Università degli Studi di Firenze
Facoltà di Scienze Matematiche,Fisiche e Naturali

Anno Accademico 2011-2012
Relazione finale per la Laurea Triennale in Matematica

IL CRITERIO DI SYLVESTER SULLE RADICI REALI DEI POLINOMI

Relatore:

Prof.Giorgio Ottaviani

Candidata:

Moira Paggini

Indice

Introduzione

Moira Paggini

L'obiettivo di questa tesi è quello di rispondere alla domanda: come trovare il numero di radici reali di un polinomio a coefficienti reali? Nella prima parte dell'elaborato saranno introdotte le funzioni simmetriche elementari e il loro legame con i coefficienti dei polinomi. Dopo di che definiremo le somme di potenze, il discriminante e la Bezoutiante, strumenti utili che ci porteranno al Criterio di Sylvester, cuore della Tesi, il quale ci dice che il numero di radici reali di un polinomio è esattamente uguale alla segnatura della matrice Bezoutiante. Vedremo la sua dimostrazione e alcune osservazioni interessanti riguardanti, in particolare, il numero di radici reali positive e di quelle negative.

1 Definizioni utili

La teoria delle funzioni simmetriche è una teoria sviluppata in particolare da Lagrange, Ruffini e Galois, in relazione alla teoria sulle equazioni algebriche in una variabile e alla risoluzione per radicali. Il collegamento principale è dato dalle formule di espressione dei coefficienti di un polinomio, attraverso le sue radici, o per meglio dire, attraverso funzioni simmetriche delle radici.

1.1 Funzioni simmetriche elementari e polinomi simmetrici

Definizione 1. Sia K un campo. Un polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ è detto **polinomio simmetrico** se

$$f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

per ogni possibile permutazione $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ delle variabili $x_1, \ldots, x_n$.

Definizione 2. Date le variabili $x_1, \ldots, x_n$, noi definiamo le **funzioni simmetriche elementari** $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$ nel modo seguente:

$$\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n,$$

$$\vdots$$

$$\sigma_r = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r},$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Osservazione 1. Data $\sigma_i^{(n)}$, la i-esima funzione elementare nelle variabili $x_1, \ldots, x_n$ (nota: l'apice di σ_i indica il numero di variabili e non è una potenza), posso definire anche $\sigma_0^{(n)} = 1$ e $\sigma_i^{(n)} = 0$ se $i < 0$ o $i > n$, e osservo che

$$\sigma_i^{(n)} = \sigma_i^{(n-1)} + x_n \sigma_{i-1}^{(n-1)} \qquad \forall n > 1 \ \ \forall i$$

Teorema 1.1 (TEOREMA FONDAMENTALE DEI POLINOMI SIMMETRICI).
Ogni polinomio simmetrico in $K[x_1, ..., x_n]$ può essere scritto, in modo unico, come un polinomio nelle funzioni simmetriche elementari $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$,
ovvero
$\forall f$ *simmetrico* $\exists\ !\ g$ *t.c.* $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

1.2 Somme di potenze e identità di Newton

Consideriamo ora le seguenti somme di potenze:

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k \qquad (s_0 = n)$$

Notiamo che s_k è simmetrico, vale allora:

Teorema 1.2.
Se K è un campo di caratteristica 0, allora tutti i polinomi simmetrici in $K[x_1, \ldots, x_n]$ possono essere scritti come un polinomio nelle somme di potenze $s_1, \ldots, s_n$.

Osservazione 2. Dalle identità di Newton si evince che ogni funzione simmetrica elementare può essere scritta in termini di somme di potenze e vicersa:

$$\boxed{\sigma_k = \frac{1}{k}(\sigma_{k-1}s_1 - \sigma_{k-2}s_2 + \ldots + (-1)^{k-1}s_k) \qquad (\sigma_1 = s_1)}$$

1.3 Discriminante e Matrice Bezoutiante

Consideriamo lo spazio $\mathbb{C}^n$ e lo spazio $P_n := \left\{x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n\right\}$ dei polinomi monici e consideriamo la funzione :

$$\Pi : \mathbb{C}^n \to \ P_n$$

data da

$$\Pi\left(x_1, ..., x_n\right) := \prod_{i=1}^{n} \left(x - x_i\right)$$

Cosí otteniamo un polinomio

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + ... + (-1)^n \sigma_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_i x^{n-i} = 0$$

che ha radici $(x_1, ..., x_n)$, dove i coefficienti σ_i sono le funzioni simmetriche elementari delle radici. Tutti i polinomi monici si ottengono in questo modo, per il Teorema Fondamentale dell Algebra. Quindi:

Proposizione 1.3. *Dato un polinomio*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \quad (a_0 = 1)$$

monico e di radici $(x_1, ..., x_n)$*, c'è una relazione lineare tra i suoi coefficienti* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *e le funzioni simmetriche* $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$*, più esattamente*

$$\boxed{a_i = (-1)^i \sigma_i}$$

Supponiamo di voler studiare una proprietà delle radici in cui serva di valutare alcuni polinomi simmetrici nelle radici, allora possiamo studiarla senza dover calcolare le radici esplicitamente, dal momento che si deve solo sfruttare l'espressione formale del polinimo simmetrico e , usando l'algoritmo discusso, esprimere il valore di una funzione simmetrica delle radici usando i coefficienti. In altre parole, una funzione simmetrica polinomiale f, a fattori in $\mathbb{C}^n$ attraverso la funzione Π dà luogo ad una funzione polinomiale calcolabile senza risolvere l'equazione $\overline{f}$ in P_n, tale che f=$\overline{f}$ Π. Un classico esempio è dato proprio dal discriminante. La condizione di avere tutte le radici distinte è chiaramente data da $\prod_{i<j} (x_j - x_i) \neq 0$. Il polinomio $V(x) = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$,che in realtà non è simmetrico, rappresenta il determinante della matrice di Vandermonde($n \times n$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & & . & . & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & . & . & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ . & . & . & & & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & & & & . & . \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & & . & . & . & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & & . & . & . & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Proposizione 1.4. $V(x)$ *è un polinomio antisimmetrico, cioè, una permutazione delle variabili comporta un cambio di segno nella moltiplicazione in* $V(x)$*.*

Osservazione 3. La teoria del segno delle permutazioni può essere dedotta analizzando il determinante di Vandermonde. Infatti, data la trasposizione τ è chiaro che $V(x)^\tau = -V(x)$, ne segue che $V(x)^\beta = -V(x)$ o $V(x)$ a seconda se β è un prodotto pari o dispari di trasposizioni.

Vediamo immediatamente che V^2=$V \cdot V$ è un polinomio simmetrico, possiamo quindi calcolarlo in termini di funzioni s_i (somme di potenze definite sopra) come segue: considero la matrice

$$B := A^t \cdot A = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & . & . & . & s_{(n-2)} & s_{(n-1)} \\ s_1 & s_2 & . & . & . & s_{(n-1)} & s_n \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & . & & & . & . \\ . & . & & . & & . & . \\ . & . & & & . & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & & s_{2(n-2)} \\ s_{(n-2)} & . & . & . & . & s_{2(n-2)} & s_{(2n-3)} \\ s_{(n-1)} & . & . & . & . & s_{(2n-3)} & s_{2(n-1)} \end{pmatrix}$$

Definizione 3. La matrice B, con coefficienti $B_{i,j} = s_{i+j-2}$, é detta **Bezoutiante**.

B è una matrice simmetrica e il determinante è esattamente V^2.

Vediamo che esiste un altro modo per esprimere la formula del determinante di B : per il Teorema 1.1 esiste un polinomio D tale che $D(\sigma_1, ..., \sigma_n) = V^2(x_1, ..., x_n)$.

Definizione 4. Il polinomio D è chiamato **discriminante** di $f(x)$.

2 CRITERIO DI SYLVESTER

Vediamo adesso l'utilità della matrice Bezoutiante nello studio delle radici reali di un polinomio a coefficienti reali di grado n.

2.1 Rango e Segnatura della Bezoutiante (Criterio di Sylvester)

Proposizione 2.1. *Il rango della Bezoutiante è uguale al numero di radici distinte.*

Dimostrazione. Sia $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$ polinomio monico di grado n a coefficienti in $\mathbb{R}$. Chiamo S l'anello quoziente dell'anello dei polinomi a coefficienti reali sull'ideale $(f(x))$ generato da $f(x)$:

$$S = \frac{\mathbb{R}[x]}{(f(x))} = \left\{b_1x^{n-1} + ... + b_n | b_i \in \mathbb{R} \, , \, x^n = -a_1x^{n-1} + ... - a_n\right\}$$

esso è formato da tutte le classi di resto $modf(x)$, che sono esattamente tutti i polinomi di grado $< n$. S è un'algebra su $\mathbb{R}$ di dimensione n . Facciamo la seguente costruzione: ogni elemento s di S induce una trasformazione lineare L_s in S attraverso la moltiplicazione (a sinistra), cioè tale che

$$L_s : S \to S$$

$$t \to s \cdot t$$

Definiamo $tr(s) := tr(L_s)$, cioè la traccia della matrice associata all'operatore L_s in una base scelta. Successivamente consideriamo la forma bilineare $(a, b) := tr(a\,b)$, che chiameremo forma traccia di S. Questa è simmetrica e associativa, nel senso che $(ab, c) = (a, bc)$, quindi anche la matrice della forma traccia sarà simmetrica e nella base$\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ di S assume la forma:

$$\begin{pmatrix} tr(1\cdot 1) & tr(1\cdot x) & . & . & . & tr(1\cdot x^{n-1}) \\ tr(1\cdot x) & tr(x\cdot x) & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ tr(1\cdot x^{n-1}) & tr(x\cdot x^{n-1}) & . & . & . & tr(x^{n-1}\cdot x^{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} tr(L_1) & tr(L_x) & . & . & . & tr(L_{x^{n-1}}) \\ tr(L_x) & tr(L_{x^2}) & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ tr(L_{x^{n-1}}) & tr(L_{x^n}) & . & . & . & tr(L_{x^{2(n-1)}}) \end{pmatrix}$$

Osserviamo che applicando questa costruzione all'algebra $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^n)}$ la $tr(x^k) = tr(L_{x^k}) = 0$ se $k > 0$, poiché x è nilpotente. Inoltre $tr(1) = n$, quindi la matrice della forma traccia è la seguente:

$$\begin{pmatrix} tr(1) & tr(x) & . & . & . & tr(x^{n-1}) \\ tr(x) & tr(x^2) & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ tr(x^{n-1}) & tr(x^n) & . & . & . & tr(x^{2(n-1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 1. In aggiunta la forma traccia ha come nucleo l'ideale generato da x, poiché per ogni s in S

$$(x, s) = (x, b_1x^{n-1}+......+b_{n-1}x+b_n) = b_1(x, x^{n-1})+....+b_{n-1}(x, x)+b_n(x, 1) =$$

$$= b_1tr(x^n) + ... + b_{n-1}tr(x^2) + b_ntr(x) \ = \ 0$$

Ora consideriamo la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$, cioè $\mathbb{C}$, e applichiamo la costruzione all'algebra $S_{\mathbb{C}} := \frac{\mathbb{C}[x]}{(f(x))}$.

Fattorizziamo il polinomio nelle sue radici distinte $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$, quindi $f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)^{h_i}$ dove h_i è la molteplicità della radice α_i. Quindi la nostra algebra diventa:

$$S_{\mathbb{C}} = \frac{\mathbb{C}[x]}{(f(x))} = \bigoplus_{i=1}^{m} \frac{\mathbb{C}[x]}{(x - \alpha_i)^{h_i}}$$

Allora la traccia di un elemento $mod\, f(x)$ è la somma delle tracce $mod(x-\alpha_i)^{h_i}$ dell'elemento stesso.

Cerchiamo di calcolare in $mod(x-\alpha_i)^{h_i}$ la $tr(L_{t^k})$per ogni addendo. Per ogni $\frac{\mathbb{C}[x]}{(x-\alpha_i)^{h_i}}$ la matrice associata all'operatore lineare L_{x^k} , $\forall k > 0$, nella base $\left\{1, (x-\alpha_i), (x-\alpha_i)^2, ..., (x-\alpha_i)^{h_i}\right\}$, è la matrice triangolare inferiore:

$$\begin{pmatrix} \alpha_i^k & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & \alpha_i^k & . & . & . & . \\ 0 & 1 & & & & . \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & \alpha_i^k & 0 \\ 0 & 0 & . & . \; 0 & 1 & \alpha_i^k \end{pmatrix}$$

da cui segue che $tr(L_{x^k}) = h_i \alpha_i^k$ per ogni singolo addendo della somma diretta. Sommando tutti i contributi vediamo che in $\frac{\mathbb{C}[x]}{(f(x))}$ la $tr(L_{x^k}) = \sum_{i=0}^{m} h_i \alpha_i^k$, che è proprio la k-esima funzione di Newton delle radici del polinomio $f(x)$. Poiché la matrice associata alla forma traccia, nella base $\left\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\right\}$,è esattamente costituita da queste espressioni, essa coincide con la Bezoutiante delle radici. Facciamo ora un'altra osservazione: dal momento che per ogni determinato addendo $\frac{\mathbb{C}[x]}{(x-\alpha_i)^{h_i}}$ l'ideale generato da $(x-\alpha_i)$ è nilpotente, cioè $(x-\alpha_i)^{h_i} = 0$, si ha $tr((x-\alpha_i)^{h_i}) = 0$ e quindi questo ideale è proprio il nucleo della forma traccia. Allora $\forall s \in \frac{\mathbb{C}[x]}{(x-\alpha_i)^{h_i}}$:

$$((x-\alpha_i), s) = ((x-\alpha_i), b_1(x-\alpha_i)^{h_{n-1}} + ... + b_{n-1}(x-\alpha_i) + b_n) =$$

$$= b_1(x-\alpha_i), (x-\alpha_i)^{h_{n-1}}) + ... + b_{n-1}((x-\alpha_i), (x-\alpha_i)) + b_n((x-\alpha_i), 1) =$$

$$= b_1 tr((x-\alpha_i)^{h_n}) + ... + b_{n-1} tr((x-\alpha_i)^2) + b_n tr((x-\alpha_i)) \;=\; 0$$

Di conseguenza la matrice associata alla forma traccia di ogni addendo ha rango 1, quindi la forma traccia totale, cioè la forma traccia di $\frac{\mathbb{C}[x]}{(f(x))}$, avrà come rango la somma dei ranghi e quindi proprio m, che era esattamente il numero di radici distinte. □

Ora consideriamo al posto di un generico $f(x)$, il polinomio con le stesse radici di f ma tutte con molteplicità 1, che chiameremo $f_{rid}(x)$, ottenuto dividendo $f(x)$ per il MCD tra $f(x)$ e la sua derivata $f'(x)$. Applichiamo ora la precedente costruzione all'algebra $S_{rid} = \frac{\mathbb{R}[x]}{(f_{rid}(x))}$. Dividendo le radici distinte in radici reali $\alpha_1, ..., \alpha_k$ e complesse coniugate $\beta_1, \overline{\beta}_1, ..., \beta_h, \overline{\beta}_h$, l'algebra S_{rid} risulta isomorfa alla somma ortogonale di copie di $\mathbb{R}$ e copie di $\mathbb{C}$, e la sua traccia forma è data dalla somma delle tracce forma di ogni copia. Più precisamente ho:

- k copie di $\mathbb{R}$ (date da $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x-\alpha_i)}$ esse sono isomorfe a $\mathbb{R}$ perché α_i è reale). La matrice associata alla forma traccia ha dimensione (1×1) e quindi è $(tr(1))$, dove $tr(1) = tr(L_1) = 1$, allora la forma traccia è esattamente 1 e la forma quadratica associata è X^2. Questo significa che le radici reali danno un contributo positivo alla forma quadratica totale, ovvero ogni radice reale conta un '+' nella segnatura della matrice della forma traccia $mod(f(x))$.

- h copie di $\mathbb{C}$,date da $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x-\beta_i)(x-\overline{\beta}_i)} \simeq \mathbb{R}[i]$ e di conseguenza isomorfe a $\mathbb{C}$. Siano $\beta_i = a_i + ib_i$ e $\overline{\beta}_i = a_i - ib_i$, la matrice associata alla forma traccia ha dimensione (2×2) ed è data da

$$\begin{pmatrix} tr(1) & tr(x) \\ tr(x) & tr(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_x \\ L_x & L_{x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \beta_i + \overline{\beta}_i \\ \beta_i + \overline{\beta}_i & \beta_i^2 + \overline{\beta}_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a_i \\ 2a_i & 2(a_i^2 - b_i^2) \end{pmatrix}$$

I determinanti dei minori principali in questa matrice sono: 2, che è positivo e $-b_i^2$ che è negativo.

Quindi le radici complesse danno un contributo positivo e uno negativo alla forma quadratica totale relativa alla forma traccia $modf(x)$, ovvero ogni coppia di radici complesse coniugate conta un '+' e un '-'nella segnatura della matrice.

Poiché la matrice della forma traccia coincide esattamente con la Bezoutiante, esse hanno stessa segnatura. Ho cosí dimostrato il seguente Criterio:

Criterio 2.2. *(<u>CRITERIO DI SYLVESTER</u>) Il numero di radici reali di un poliniomio $f(x)$ di grado n a coefficienti in $\mathbb{R}$ è uguale alla segnatura della sua Bezoutiante.*

2.2 Corollari e applicazioni

Una matrice A simmetrica e reale è definita positiva, cioè con autovalori tutti positivi, quando la segnatura è (n,0), dove n= rg(A). Abbiamo quindi il seguente corollario:

Corollario 2.3. *Un polinomio a coefficienti reali ha tutte radici reali se e solo se la matrice Bezoutiante è definita positiva.*

Vediamo adesso un'altra interessante conseguenza di questa dimostrazione che riguarda la positività delle radici reali. Considero la forma quadratica $Q(a, a) := tr(xa^2)$. Seguendo lo stesso procedimento della costruzione descritta sopra, applicata sempre all'algebra $S_{\mathbb{C}} = \frac{\mathbb{C}[x]}{(f(x))} = \bigoplus_{i=1}^m \frac{\mathbb{C}[x]}{(x-\alpha_i)^{h_i}}$, voglio calcolarmi la matrice associata a questa nuova forma quadratica, che avrà ancora come componenti le somme k-esime. Intanto osservo che anche per Q il nucleo è dato dall'ideale generato da $(x - \alpha_i)$, infatti

$$Q((x - \alpha_i), s) = tr(x(x - \alpha_i)(b_1x^{n-1} + ... + b_{n-1}x + b_n)) = 0$$

e la matrice associata ad ogni singolo addendo ha ancora rango 1. Però , se ora considero le radici reali α_i , la matrice associata alla forma quadratica diventa

$$(tr(x)) = (tr(L_x)) = \alpha_i$$

Quindi adesso distinguo nella segnatura i contributi che mi danno le radici reali positive da quelle reali negative, più precisamente distinguo i casi in cui l'autovalore della matrice è negativo, cioè quando $\alpha_i < 0$, positivo quando $\alpha_i > 0$ o nullo se $\alpha_i = 0$. Per le radici complesse vale lo stesso ragionamento fatto sopra, con l'unica differenza che la matrice associata alla forma quadratica in $mod(x - \beta_i)(x - \overline{\beta}_i)$ ora è

$$\begin{pmatrix} tr(x) & tr(x^2) \\ tr(x^2) & tr(x^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_i + \overline{\beta}_i & \beta_i^2 + \overline{\beta}_i^2 \\ \beta_i^2 + \overline{\beta}_i^2 & \beta_i^3 + \overline{\beta}_i^3 \end{pmatrix}$$

ma ho sempre un contributo negativo e uno positivo, perché se considero un polinomio di secondo grado a radici complesse $f(y) = y^2 + ay + b$ allora la matrice associata alla forma quadratica diventa:

$$\begin{pmatrix} -a & a^2 - 2b \\ a^2 - 2b & -a^3 + 3ab \end{pmatrix}$$

che ha determinante $b(a^2 - 4b) < 0$, poiché $(a^2 - 4b) < 0$ e $b = \beta_i \overline{\beta}_i > 0$.

La matrice associata a questa nuova forma quadratica è:

$$\begin{pmatrix}
s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & \cdot & s_{n-1} & s_n \\
s_2 & s_3 & \cdot & \cdot & \cdot & s_n & s_{n+1} \\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & s_{2n-3} \\
s_{n-1} & s_n & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2n-3} & s_{2(n-1)} \\
s_n & s_{n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2(n-1)} & s_{2n-1}
\end{pmatrix}$$

la quale ha come segnatura la differenza tra le radici reali positive e quelle negative.

Abbiamo adesso a disposizione due criteri per trovare la somma e la differenza tra radici positive e negative, quindi posso trovare esplicitamente il numero di radici positive reali e il numero di quelle negative, tutto questo solo calcolando la segnatura delle due matrici simmetriche definite a partire dai coefficienti di un generico $f(x)$.

Un'ultima osservazione interessante riguarda le radici reali in un intervallo. Se invece del polinomio $f(x)$ considero il polinomio tralsato $f_a(x) = f(x+a)$, la segnatura della matrice definita da Q mi dice il numero di radici reali $> a$ meno il numero di radici reali $< a$. A questo punto è ovvio che presi in considerazione $f_a(x)$ e $f_b(x)$, calcolando il numero di radici reali $> a$ e il numero di radici reali $> b$, la loro differenza mi dà esattamente il numero di radici reali appartenenti all'intervallo $(a, b]$.

3 Esempi

Prima di vedere qualche esempio è bene sottolineare l'importante caratteristica della Bezoutiante di essere una matrice simmetrica a coefficienti reali. Questo comporta che il suo polinomio caratteristico ha tutte radici reali e quindi posso applicare a quest'ultimo il Criterio di Cartesio, il quale ci dice che ho tante radici positive(contate con molteplicità) quante sono le variazioni di segno nella successione dei coefficienti non nulli del polinomio. Da qui poi è facile trovare la segnatura. Un altro metodo per trovare la segnatura potrebbe essere quello di valutare i minori principali della Bezoutiante, sempre grazie al fatto che la matrice è simmetrica. Da qui emerge l'utilità del Criterio di Sylvester,poiché capire quante radici reali ha un polinomio di qualsiasi grado n, necessita ora solo di calcolare alcune semplici espressioni e qualche determinante. Anche se la formula del determinante da valutare si complica all'aumentare di n, questo rimane comunque un Criterio molto utile che ci dà delle informazioni sulle radici, considerando il fatto che per polinomi di grado > 5 non esistono delle formule risolutrici per il calcolo delle soluzioni. Vediamo ora qualche esempio di applicazione del Criterio di Sylvester.

$\boxed{\textbf{n=3}}$ Discutiamo le tipologia delle radici x_1 , x_2 x_3 del polinomio

$$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

Passo 1) Trasformo i coefficienti nelle funzioni simmetriche.

$$a_1 = -\sigma_1 \quad (= x_1 + x_2 + x_3)$$

$$a_2 = \sigma_2 \quad (= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$a_3 = -\sigma_3 \quad (= x_1x_2x_3)$$

Passo 2) Trasformo le funzioni simmetriche nelle somme di potenze.

$$s_0 = 3$$

$$s_1 = \sigma_1$$

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$s_3 = \sigma_1^3 + 3\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

$$s_4 = 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + \sigma_1^4$$

Passo 3) Scrivo la Bezoutiante.

$$B = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \sigma_1 & \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_1^2 - 2\sigma_2 & \sigma_1^3 + 3\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 & \sigma_1^3 + 3\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2 & 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + \sigma_1^4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -a_1 & a_1^2 - 2a_2 \\ -a_1 & a_1^2 - 2a_2 & -a_1^3 - 3a_3 + 3a_1a_2 \\ a_1^2 - 2a_2 & -a_1^3 - 3a_3 + 3a_1a_2 & 4a_1a_3 - 4a_2a_1^2 + 2a_2^2 + a_1^4 \end{pmatrix}$$

Adesso ho una matrice in funzione solo dei coefficienti di $f(x)$. Quindi, sfruttando esclusivamente questi, posso affermare che:

$$\begin{cases} \text{rg(B)= } \textit{numero di radici distinte} \\ \text{sign(B)= } \textit{numero di radici reali} \\ \text{det(B)= } \textit{discrimintante di } B \end{cases}$$

Vediamo un esempio numerico :

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} rango(B) = 3 \\ det(B) = -31 \\ sign(B) = (+,+,-) = (2,1) \end{cases} \qquad \Rightarrow\ 1\, radice\, reale$$

Oss. Nel caso $n = 3$ la segnatura della Bezoutiante può essere rappresentata solo da uno dei due seguenti tipi :

- (3,0), 3 autovalori positivi e 0 negativi $\Rightarrow$ $det(B) > 0$ e ho 3 radici reali.
- (2,1), 2 autovalori positivi e 1 negativo $\Rightarrow$ $det(B) < 0$ e ho 1 radice reale

I casi (1,2) e (0,3) non possono presentarsi, poiché ogni radice reale contribuisce con un '+' e una coppia di complesse coniugate con un '-' e un '+'.

Quindi, in questo caso, basta calcolare il determinante (3×3) per caratterizzare le radici.

Studiamo il segno delle radici reali.

Calcolo la matrice associata alla forma quadratica Q di $f(x)$, che diventa:

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \\ s_3 & s_4 & s_5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -a_1 & a_1^2 - 2a_2 & -a_1^3 - 3a_3 + 3a_1a_2 \\ a_1^2 - 2a_2 & -a_1^3 - 3a_3 + 3a_1a_2 & 4a_1a_3 - 4a_2a_1^2 + 2a_2^2 + a_1^4 \\ -a_1^3 - 3a_3 + 3a_1a_2 & 4a_1a_3 - 4a_2a_1^2 + 2a_2^2 + a_1^4 & -5a_3a_1^2 - a_1^5 + 5a_2a_3 + 5a_2a_1^3 - 5a_1a_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Questa ha segnatura $(+,+,-) = (2,1)$. Un '+' e il '-' sono associati alle radici complesse coniugate, l'altro contributo è un '+', quindi la radice reale è positiva, cioè > 0.

Troviamo il numero di radici reali nell'intervallo $(0,1]$.

Dall'esempio precedente ho trovato che il polinomio ha una radice reale positiva. Adesso devo calcolare la segnatura della matrice associata a Q per il polinomio traslato $f_1(x) = f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$, che è :

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & -19 \\ 6 & -19 & 32 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha segnatura $(-,+,-) = (1,2)$, ovvero mi dice che il polinomio $f_1(x)$ ha una radice reale negativa, che equivale a dire che $f(x) = f_1(x-1)$ ha una radice reale < 1 e nessuna > 1. Dopo di che facendo la differenza tra le radici di $f(x)$ maggiori di 0 e le radici di $f(x)$ maggiori di 1, ottengo le radici di $f(x)$ comprese nell'intervallo $(0,1]$: posso quindi concludere che ho una radice reale positiva nell'intervallo scelto.

Riferimenti bibliografici

[1] G.SANSONE-R.CONTI, Lezioni di Analisi Matematica, volume I,Padova, Cedam, 1966.

[2] C. PROCESI, Lie groups-An Approach through Invariants and Representations,(Universitext),Springer,2006,

[3] D. BURATTA,Tesi triennale,Polinomi simmetrici,2010-2011, reperibile in http://web.math.unifi.it/users/ottavian/tesi/Buratta_PolinomiSimmetrici.pdf