

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE  
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Matematica

Anno accademico 2007/2008

Relazione finale  
di Francesca Pampaloni

**Cenni storici sulle equazioni di 3° e 4° grado  
e la loro geometria**

Relatore: Giorgio Ottaviani

## Introduzione

Nella prima parte di questo lavoro abbiamo approfondito la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado dal punto di vista storico. La scoperta delle formule risolutive, avvenuta in Italia nel tardo Rinascimento, è infatti ricca di colpi di scena e dà luogo a una lettura appassionante.

In una seconda parte interpretiamo il discriminante dell'equazione di 3° grado come hessiano: questo punto di vista permette di discutere le equazioni di 3° grado a livello geometrico.

Accenniamo infine a questa discussione anche nel caso delle equazioni di 2° grado e ciò può dare degli spunti didattici interessanti.

## 1 La formula risolutiva di Tartaglia

Consideriamo un'equazione di 3° grado, del tipo

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

(l'equazione generale

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

può essere sempre ridotta a questa forma tramite la sostituzione  $x = y - \frac{b}{3a}$ ; infatti, sostituendo, si ottiene:

$$y^3 + \underbrace{\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)}_p y + \underbrace{\left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right)}_q = 0.$$

Esiste una formula risolutiva che ci permette di calcolarne le soluzioni:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

Dietro questa formula si cela una storia piuttosto singolare i cui principali protagonisti sono Tartaglia (1506 – 1557 ca.) e Cardano (1501 – 1576). Questo metodo di risoluzione, infatti, fu scoperto più volte, a causa del fatto che nel XVI secolo, quando si giungeva a una scoperta, si preferiva non diffonderla e tenerla segreta, per poi utilizzarla in occasione di qualche sfida. Così il primo a scoprirla fu Scipione Dal Ferro (1465 – 1526), che però non pubblicò i suoi risultati; successivamente anche Tartaglia giunse a tale scoperta, ma anch'egli preferì non rivelarla, almeno per il momento. In quanto a Cardano, dopo *lunghe preghiere*, egli riuscì a farsi rivelare da Tartaglia tale formula, a patto di non diffonderla. In seguito, però, quando venne a sapere della soluzione di Dal Ferro, Cardano si sentì libero dal giuramento fatto e nel 1545 pubblicò tale formula nell'*Ars Magna*, dando inizio a una lunga discussione fra lui e Tartaglia e allo stesso tempo, però, rendendo noto a tutti il metodo di risoluzione delle equazioni di 3° grado.

Questi sono i celebri versi con cui Tartaglia comunicò la regola di risoluzione a Cardano ([Ma1] pag.24-25):

Quando che 'l cubo con le cose appresso  
se agguaglia a qualche numero discreto  
trovan dui altri differenti in esso.

Da poi terrai questo per consueto  
che il lor prodotto sempre sia eguale  
al terzo cubo delle cose neto.

El residuo poi suo generale  
delli lor lati cubi ben sottratti  
varrà la tua cosa principale.

...

Questi trovai, et non con passi tardi  
nel mille cinquecente, quattro e trenta  
con fondamenti ben saldi e gagliardi  
nella città dal mare intorno centa.

$$\begin{aligned}x^3 + px &= \\ &= -q \\ u - v &= -q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}uv &= \\ &= \left(\frac{p}{3}\right)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} &= \\ &= x\end{aligned}$$

Venezia

In altre parole per risolvere l'equazione (1) si cercano due numeri  $u$  e  $v$  tali che

$$\begin{cases} u - v = -q \\ uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3. \end{cases}$$

Tale sistema dà come soluzione:

$$\begin{cases} u = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} \\ v = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}. \end{cases}$$

**Osservazioni 1.1.** Il segno della radice quadrata è ininfluente sulla soluzione finale.

Se infatti faccio passare sotto radice il segno  $-$  ottengo:

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm D} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp D},$$

con  $D = \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$ , e quindi che si scelga un segno o un altro si scambiano soltanto i 2 addendi e il risultato rimane inalterato.

Restringendosi quindi al caso  $+$ ,

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

è la soluzione cercata e infatti, sviluppando, si ottiene

$$x^3 = (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 = \underbrace{u - v}_{-q} - 3 \underbrace{\sqrt[3]{uv}}_{\frac{p}{3}} \underbrace{(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})}_x = -q - px,$$

ossia  $x^3 + px + q = 0$ , che è l'equazione da cui eravamo partiti.

Vale dunque il seguente teorema:

**Teorema 1.1.**

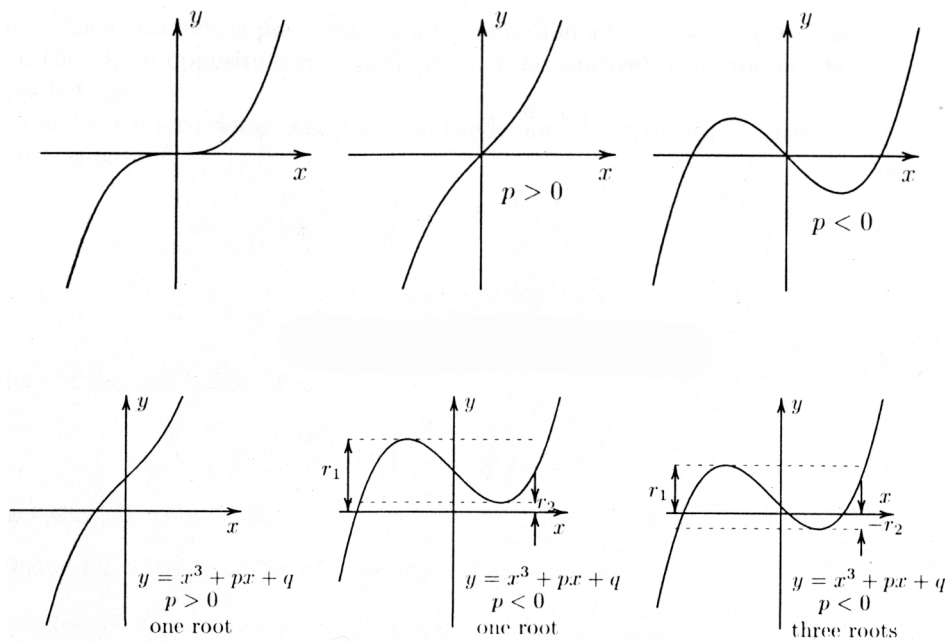
$$\text{Se } \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ allora } x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

è soluzione dell'equazione iniziale.

**Osservazioni 1.2.** Non in tutti i casi, però, questa formula mi è di grande aiuto: talvolta mi restituisce la soluzione in una forma troppo complicata, altre volte mi restituisce valori apparentemente complessi quando invece le soluzioni dell'equazione sono tutte reali.

**ESEMPI:**

- $x^3 + 3x - 4 = 0$  dà come soluzione  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}}$ , che però è solo una forma complicata per esprimere la soluzione  $x = 1$ ;
- se considero l'equazione  $(x+3)(x-2)(x-1) = x^3 - 7x + 6 = 0$  la soluzione che ottengo in risposta è  $x = \sqrt[3]{-3 + \frac{10i}{3\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{3 + \frac{10i}{3\sqrt{3}}}$ , da cui è difficile verificare che rappresenta almeno una delle soluzioni conosciute (-3, 2, 1).



Se analizziamo il grafico della funzione  $y = x^3 + px + q$  al variare di  $p$  e  $q$  possiamo fare le seguenti osservazioni.

**Lemma 1.2.** L'equazione  $x^3 + px + q = 0$  ha 2 soluzioni reali coincidenti  $\iff \Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$ .

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Supponiamo di avere 2 soluzioni reali coincidenti: dunque l'equazione ha una radice multipla. Se questa radice è  $a$ , allora la terza radice è  $-2a$ , dato che la somma delle tre radici (che equivale al coefficiente del termine di secondo grado) qui è 0. In particolare  $a \neq 0$ , altrimenti siamo nel caso in cui le 3 soluzioni coincidono e sono tutte uguali a 0.

Dunque  $x^3 + px + q = (x - a)^2(x + 2a) = x^3 - \underbrace{3a^2}_p x + \underbrace{2a^3}_q$  e quindi

$$\Delta = -27\frac{a^6}{27} + 4\frac{a^6}{4} = 0.$$

( $\Leftarrow$ ) Viceversa, se  $\Delta = 0$ , allora  $(\frac{p}{3})^3 = -(\frac{q}{2})^2$ , da cui  $p \leq 0$ . Ponendo  $a := \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ , otteniamo  $q = 2a^3$  e  $p = 3\sqrt[3]{-(\frac{q}{2})^2} = -3a^2$ , e dunque  $x^3 + px + q = x^3 - 3a^2x + 2a^3 = (x - a)^2(x + 2a) = 0$  che ha una radice multipla in  $a$ .  $\square$

Consideriamo ora l'equazione generale  $x^3 + px + q = 0$  nel caso in cui  $p < 0$  e  $\Delta \neq 0$  (quando  $p > 0$  la funzione è crescente, l'equazione ha una sola radice reale e in questo caso  $\Delta > 0$ ). Dai grafici possiamo vedere che esistono 2 valori ( $r_1$  e  $r_2$ ) tali che  $x^3 + px + q = r_i$  con  $i \in \{1, 2\}$  abbia una radice multipla. Se  $r_1$  e  $r_2$  hanno lo stesso segno ( $r_1 r_2 > 0$ ), allora l'equazione  $x^3 + px + q = 0$  ha una sola radice reale, se invece hanno segno opposto l'equazione ha 3 radici reali.

In accordo con il lemma 1.2, l'equazione  $x^3 + px + q = r_i$  ha 2 soluzioni coincidenti  $\Leftrightarrow (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q-r_i}{2})^2 = 0$  e dunque  $q - r_i = \pm\sqrt{-4(\frac{p}{3})^3}$ , da cui  $r_i = q \pm \sqrt{-4(\frac{p}{3})^3}$ . Quindi  $r_1 r_2 = q^2 - (-4(\frac{p}{3})^3) = 4((\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2) = 4\Delta$ . Dunque vale il seguente teorema:

**Teorema 1.3.** *L'equazione  $x^3 + px + q = 0$  ha*

- 1 sola radice reale se  $\Delta > 0$ ;
- 3 radici reali se  $\Delta \leq 0$ , distinte se  $\Delta < 0$ ;
- 2 radici reali coincidenti se  $\Delta = 0$ .

**Osservazioni 1.3.** Se l'equazione  $x^3 + px + q = 0$  ha una sola radice reale o 2 radici reali coincidenti, allora la soluzione data dalla formula risolutiva è ben definita come differenza di 2 radici cubiche di numeri reali ( $\Delta \geq 0$ ). Se l'equazione ha 3 radici reali distinte, invece, dalla formula ottengo una differenza di radici cubiche di numeri complessi ( $\Delta < 0$ ).

In ogni caso comunque la formula risolutiva, come differenza di 2 radici cubiche, mi restituisce 9 valori (le possibili combinazioni delle 3 soluzioni della prima radice con le 3 soluzioni della seconda) di cui però solo 3 soddisfano l'equazione iniziale. Per determinare questi ultimi si sfrutta il fatto che  $u$  e  $v$  non sono indipendenti in questo modo:

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} \\ \frac{p}{3} = \sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{v} = \frac{p}{3\sqrt[3]{u}} \\ x = \sqrt[3]{u} - \frac{p}{3\sqrt[3]{u}} \end{cases}$$

## 2 La formula di Ferrari per le equazioni di 4° grado

Le equazioni di 4° grado si trovano per la prima volta risolte nell'*Ars Magna* di Cardano e questa risoluzione, dovuta a Ludovico Ferrari (1522-1565), rappresenta uno dei grandi risultati di quest'importante opera matematica.

Questa è l'osservazione che Cardano fa prima di introdurre questo nuovo argomento ([Ma2] pag.303):

*La sesta cosa da notare [è] che non appena l'uomo sarà giunto a conoscere i*

*Capitoli sino a quelli relativi al cubo, [...], allora ne ha quanto basta per ogni caso algebrico, poiché sino al cubo si trova gradazione in natura: infatti vi sono linee, superfici e corpi: e le linee corrispondono alle incognite lineari; le superfici ai quadrati; i corpi ai cubi. Se pertanto avremo fornito su queste notizie sufficienti, sarà noto ciò che è necessario; in verità ciò che aggiungeremo al di là [di questi gradi], è per diletto [...] e non per compimento di ciò che può trarsi da [tale] studio. Tali Capitoli successivi non esistono veramente in sé ma solo per accidente, se anche ve ne siano [formule] generali.*

Da queste parole si vede bene che le equazioni di 4° grado non vengono considerate una naturale e autentica estensione di quelle di terzo, bensì qualcosa di accidentale, un'acrobazia intellettuale al di fuori però della realtà e dell'uso consentito e utile dell'algebra.

E questo nonostante che numerosi problemi portassero a tali equazioni.

Tutto ciò ben mostra la mentalità geometrica del tempo.

D'altra parte, affrontando le equazioni di 4° grado, la geometria non può pienamente spiegare tutti i vari passaggi algebrici e fu enorme lo sforzo di Cardano nel tentativo di geometrizzare, quanto più possibile, alcuni di essi, nonostante il ragionamento di Ferrari fosse fuori da una piena corrispondenza geometrica. Qui di seguito sono mostrati i passaggi che portarono Ferrari alla scoperta di una formula generale per la risoluzione di equazioni di 4° grado.

- Prima di tutto, considerando l'equazione generica

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad (2)$$

trasportiamo gli ultimi 3 termini a destra e completiamo il quadrato dei primi 2:

$$(x^2 + \frac{1}{2}bx)^2 = (\frac{1}{4}b^2 - c)x^2 - dx - e.$$

- Ricaviamo ora da questa un'equazione in cui anche il 2° membro è un quadrato perfetto, aggiungendo  $(x^2 + \frac{1}{2}bx)y + \frac{1}{4}y^2$  ad ogni membro:

$$(x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y)^2 = \underbrace{(\frac{1}{4}b^2 - c + y)}_r x^2 + \underbrace{(\frac{1}{2}by - d)}_s x + \underbrace{\frac{1}{4}y^2 - e}_t$$

$$q := rx^2 + sx + t = (mx + n)^2$$

e imponendo:

$$\begin{cases} m^2 = r \\ 2mn = s \\ n^2 = t \end{cases} \Rightarrow s^2 = 4rt.$$

E' da notare che vale anche che se  $s^2 = 4rt$  allora  $q$  è il quadrato di una funzione lineare di  $x$ :

$$\begin{aligned} r = 0 &\Rightarrow s = 0 \Rightarrow q = t, \text{ cost. e dunque è un quadrato} \\ r \neq 0 &\Rightarrow q = (\sqrt{r}x + \frac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{r}})^2. \end{aligned}$$

- Applichiamo ora questo risultato ( $s^2 = 4rt$ ) al 2° membro dell'equazione ottenuta al passo precedente:

$$s^2 = \left(\frac{1}{2}by - d\right)^2 = \frac{1}{4}b^2y^2 + d^2 - bdy$$

$$4rt = 4\left(\frac{1}{4}b^2 - c + y\right)\left(\frac{1}{4}y^2 - e\right) = \frac{1}{4}b^2y^2 - cy^2 + y^3 - b^2e + 4ce - 4ye$$

da cui, imponendo  $s^2 = 4rt$ , si ottiene la seguente equazione di 3° grado in  $y$ , detta **cubica risolvente**:

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y + 4ce - b^2e - d^2 = 0.$$

In questo modo da un'equazione di 4° grado ci siamo ricondotti a una di 3°. Siano ora  $y_1, y_2, y_3$  le soluzioni di questa equazione cubica. Se  $y_1$  è radice di tale equazione, allora dovranno valere le seguenti relazioni:

$$x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y_1 = \pm(mx + n) \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 + \left(\frac{1}{2}b - m\right)x + \frac{1}{2}y_1 - n = 0 \\ \text{oppure} \\ x^2 + \left(\frac{1}{2}b + m\right)x + \frac{1}{2}y_1 + n = 0. \end{array}$$

Siano  $x_1$  e  $x_2$  le radici della prima di queste equazioni quadratiche e  $x_3$  e  $x_4$  le radici della seconda. Allora  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  sono le radici dell'equazione iniziale (2).

Per quanto riportato sopra devono valere anche queste relazioni:

$$\begin{cases} x_1x_2 = \frac{1}{2}y_1 - n \\ x_3x_4 = \frac{1}{2}y_1 + n \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 + x_3x_4 = y_1.$$

Se invece di  $y_1$  consideriamo un'altra delle radici della cubica risolvente ( $y_2$  o  $y_3$ ), otteniamo 2 equazioni quadratiche diverse dalle precedenti che ci permettono di trovare altre 2 relazioni fra le  $x_i$  e le  $y_j$  (per  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  e  $j \in \{1, 2, 3\}$ ). Questo è il sistema che lega le radici della cubica risolvente a quelle dell'equazione iniziale:

$$\begin{cases} y_1 = x_1x_2 + x_3x_4 \\ y_2 = x_1x_3 + x_2x_4 \\ y_3 = x_1x_4 + x_2x_3. \end{cases}$$

Quanto ai discriminanti dell'equazione quartica iniziale e della cubica risolvente questi coincidono. Infatti entrambi sono definiti come prodotti dei quadrati delle differenze delle radici dell'equazione e per le relazioni sopra scritte otteniamo:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) \\ y_1 - y_3 = (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) \\ y_2 - y_3 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) \end{cases}$$

e dunque:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= (y_1 - y_2)^2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2 \\ &= (x_1 - x_4)^2(x_2 - x_3)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2 = \Delta_4. \end{aligned}$$

### 3 Approccio trigonometrico

Per estrarre tutte le possibili radici di un numero di grado  $n \geq 3$  conviene ricorrere alla trigonometria e, in particolare, ci è molto utile la formula di De Moivre:

$$\sqrt[n]{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

con  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Nel caso  $n = 3$  con questa, infatti, possiamo calcolarci facilmente le radici cubiche dell'unità ( $1, \omega_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i}, \omega_2 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$ ) e poi, dato un numero qualsiasi  $N$  di cui vogliamo calcolarci tutte le radici cubiche, allora i 3 valori che risolvono il nostro problema sono:  $\sqrt[3]{N}, \omega_1 \sqrt[3]{N}$  e  $\omega_2 \sqrt[3]{N}$ .

La trigonometria comunque può essere usata per la risoluzione di equazioni cubiche anche senza tale formula sfruttando quest'identità:

$$\sin(3\theta) = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \quad \Rightarrow \quad \sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin(3\theta).$$

**Teorema 3.1.** *Data l'equazione  $x^3 + px + q = 0$ , se  $p = -\frac{3}{4}$  allora  $x = \sin\left(\frac{1}{3} \arcsin(4q)\right)$  è soluzione dell'equazione. In generale, applicando la sostituzione  $x = \sqrt{-\frac{4p}{3}}y$  ci si riconduce al caso precedente ottenendo la soluzione*

$$x = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \sin \left( \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{9q}{4p^2} \sqrt{-\frac{4p}{3}}\right) \right).$$

*Dimostrazione.* Se  $p = -\frac{3}{4}$  l'equazione è  $x^3 - \frac{3}{4}x + q = 0$ .

Ponendo  $x = \sin\left(\frac{1}{3} \arcsin(4q)\right)$  nell'equazione si ottiene:

$$\underbrace{\sin^3\left(\frac{1}{3} \arcsin(4q)\right)}_{\theta} - \frac{3}{4} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{3} \arcsin(4q)\right)}_{\theta} + q = 0.$$

$-\frac{1}{4} \sin(3\theta)$

Infatti  $\theta = \left(\frac{1}{3} \arcsin(4q)\right) \Rightarrow q = \frac{1}{4} \sin(3\theta)$ .

In generale, applicando la sostituzione  $x = ay$  e dividendo per  $a^3$  si ottiene:

$y^3 + \frac{p}{a^2}y + \frac{q}{a^3} = 0$ . Ponendo ora  $\frac{p}{a^2} = -\frac{3}{4}$  ( $\Leftrightarrow a = \sqrt{-\frac{4p}{3}}$ ), per quanto detto

nel caso precedente si trova la soluzione  $y = \sin\left(\frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{4q}{\sqrt{(-\frac{4p}{3})^3}}\right)\right)$ , da cui:

$$x = ay = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \sin \left( \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{9q}{4p^2} \sqrt{-\frac{4p}{3}}\right) \right).$$

□

**Osservazioni 3.1.** Affinché la formula appena esposta possa essere ben definita dovranno valere tali relazioni:

- $p < 0$  (affinché  $\sqrt{-\frac{4p}{3}}$  sia un numero reale);
- $\left| \frac{9q}{4p^2} \sqrt{-\frac{4p}{3}} \right| \leq 1$  (come argomento della funzione arcsin)  $\Rightarrow -\frac{81q^2}{16p^4} \frac{4p}{3} \leq 1 \Rightarrow 27q^2 \leq -4p^3 \Rightarrow \Delta \leq 0$ .



Vediamo inoltre che tale formula è applicabile esattamente nei casi dove l'altra ci restituisce valori apparentemente complessi, più difficili da interpretare, ossia quando  $\Delta < 0$ . Questa proprietà risultò essere fondamentale per i matematici del XVI-XVII secolo, fra cui Viète (1540-1603) a cui dobbiamo la formula trigonometrica appena esposta, generalmente restii ad accettare gli stravaganti numeri proposti da Bombelli (1526-1573), i numeri immaginari: essa permetteva infatti di risolvere il cosiddetto **caso irriducibile**, ossia il caso in cui  $\Delta < 0$ , senza dover ricorrere ad essi.

**Teorema 3.2.** *Se sono rispettate le relazioni dell'osservazione, allora la formula definita nel teorema 3.1 dà come risultato le 3 soluzioni reali dell'equazione.*

Infatti, ponendo  $\arcsin\left(\frac{9q}{4p^2}\sqrt{-\frac{4p}{3}}\right) = \alpha$ , le 3 soluzioni sono date da:

$$x = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \sin\left(\frac{1}{3}(\alpha + 2k\pi)\right) \quad \text{per } k = 0, 1, 2.$$

## 4 Il discriminante come Hessiano

Consideriamo una generica forma cubica binaria (un polinomio omogeneo di grado 3 in 2 variabili)

$$f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

e calcoliamoci il suo hessiano:

$$\begin{aligned} H_f &= \begin{vmatrix} 6ax + 6by & 6bx + 6cy \\ 6bx + 6cy & 6cx + 6dy \end{vmatrix} = 36((ax + by)(cx + dy) - (bx + cy)^2) \\ &= 36\left(\underbrace{(ac - b^2)}_r x^2 + \underbrace{(ad - bc)}_{2s} xy + \underbrace{(bd - c^2)}_t y^2\right) = 36h \end{aligned}$$

$$h := rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

Applicando ad  $f$  una qualunque trasformazione lineare di determinante  $\Delta$  si ottiene:

$$F = A\xi^3 + 3B\xi^2\eta + 3C\xi\eta^2 + D\eta^3$$

$$\text{con } H_F = 36\left(\underbrace{(AC - B^2)}_R \xi^2 + \underbrace{(AD - BC)}_{2S} \xi\eta + \underbrace{(BD - C^2)}_T \eta^2\right) = 36h(R, S, T, \xi, \eta).$$

Ma l'hessiano di  $f$  è un covariante di indice 2 su  $f$ , cioè  $h(R, S, T, \xi, \eta) = \Delta^2 h(r, s, t, x, y)$ , e quindi

$$H_F = 36h(R, S, T, \xi, \eta) = 36\Delta^2 h(r, s, t, x, y) = 36\underbrace{(\Delta^2 r x^2 + 2\Delta^2 s xy + \Delta^2 t y^2)}_{\text{forma quadratica binaria}}$$

e, poiché il discriminante di una forma quadratica binaria è un invariante di indice 2,

$$RT - S^2 = \Delta^2 (\Delta^2 r \Delta^2 t - (\Delta^2 s)^2) = \Delta^6 (rt - s^2)$$

e dunque  $rt - s^2$  è un invariante di indice 6 su  $f$  e

$$-4(rt - s^2) = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2)$$

è il **discriminante** di  $f$ . Se infatti consideriamo una generica equazione cubica  $ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 + 3\frac{b}{3}x^2 + 3\frac{c}{3}x + d = 0$  e la riduciamo alla forma  $x^3 + px + q = 0$ , come visto in precedenza abbiamo:

$$\begin{cases} p &= \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \\ q &= \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}. \end{cases}$$

Se consideriamo ora la rispettiva forma cubica binaria e ci calcoliamo il discriminante otteniamo:

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{1}{4 \cdot 27a}(-b^2c^2 + 4ac^3 + 27a^2d^2 + 4b^3d - 18abcd).$$

Applicando ora la sostituzione

$$\begin{cases} b &\rightarrow \frac{b}{3} \\ c &\rightarrow \frac{c}{3} \end{cases}$$

e svolgendo qualche calcolo si ottiene:

$$(ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2)$$

che quindi prova che questa è un'altra forma per esprimere il discriminante di  $f$ . Dal legame fra l'hessiano e il discriminante di  $f$  appena trovato si deduce che:

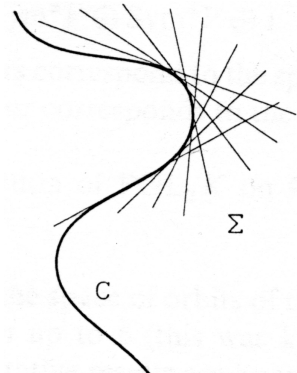
**Teorema 4.1.** *L'invariante  $rt - s^2 = 0 \iff f(\frac{x}{y}, 1) = 0$  ha una radice multipla, ossia  $f(x, y)$  è divisibile dal quadrato di una funzione lineare in  $x$  e  $y$ .*

Riguardo all'applicazione di questi risultati per la risoluzione di equazioni cubiche è importante il seguente teorema:

**Teorema 4.2.** *Ogni forma cubica binaria  $f$  può essere trasformata in*

- $X^3 + Y^3$  se il suo discriminante è diverso da 0 e dove  $X$  e  $Y$  sono i fattori dell'hessiano  $H$  di  $f$ ;
- $X^2Y$  se  $H = X^2$  a meno di scalari e il suo discriminante è 0;
- $X^3$  se  $H = 0$ .

*Dimostrazione.* Dato  $V$  spazio vettoriale di dimensione 2 definito sul campo  $K$ , allora il gruppo  $GL_2K$  delle trasformazioni lineari agisce sull'insieme  $Sym^3V$  dei polinomi omogenei di terzo grado definiti su  $V^*$ .



Dato che anche il centro di  $GL_2K$  agisce su  $Sym^3V$  per moltiplicazione di uno scalare, allora il gruppo quoziente  $PGL_2K = \frac{GL_2K}{Z(GL_2K)}$  agisce sullo spazio proiettivo  $\mathbb{P}(Sym^3V) \simeq \mathbb{P}^3$ .

Quest'azione conserva il sottoinsieme  $C \subset \mathbb{P}^3$  dei cubi, la cubica gobba. Inoltre ci sono esattamente 3 orbite: l'insieme  $C$  dei cubi, il luogo  $\Sigma$  dei prodotti di quadrati per fattori lineari del tipo  $v^2 \cdot w$ , con  $v$  e  $w$  linearmente indipendenti, e infine l'insieme  $\Phi$  di prodotti di fattori linearmente indipendenti a 2 a 2.

Dunque

- se  $f$  ha una soluzione tripla ci si riconduce al caso  $X^3$  e  $H_f = 0$ ;
- se  $f$  ha una soluzione doppia e una distinta siamo nel caso  $X^2Y$ :  $H_f = -4X^2$ , il discriminante di  $H_f$  è 0 e questa è proprio l'equazione di  $\Sigma$ ;
- se  $f$  ha 3 soluzioni distinte ci si riduce alla forma  $X^3 + Y^3$ :  $H_f = 36XY$  con discriminante  $\neq 0$ .

□

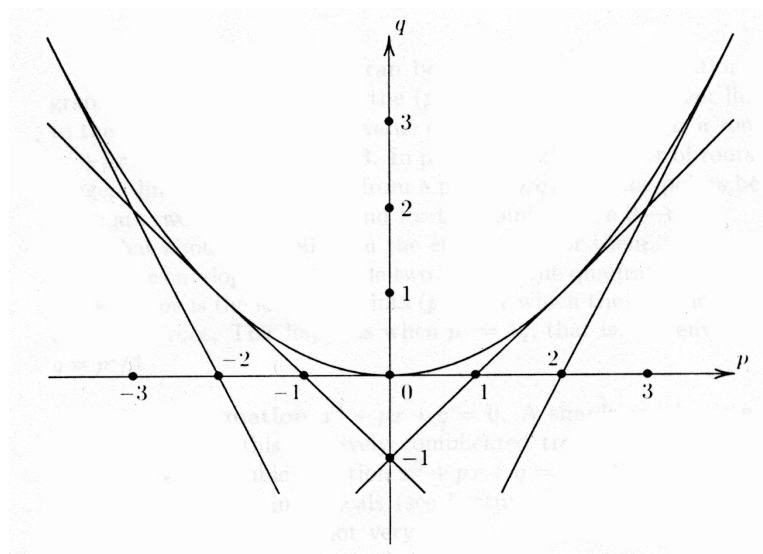
Dunque, per risolvere un'equazione cubica  $c(z) = 0$  priva di radici multiple, si riduce la forma cubica  $f(x, y) = y^3c(\frac{x}{y})$  alla forma  $A\xi^3 + D\eta^3$ , dove  $\xi$  ed  $\eta$  sono i fattori dell'hessiano di  $f$ .

## 5 La soluzione geometrica delle equazioni di 2° e 3° grado

L'equazione

$$x^2 + px + q = 0$$

è un'equazione quadratica nella variabile  $x$  i cui coefficienti sono i parametri  $p$  e  $q$ . Questo però è un punto di vista: infatti posso anche vederla come un'equazione lineare nelle variabili  $p$  e  $q$  con coefficienti dipendenti dal parametro  $x$ . Un'equazione lineare del tipo  $q = -xp - x^2$  descrive una qualsiasi retta non verticale (e quindi una famiglia di rette) nel piano  $(p, q)$  la cui pendenza dipende dal parametro  $x$ . Per ogni  $x$  si ha una retta diversa, ad ogni retta non verticale nel piano  $(p, q)$  corrisponde uno specifico  $x$ .



Come si vede dal grafico, questa famiglia di rette determina una curva involuppo, cioè tangente in ogni suo punto una delle rette. Per determinare l'espressione di tale curva basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + px + q = 0 \\ 2x + p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2x \\ q = x^2 \end{cases}$$

da cui, eliminando la  $x$ , si ricava l'espressione cartesiana  $q = \frac{p^2}{4}$  che ci dice che la curva è una parabola. Questa curva può essere usata per risolvere l'equazione  $x^2 + px + q = 0$  graficamente. Prima di tutto dimostriamo che, data una qualsiasi retta nel piano  $(p, q)$ , il punto in cui questa è tangente alla parabola corrisponde a un'equazione con radice doppia.

L'espressione  $(x-x_1)(x-t) = x^2 - \underbrace{(x_1+t)}_p x + \underbrace{tx_1}_q = 0$  al variare del parametro  $t$ ,

quindi di  $p$  e  $q$ , mi dà tutte le equazioni di grado 2 che hanno almeno una radice uguale a  $x_1$ :

$$\begin{cases} p = -x_1 - t \\ q = tx_1 \end{cases} \Rightarrow q = -x_1 p - x_1^2.$$

Se adesso poniamo  $t = x_1$ , cioè consideriamo l'equazione che ha  $x_1$  come radice doppia, dal sistema otteniamo:

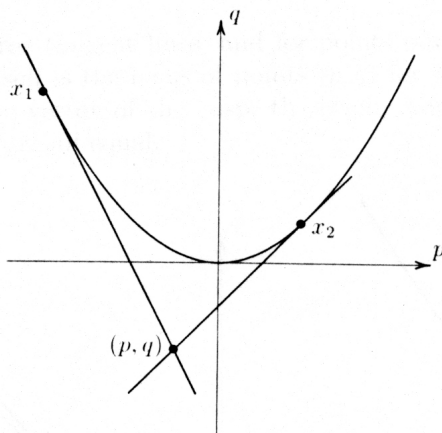
$$\begin{cases} p = -2x_1 \\ q = x_1^2 \end{cases}$$

che è anche un punto della parabola: dunque tale punto è in comune fra la retta e l'involuppo ed è quindi il punto di tangenza; inoltre, poiché il valore  $x_1$  è generico, tutti i punti che rappresentano equazioni con radice doppia si trovano sulla curva involuppo.

Consideriamo ora una generica equazione  $x^2 + \bar{p}x + \bar{q} = 0$ . A questa è associato il punto  $(\bar{p}, \bar{q})$  nel piano  $(p, q)$ . Se adesso da questo punto tracciamo, se possibile, le tangenti alla curva, queste corrispondono a determinati valori di  $x$ . Tali valori sono le soluzioni reali dell'equazione considerata.

Possiamo fare quindi la seguente osservazione:

**Osservazioni 5.1.** Il numero di radici reali distinte dell'equazione  $x^2 + \bar{p}x + \bar{q} = 0$  corrisponde al numero di rette nel piano  $(p, q)$  passanti per il punto  $(\bar{p}, \bar{q})$  e tangenti la curva involuppo.



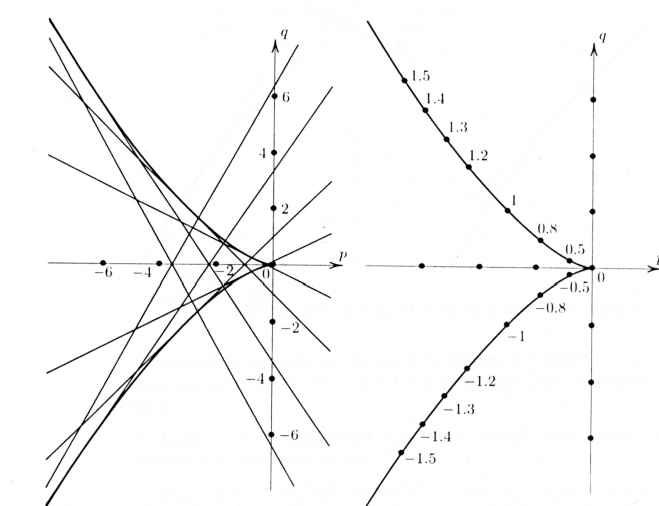
Sempre dal grafico nel piano  $(p, q)$  possiamo notare che:

- per i punti che si trovano al di sotto della parabola esistono 2 rette tangenti;
- per i punti che si trovano al di sopra della parabola non esiste alcuna retta tangente alla parabola;
- per i punti che appartengono alla parabola stessa esiste un'unica tangente. In tal caso le 2 radici dell'equazione associata coincidono.

Una semplice equazione quadratica, probabilmente, non necessita di questo relativamente complicato trattamento, ma consideriamo ora la più interessante equazione cubica  $x^3 + px + q = 0$ .

Sebbene quest'equazione possa esser risolta anche esplicitamente con radicali, come si è visto prima, le formule per risolverla non sono molto semplici e, in alcune situazioni, troppo complicate.

Proviamo invece a trattare anche queste equazioni come una famiglia di rette nel piano  $(p, q)$ .



Dal grafico si vede l'andamento di tali rette e la curva involuppo che determinano, una cubica cuspidata. Per determinare l'espressione di tale curva procediamo analogamente a prima:

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ 3x^2 + p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -3x^2 \\ q = 2x^3 \end{cases}$$

da cui  $(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 = 0$ , ossia  $\Delta = 0$ , dove  $\Delta$  è il discriminante introdotto nel §1. Come prima, mostriamo che, data una qualsiasi retta nel piano  $(p, q)$ , il punto in cui questa è tangente alla curva corrisponde a un'equazione con radice multipla. Consideriamo la retta  $x_1^3 + px_1 + q = 0$ , dove  $x_1$  è generico. Al variare dei parametri  $p$  e  $q$ , essa rappresenta tutte le equazioni del tipo  $x^3 + px + q = 0$  con almeno una radice uguale a  $x_1$ . Calcoliamoci ora l'intersezione con la curva:

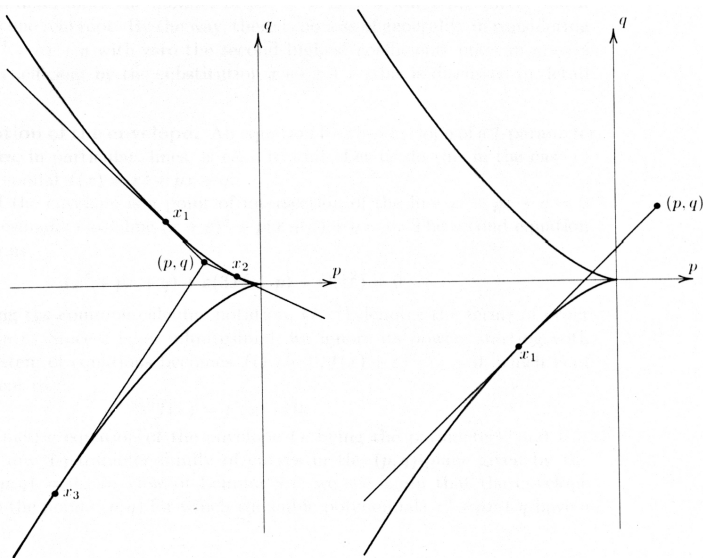
$$\begin{cases} x_1^3 + px_1 + q = 0 \\ 4p^3 + 27q^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4p^3 + 27(p^2x_1^2 + x_1^6 + 2px_1^4) = 0.$$

Se ora proviamo a dividere questo polinomio per  $(p + 3x_1^2)$  otteniamo:

$$4p^3 + 27(p^2x_1^2 + x_1^6 + 2px_1^4) = (p + 3x_1^2)^2(4p + 3x_1^2)$$

e dunque per  $p = -3x_1^2$  ( $q = 2x_1^3$ ) la retta ha un doppio punto in comune con la cubica cuspidata, il punto di tangenza. Tale punto corrisponde all'equazione per cui  $x_1$  è radice doppia: se infatti andiamo a sostituire  $p$  e  $q$  nell'espressione della retta generica si ottiene:  $x^3 + (-3x_1^2)x + 2x_1^3 = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2(x + 2x_1) = 0$ . Quindi i punti di tangenza fra le rette e la curva corrispondono a equazioni con radici multiple.

Se consideriamo ora una qualsiasi equazione cubica  $x^3 + \bar{p}x + \bar{q} = 0$  a questa è associato il punto  $(\bar{p}, \bar{q})$  nel piano  $(p, q)$ . Se adesso da questo punto tracciamo le tangenti alla curva queste corrispondono a determinati valori di  $x$ . Tali valori sono le soluzioni reali dell'equazione considerata.



Analogamente a prima anche qui dal grafico possiamo notare che:

- per i punti che si trovano a sinistra della curva involuppo esistono 3 rette tangenti la curva e dunque l'equazione associata ha 3 radici reali distinte. Siamo infatti nel caso in cui  $-\sqrt{-\frac{4p^3}{27}} < q < \sqrt{-\frac{4p^3}{27}}$  e dunque  $\Delta < 0$ ;
- per i punti che si trovano a destra della curva involuppo esiste una sola retta tangente e in questo caso l'equazione associata ha una sola radice reale. Per questi punti vale infatti la relazione  $q > \sqrt{-\frac{4p^3}{27}}$ , da cui  $\Delta > 0$ ;
- per i punti che appartengono alla curva stessa esistono 2 rette tangenti. Siamo infatti nel caso in cui l'equazione associata ha una radice multipla e  $\Delta = 0$ ;
  - per il punto di cuspidale della curva, infine, le 3 radici coincidono e sono tutte uguali a 0.

## Riferimenti bibliografici

- [Bo] U. Bottazzini, *La grande arte: l'algebra del Rinascimento*, in *Storia della Scienza*, UTET, Torino, 1988.
- [Di] L. Dickson, *Algebraic Theories*, Dover, first edition 1926.
- [FT] D. Fuchs, S. Tabachnikov, *Mathematical Omnibus*, AMS, 2007.
- [Ha] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1992.
- [Ma1] S. Maracchia, *Da Cardano a Galois*, Feltrinelli, 1979.
- [Ma2] S. Maracchia, *Storia dell'algebra*, Liguori, Napoli, 2005.