Una sperimentazione didattica: dalla geometria alle misure astronomiche

Candidata: Margherita Scarpelli   Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani
Supervisore della sperimentazione: Prof.ssa Stefania Bianchin

Corso di laurea magistrale in Matematica
Università degli Studi di Firenze
Anno Accademico 2010/2011

20 Dicembre 2011

Informazioni generali

- Classe **III BL** del **Liceo Socio-Psico-Pedagogico dell'Istituto d'Istruzione Superiore "Galileo Galilei"** di Firenze.
- Prof.ssa Stefania Bianchin.
- 15 alunni.
- 12 lezioni tra Gennaio e Maggio 2011.
- 2 test di verifica.

Le misure indirette

Il lavoro di tirocinio è stato finalizzato alla spiegazione e/o svolgimento delle esperienze seguenti.

- Misura indiretta dell'**altezza di un edificio**.
- Misura indiretta della **lunghezza del meridiano e del raggio terrestre**: *esperienza di Eratostene*.
- Misura indiretta dell'**altezza della piramide di Cheope**:*esperienza di Talete*.

Prerequisiti

Per affrontare le esperienze “pratiche” elencate abbiamo bisogno dei seguenti prerequisiti:

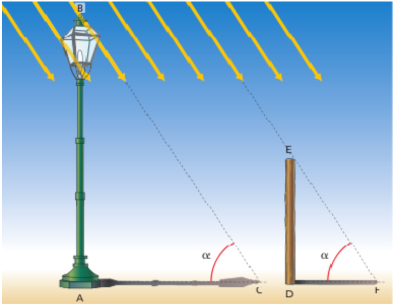
- **elementi di geometria sintetica:** rette parallele tagliate da una trasversale, circonferenza e cerchio, teorema di Talete, similitudine fra triangoli;
- **elementi di astronomia:** sistema solare, rotazione terrestre, meridiani e paralleli.

Obiettivi della sperimentazione

Gli obiettivi del lavoro di tirocinio si possono riassumere nei seguenti quattro punti:

- consolidamento delle conoscenze geometriche;
- suscitare interesse e favorire l'apprendimento della geometria tramite le "esperienze pratiche";
- capire il ruolo della contestualizzazione storica;
- testare vari metodi di insegnamento.

Misura indiretta dell'altezza di un oggetto

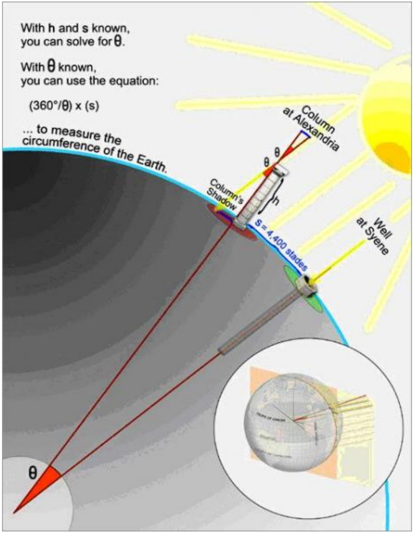


Misura dell'altezza della scuola

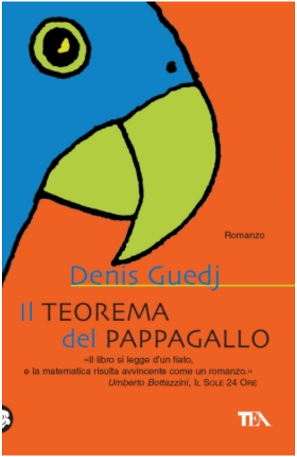
Misura dell'altezza della scuola

Misura dell'altezza della scuola

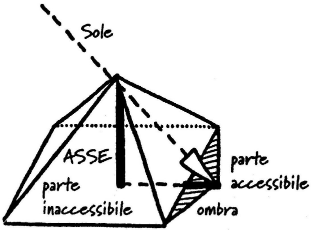
Esperienza di Eratostene

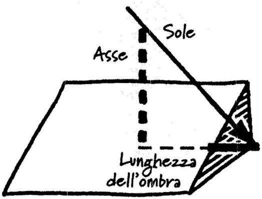


Esperienza di Talete

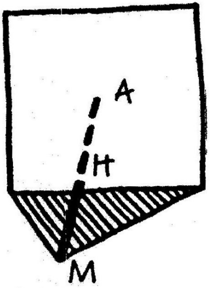


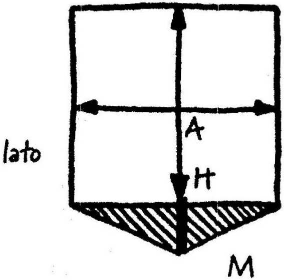
Misura indiretta della Piramide di Cheope



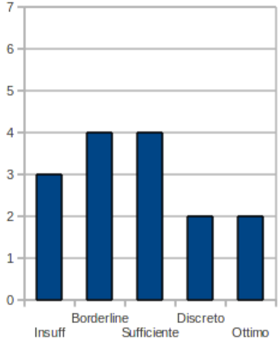


Misura indiretta della Piramide di Cheope

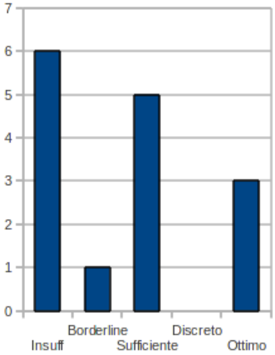




Tests di verifica



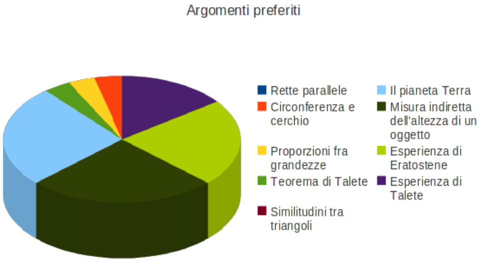
(e) Test di metà sperimentazione



(f) Test finale

Cosa ne pensano i ragazzi?

Nel seguente diagramma a torta riportiamo gli argomenti che maggiormente hanno interessato i ragazzi. Ogni ragazzo poteva esprimere più di una preferenza:



Qualche commento...

"Ho capito più dal vero che la geometria può essere usata anche per problemi reali; utilizzare la geometria in pratica mi ha dato un nuovo punto di vista verso la geometria."

"È stata un'esperienza carina, ma difficile. Seguire le lezioni di argomenti fondamentalmente complicati è stato faticoso, ma vedere che certi argomenti potevano essere utili ci ha spronato a stare più attenti!"

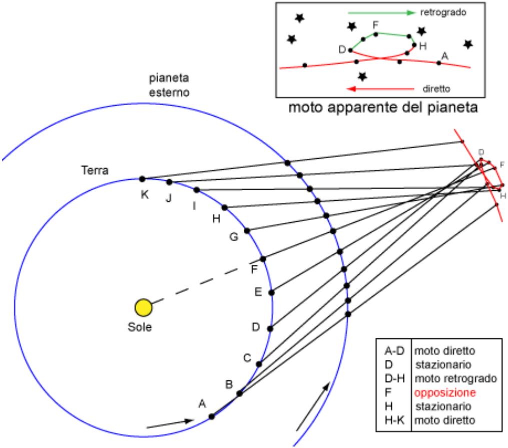
"L'idea di mettere in atto (misurare ombre degli oggetti) i teoremi della geometria a mio parere può aiutare molto l'apprendimento."

Considerazioni finali

Il lavoro svolto ha portato ai seguenti punti di riflessione:

- avanzamento nelle conoscenze geometriche dei ragazzi;
- progressi nel lavoro individuale;
- soddisfazione nell'applicare la geometria alle misure indirette;
- successo della "contestualizzazione storica";
- gradimento nel variare le metodologie.

Cos'è il moto retrogrado?



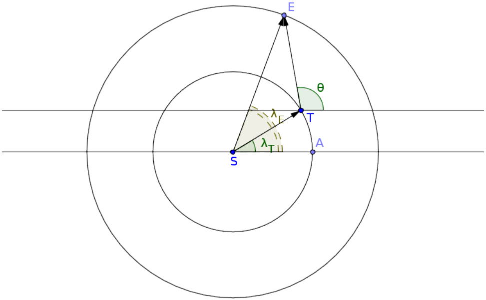
A-D	moto diretto
D	stazionario
D-H	moto retrogrado
F	opposizione
H	stazionario
H-K	moto diretto

Ipotesi di lavoro

Lo scopo di questo modello è quello di dare una descrizione quantitativa del moto retrogrado dei pianeti esterni e interni alla Terra.
Le ipotesi del modello sono le seguenti:

- tutti i pianeti del Sistema Solare hanno orbite circolari;
- tutte le orbite giacciono sul piano dell'eclittica;
- i pianeti si muovono di moto circolare uniforme.

Descrizione della situazione



$$\lambda_T(t) = \omega_T t + \lambda_{T0}$$

$$\lambda_E(t) = \omega_E t + \lambda_{E0}$$

$$\theta(t) = arctg\left(\frac{R_E sin(\lambda_E(t)) - R_T sin(\lambda_T(t))}{R_E cos(\lambda_E(t)) - R_T cos(\lambda_T(t))}\right) \quad (1)$$

Studio della derivata di $\theta(t)$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T - R_E R_T(\omega_E + \omega_T)cos((\omega_T - \omega_E)t - \lambda_{E0} + \lambda_{T0})}{R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t - \lambda_{E0} + \lambda_{T0})} \tag{2}$$

con la condizione $R_E cos(\lambda_E(t)) - R_T cos(\lambda_T(t)) \neq 0$

Proposizione

La funzione $\frac{d\theta(t)}{dt}$ è periodica di $\frac{2\pi}{|\omega_T - \omega_E|}$. Se E è un pianeta esterno, per le leggi di Keplero vale che $\omega_T > \omega_E$, quindi il periodo vale $\frac{2\pi}{\omega_T - \omega_E}$ ed è il ***periodo sinodico*** *di E.*

Zeri della derivata

Possiamo trovare gli zeri della derivata che sono dati dalla seguente espressione:

$$t_{sol} = \frac{\pm arccos\left(\frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T}{R_E R_T(\omega_E+\omega_T)}\right) - \lambda_{T0} + \lambda_{E0} + 2k\pi}{\omega_T - \omega_E} \tag{3}$$

con $k \in \mathbb{Z}$ e $R_E cos(\omega_E t_{sol} + \lambda_{E0}) - R_T cos(\omega_T t_{sol} + \lambda_{T0}) \neq 0$.

Quando avviene il moto retrogrado?

Possiamo trovare la seguente nuova espressione

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{\omega_T + \omega_E}{2} + \frac{R_E^2(2\omega_E - 1) + R_T^2(2\omega_T - 1)}{2(R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}))} \tag{4}$$

La derivata seconda si annullerà quando

$$sin((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}) = 0 \tag{5}$$

$$(\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0} = k\pi \;\; e \;\; k \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

Che equivale a

$$\lambda_T(t) = \lambda_E(t) + k\pi \;\; e \;\; k \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

Quando avviene il moto retrogrado?

Proposizione

1. *Per ogni pianeta esterno l'intervallo di durata del moto retrogrado ha per centro l'**opposizione** e durata pari a*

$$\frac{2\arccos\left(\frac{R_E^2\omega_E+R_T^2\omega_T}{R_E R_T(\omega_E+\omega_T)}\right)}{\omega_T-\omega_E}$$

2. *Per ogni pianeta interno l'intervallo di durata del moto retrogrado ha per centro la **congiunzione inferiore** e durata pari a*

$$\frac{2\arccos\left(\frac{R_I^2\omega_I+R_T^2\omega_T}{R_I R_T(\omega_I+\omega_T)}\right)}{\omega_I-\omega_T}$$

Altre proprietà

Integrando la (4) abbiamo una nuova espressione per $\theta(t)$

$$\theta(t) = \frac{(\omega_T + \omega_E)t}{2} + C + \frac{R_E^2(2\omega_E - 1) + R_T^2(2\omega_T - 1)}{(\omega_T - \omega_E)(R_E^2 - R_T^2)} arctg\left(\frac{(R_E + R_T)^2}{R_E^2 - R_T^2} tan\left(\frac{(\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}}{2}\right)\right) \tag{8}$$

Proposizione

La funzione $\theta(t)$ è somma di una funzione lineare e di una periodica di periodo sinodico.

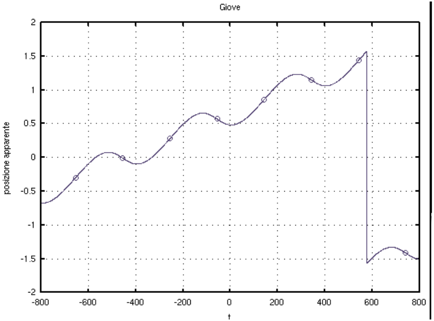
Valori dei parametri

PIANETA	*Periodo in anni tropici*	*Velocità angolare*	*Semiasse maggiore dell'orbita in UA*	*Longitudine eclittica lo 0 Gennaio 1980 in gradi*	*Longitudine eclittica il 20 Dicembre 2011 in gradi*	*Longitudine eclittica il 20 Dicembre 2011 in gradi [0,360]*	*Longitudine eclittica il 20 Dicembre 2011 in rad*
VENERE	0,61521	0,027962470	0,7233316	355,73352	19063,82327	343,8232730	6,000848158
TERRA	1,00004	0,017202103	1	98,83354	11607,77708	87,77707918	1,531999039
MARTE	1,88089	0,009146091	1,5236883	126,30783	6245,434359	125,4343589	2,189242558
GIOVE	11,86224	0,001450214	5,202561	146,966365	1117,221890	37,22188984	0,649644531
SATURNO	29,45771	0,000583983	9,554747	165,322242	556,0316317	196,0316317	3,421397412

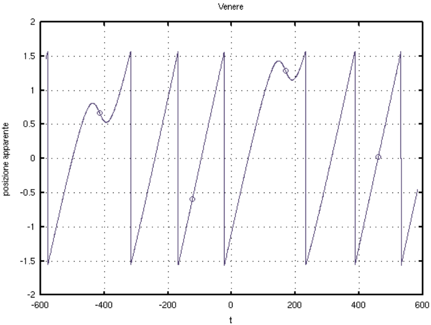
Risultati

Pianeta	*Periodo sinodico*	*Inizio moto retrogrado*	*Fine moto retrogrado*	*Giorno congiunzione inferiore/ congiunzione*	*Giorno congiunzione superiore/ opposizione*	*Durata moto retrogrado*
Venere	584 giorni	148 giorni	190 giorni	169 giorni	461 giorni	42 giorni
Marte	780 giorni	45 giorni	118 giorni	472 giorni	82 giorni	73 giorni
Giove	399 giorni	-116 giorni	4 giorni	143 giorni	-56 giorni	120 giorni
Saturno	378 giorni	45 giorni	182 giorni	303 giorni	114 giorni	137 giorni

Esempi di descrizione qualitativa del moto retrogrado: Giove



Esempi di descrizione qualitativa del moto retrogrado: Venere



Bibliografia

-Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, *Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement*, Bull. APMEP 430-2000

-D. Guedj, *Il Teorema del Pappagallo*, Tea, Milano- 2003

-G. Ottaviani, *Riflessioni sull'insegnamento della geometria oggi*, Atti Matematica, formazione scientifica e nuove tecnologie, Montevarchi-1998

-D. Joyce, *Web version of Euclid's Elements with comments*, http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/elements.html

-L. Cateni, R. Fortini, *Geometria per l'Istituto Magistrale*, Felice Le Monnier, Firenze-1986

-B. D'Amore, *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna-1999

-L. Russo, *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, Milano-1996

-A. Celletti, E. Perozzi, *Meccanica celeste, Il valzer dei pianeti*, Cuen, Napoli-1996

-J. Herrmann, *Atlante di astronomia*, Oscar Studio Mondadori, Milano-1975

-P. Duffett- Smith, *Astronomia pratica con l'uso del calcolatore tascabile*, Sansoni, Firenze-1983