R_E^2\omega_E+R_T^2\omega_T}{R_E R_T(\omega_E+\omega_T)}\right) - \lambda_{T0} + \lambda_{E0} + 2k\pi}{\omega_T - \omega_E} \tag{3}$$

con $k \in Z$ e $R_E cos(\omega_E t_{sol} + \lambda_{E0}) - R_T cos(\omega_T t_{sol} + \lambda_{T0}) \neq 0$.
La derivata è periodica di $\frac{2\pi}{\omega_T - \omega_E}$ (**periodo sinodico**).

Segno della derivata

La derivata sarà positiva per $t_{sol1} \leq t \leq t_{sol2}$ dove:

$$t_{sol1} = \frac{arccos\left(\frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T}{R_E R_T(\omega_E + \omega_T)}\right) - \lambda_{T0} + \lambda_{E0} + 2k\pi}{\omega_T - \omega_E}$$

$$t_{sol2} = \frac{-arccos\left(\frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T}{R_E R_T(\omega_E + \omega_T)}\right) - \lambda_{T0} + \lambda_{E0} + 2(k+1)\pi}{\omega_T - \omega_E}$$

Parametri

Per studiare quantitativamente la derivata abbiamo bisogno di conoscere i vari parametri che sono presenti in essa. Ve ne sono sei:

- R_E, il raggio dell'orbita circolare del pianeta E;
- R_T, il raggio dell'orbita circolare della Terra T;
- ω_E, la velocità angolare del pianeta E;
- ω_T, la velocità angolare della Terra T;
- λ_{E0}, l'angolo indicante la posizione iniziale di E, cioè la longitudine eclittica di E al tempo 0;
- λ_{T0}, l'angolo indicante la posizione iniziale di T, cioè la longitudine eclittica di T al tempo 0.

Valori dei parametri

PIANETA	*Periodo in anni tropici*	*Velocità angolare*	*Semiasse maggiore dell'orbita in UA*	*Longitudine eclittica lo 0 Gennaio 1980 in gradi*	*Longitudine eclittica il 20 Dicembre 2011 in gradi*	*Longitudine eclittica il 20 Dicembre 2011 in gradi [0,360]*	*Longitudine eclittica il 20 Dicembre 2011 in rad*
MERCURIO	0,24085	0,071425332	0,3870986	231,2973	48017,90264	137,9026432	2,406855172
VENERE	0,61521	0,027962470	0,7233316	355,73352	19063,82327	343,8232730	6,000848158
TERRA	1,00004	0,017202103	1	98,83354	11607,77708	87,77707918	1,531999039
MARTE	1,88089	0,009146091	1,5236883	126,30783	6245,434359	125,4343589	2,189242558
GIOVE	11,86224	0,001450214	5,202561	146,966365	1117,221890	37,22188984	0,649644531
SATURNO	29,45771	0,000583983	9,554747	165,322242	556,0316317	196,0316317	3,421397412
URANO	84,01247	0,000204765	19,21814	228,070855	365,0672306	5,067230620	0,088439858

Programmi di octave per il calcolo delle soluzioni

```
function [sol1, sol2, durata, sinodico]=retro1(ue,pe,le)
rt=149.6*(10^6);
re=rt*ue;
wt=(2*pi)./(365.2422*1.00004);
we=(2*pi)./(365.2422*pe);
lt=1.531999039;
sol1=(-acos(((re.^2).*we +(rt.^2).*wt)./(re.*rt.*(we+wt)))+lt-le)./(wt-we);
sol2=(acos(((re.^2).*we +(rt.^2).*wt)./(re.*rt.*(we+wt)))+lt-le)./(wt-we);
durata=sol2-sol1;
sinodico=(2*pi)./(wt-we);
endfunction
```

Analisi quantitativa del moto retrogrado

Pianeta	*Sinodico in giorni*	*Inizio moto retrogrado*	*Fine moto retrogrado*	*Giorno congiunzione*	*Giorno opposizione*	*Durata moto retrogrado*
Marte	780 giorni	45 giorni	118 giorni	472 giorni	82 giorni	73 giorni
Giove	399 giorni	-116 giorni	4 giorni	143 giorni	-56 giorni	120 giorni
Saturno	378 giorni	45 giorni	182 giorni	303 giorni	114 giorni	137 giorni
Urano	370 giorni	209 giorni	361 giorni	521 giorni	285 giorni	152 giorni

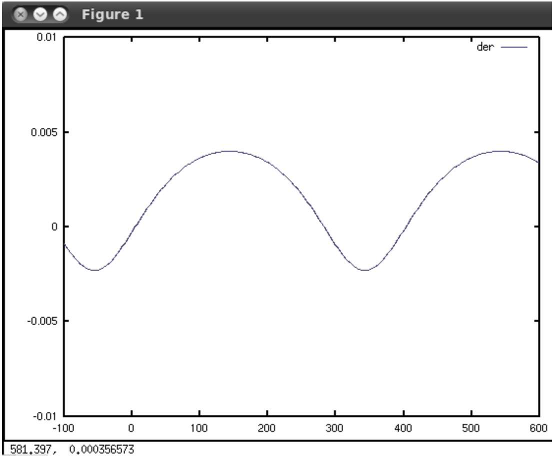
Programmi di octave per la rappresentazione delle soluzioni: il caso di Giove

```
function der=der(x)
rt=149.6*(10^6);
re=rt*5.202561;
wt=(2*pi)./(365.2422*1.00004);
we=(2*pi)./(365.2422*11.86224);
lt=1.531999039;
le=0.649644531;
num=(re.^2)*we+(rt.^2).*wt-re.*rt.*(we+wt).*cos((wt-we).*x+lt-le);
den=(re.^2)+(rt.^2)-2.*re.*rt.*cos((wt-we).*x+lt-le);
der=num./den;
endfunction
```

Per disegnare la funzione basterà usare il seguente comando:

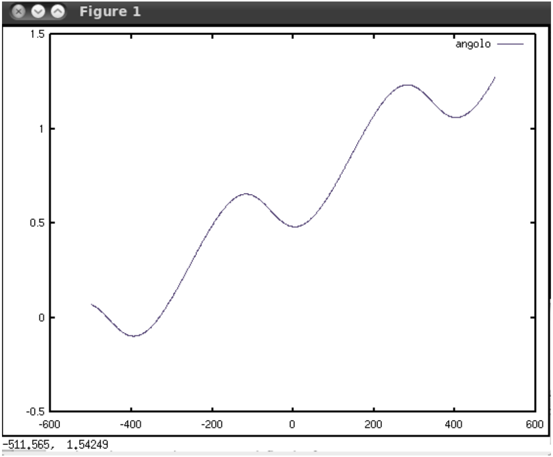
fplot('der',[-100 600])

Il grafico che otteniamo è il seguente:



Analisi qualitativa: caso Giove

Analisi del grafico della funzione $\theta(t)$:



Grazie per l'attenzione!!