



Università degli Studi di Firenze

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale  
Anno Accademico 2010/2011

18 Aprile 2012

**Decomposizione estrema di  
polinomi non negativi  
e numero di Carathéodory**

**Candidato**  
Simone Naldi

**Relatore**  
Prof. Giorgio Ottaviani

**Correlatore**  
Prof. Marco Longinetti

A mia nonna Graziella

*Solo l'amare, solo il conoscere  
conta, non l'aver amato,  
non l'aver conosciuto.*

PIER PAOLO PASOLINI

# Indice

<b>1</b>	<b>Strumenti</b>	<b>1</b>
1.1	Dualità e coni convessi . . . . .	1
1.2	Varietà algebriche . . . . .	6
1.2.1	La varietà di Veronese . . . . .	8
1.3	Risultanti e discriminanti . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Coni di Hilbert</b>	<b>12</b>
2.1	Dualità per $\mathbf{F}_{n,m}$ e insiemi di nodi . . . . .	13
2.2	La forma quadratica $\mathbf{H}_F$ . . . . .	17
2.3	Coni di Hilbert e loro bordo . . . . .	20
2.3.1	Teorema di Hilbert ed esempi . . . . .	23
2.3.2	Bordo di $\mathbf{P}_{n,m}$ . . . . .	31
2.3.3	Bordo di $\mathbf{Q}_{n,m}$ e $\Sigma_{n,m}^*$ . . . . .	32
2.3.4	Bordo di $\Sigma_{3,6}$ e $\Sigma_{4,4}$ . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Numero di Carathéodory</b>	<b>36</b>
3.1	Il caso delle forme quadratiche: $\mathbf{P}_{n,2}$ . . . . .	37
3.2	Il caso delle forme binarie: $\mathbf{P}_{2,m}$ . . . . .	39
3.2.1	Le quartiche . . . . .	42
3.2.2	Le sestiche . . . . .	49
3.2.3	Risultati di induzione . . . . .	56
3.3	Sulle quartiche piane: $\mathbf{P}_{3,4}$ . . . . .	58
3.3.1	Esempi di decomposizioni estremali . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Prove numeriche</b>	<b>61</b>

# Introduzione

Il problema di stabilire se per ogni elemento di una data famiglia di polinomi omogenei non negativi sia possibile ottenere una scrittura che renda esplicita la non negatività è una questione che ha radici antiche e che trovò una risposta per mano di Hilbert in un celebre risultato del 1888. Egli riuscì infatti a mostrare che ogni polinomio omogeneo non negativo, a coefficienti in  $\mathbb{R}$  su  $n$  indeterminate, di grado pari  $m$ , è decomponibile come somma di quadrati se e solo se  $n = 2$  (forme binarie),  $m = 2$  (forme quadratiche) oppure nel caso sporadico  $(n, m) = (3, 4)$  delle quartiche di  $\mathbb{P}^2$ . Se indichiamo con

$$\Psi = \left\{ (n, 2), (2, m), (3, 4) \mid n \in \mathbb{N}, m \in 2\mathbb{N} \right\},$$

il teorema di Hilbert afferma che la decomposizione come somma di quadrati è possibile per ogni polinomio di grado  $m$  su  $n$  indeterminate se e solo se  $(n, m) \in \Psi$ .

In questo lavoro si sono approfonditi alcuni aspetti riguardanti le tipologie di decomposizione di polinomi non negativi su  $\mathbb{R}^n$  come somma di quadrati, soffermandosi specialmente sulle decomposizioni rispetto a particolari sottoinsiemi della famiglia data.

Usando la notazione introdotta da B. Reznick in [Re1] (lavoro da cui abbiamo tratto numerose riflessioni principalmente raccolte nel Capitolo 2) abbiamo chiamato  $\mathbf{P}_{n,m}$  l'insieme dei polinomi omogenei non negativi di grado  $m$  in  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\Sigma_{n,m}$  l'insieme delle somme di quadrati e  $\mathbf{Q}_{n,m}$  l'insieme delle somme di potenze  $m$ -esime di forme lineari. Si ha dunque che  $\mathbf{Q}_{n,m} \subseteq \Sigma_{n,m} \subseteq \mathbf{P}_{n,m}$  e che l'inclusione  $\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbf{P}_{n,m}$  è un'uguaglianza se e solo se  $(n, m) \in \Psi$ , mentre nei casi restanti l'inclusione è stretta e dunque si possono trovare dei controesempi. La dimostrazione di Hilbert non era costruttiva e per avere degli esempi di polinomi in  $\Delta_{n,m} = \mathbf{P}_{n,m} \setminus \Sigma_{n,m}$  si dovette aspettare fino agli anni sessanta del ventesimo secolo, quando Robinson e Motzkin produssero indipendentemente esempi di polinomi in  $\Delta_{3,6}$  e  $\Delta_{n,2n}$ . Successivamente furono esibiti esempi anche in  $\Delta_{4,4}$ ; si può notare che  $\Delta_{3,6}$  e  $\Delta_{4,4}$  sono i primi casi non vuoti di  $\Delta_{n,m}$ , nei quali si trovano polinomi non negativi che non sono somme di quadrati.

Nel Capitolo 1 si riportano inizialmente alcuni strumenti di analisi convessa che saranno utili per comprendere la struttura degli insiemi di polinomi sopra citati. In particolare, la definizione di cono convesso di uno spazio vettoriale reale, di cono duale e di punto estremale. I punti estremali di un cono sono i suoi mattoni fondamentali: infatti, per il Teorema di Carathéodory, in dimensione finita è possibile scrivere ogni elemento del

cono dato come somma finita di estremali. Inoltre, se chiamiamo *altezza* di un elemento  $x$  del cono, il numero minimo di estremali la cui somma dà  $x$ , da tale teorema discende anche che tale valore è globalmente limitato dalla dimensione del cono.

Si fa cenno inoltre ad alcune nozioni fondamentali di geometria algebrica, delle quali la più importante per questo lavoro è certamente la definizione di varietà di Veronese reale su  $\mathbb{P}^n$  di grado  $d$ . Tale varietà è la sottovarietà proiettiva di  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$  che parametrizza lo spazio dei polinomi omogenei di grado  $d$  su  $\{x_0, \dots, x_n\}$  che sono potenze  $d$ -esime di forme lineari. La varietà di Veronese  $\mathcal{V}_{n-1,m}$  corrisponderà all'insieme dei punti estremali del cono  $\mathbf{Q}_{n,m}$ .

Nel Capitolo 2 si definisce innanzitutto la forma quadratica di Hankel  $H_F$  di un polinomio  $F \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]_m$ , detto anche cataletticante simmetrico, il cui rango è legato alla decomponibilità di  $F$  come somma di potenze di forme lineari: se  $(n, m) \in \Psi$ ,  $F \in \mathbf{Q}_{n,m}$  e  $t = \text{rk}(H_F)$  allora  $F$  ha una scrittura come somma di  $t$  potenze. Ma l'interesse verso  $H_F$  riguarderà principalmente il fatto che il cono duale di  $\Sigma_{n,m}$  è formato dai polinomi con cataletticante semidefinito positivo. Si studiano poi i coni di Hilbert  $\mathbf{P}_{n,m}$ ,  $\Sigma_{n,m}$ ,  $\mathbf{Q}_{n,m}$  e si riporta una dimostrazione del Teorema di Hilbert dopo aver analizzato alcuni esempi fondamentali.

Infine, abbiamo ritenuto interessante studiare la struttura del bordo di  $\mathbf{P}_{n,m}$ , il quale è formato da tutti e soli i polinomi non negativi che hanno almeno una radice reale: di conseguenza si ottiene che la sua chiusura di Zariski è l'ipersuperficie definita dal polinomio discriminante. Si determina allo stesso modo il bordo  $\partial\Sigma_{n,m}^*$  come il luogo delle cataletticanti simmetriche singolari, cioè l'ipersuperficie definita da  $\det(H_F) = 0$ . Infine si riportano alcuni risultati tratti da [BH] sul bordo di  $\Sigma_{3,6}$  e  $\Sigma_{4,4}$  e sulla chiusura di Zariski dei punti estremali di  $\Delta_{3,6}$  e  $\Delta_{4,4}$ .

Il Capitolo 3 contiene risultati che non sono espliciti in letteratura. Come si è visto, per  $(n, m) \in \Psi$  vale l'uguaglianza  $\mathbf{P}_{n,m} = \Sigma_{n,m}$ ; inoltre, è chiaro che i punti estremali di questi coni devono necessariamente essere dei quadrati perfetti. Ora, poiché ogni elemento del cono si scrive come somma finita di estremali, abbiamo ritenuto interessante studiare l'altezza di un polinomio generico in  $\mathbf{P}_{n,m}$  ed in generale dare una limitazione globale  $t$  per la rappresentabilità di ogni elemento di  $\mathbf{P}_{n,m}$  come somma di  $t$  estremali: tale valore, che, nei casi in cui si è calcolato, ha migliorato sensibilmente la stima data dal Teorema di Carathéodory, è il cosiddetto *numero di Carathéodory* di  $\mathbf{P}_{n,m}$ , indicato con  $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,m})$ .

La ricerca del numero di Carathéodory  $\mathfrak{C}(X)$  di un dato insieme  $X$  è un problema di carattere generale che trova numerose applicazioni in vari campi della ricerca. Nonostante il fatto che il Teorema di Carathéodory sia un risultato classico per la famiglia degli insiemi convessi, esistono tutt'oggi diversi problemi aperti riguardanti il numero  $\mathfrak{C}$ , sia per insiemi convessi che per insiemi convessi compatti. Anche nel solo ambito dei coni convessi, il calcolo di  $\mathfrak{C}$  è coinvolto in problemi di ricerca operativa; per spazi convessi compatti come gli orbitopi (vedi [SSS]) tale numero è stato calcolato solo per certi casi particolari. Indipendentemente dal suo aspetto teorico, il numero di Carathéodory è di interesse in metodi numerici per la ricerca di soluzioni a problemi di ottimizzazione. Ad

esempio, se si vuole determinare con il metodo dei minimi quadrati una rappresentazione per un elemento

$$x = \sum_{i=1}^t e_i$$

di un cono convesso  $C$  rispetto alla classe dei suoi estremali (ove nota) è chiaro che il numero dei gradi di libertà della rappresentazione aumenta all'aumentare di  $t$ . Conoscere il più piccolo valore di  $t$  per il quale tali rappresentazioni sono possibili per tutto il cono, rende più efficaci gli algoritmi che si intendono usare: da questo l'importanza del calcolo di  $\mathfrak{C}(C)$ . Per un esempio di applicazione si veda il lavoro [GLS], nel quale si espone un metodo per la risoluzione di un problema inverso legato alla ricostruzione della struttura di una data proteina, in movimento, da dati magnetici, per cui risulta necessario rappresentare in modo minimale gli elementi di un dato insieme rispetto agli elementi estremali.

In questo lavoro si sono studiate le famiglie dei punti estremali dei coni  $\mathbf{P}_{n,m}$  per  $(n, m) \in \Psi$ : per  $\mathbf{P}_{n,2}$  gli estremali sono le forme quadratiche di matrice di rango uno; per  $\mathbf{P}_{2,m}$  sono i quadrati di polinomi con sole radici reali; infine, per  $\mathbf{P}_{3,4}$  sono i quadrati di polinomi che definiscono coniche a punti reali. Si è calcolato, dunque, il numero di Carathéodory per i coni  $\mathbf{P}_{n,2}$  delle forme quadratiche e per i coni delle quartiche binarie  $\mathbf{P}_{2,4}$  (Teorema 3.2.3) e delle sestiche binarie  $\mathbf{P}_{2,6}$  (Teorema 3.2.5): per entrambi questi due ultimi casi il numero di Carathéodory è 2. Si sono infine fornite nuove limitazioni per  $\mathbf{P}_{2,m}$  in grado basso, indotte dal risultato ottenuto per le sestiche. Interrogandoci poi sulla eventuale unicità di tali rappresentazioni estremali, abbiamo mostrato che, già per  $\mathbf{P}_{2,4}$ , tale unicità non vale in generale: in particolare il cono delle quartiche è diviso in due regioni, una in cui la rappresentazione è unica e un'altra in cui ne esistono esattamente due. Questa osservazione esclude che ci possa essere unicità di rappresentazione per  $\mathbf{P}_{2,6}$  e a maggior ragione per forme binarie di grado superiore.

\* \* \*

*Vorrei ringraziare i professori Giorgio Ottaviani e Marco Longinetti per l'interessante argomento proposto, ma soprattutto per la pazienza, la disponibilità e per i continui incoraggiamenti a migliorare e ad approfondire il lavoro di tesi.*

# Capitolo 1

## Strumenti

### 1.1 Dualità e coni convessi

Sia  $H$  uno spazio vettoriale a dimensione finita  $n$  sul campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$ .

Indichiamo, come è usuale, con  $H'$  il duale dello spazio vettoriale  $H$ , ovvero l'insieme

$$H' \stackrel{def}{=} \{l: H \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineare}\} = \text{Hom}(H, \mathbb{R})$$

dei funzionali lineari di  $H$  in  $\mathbb{R}$ . Con le applicazioni

$$(l_1 + l_2)(x) \stackrel{def}{=} l_1(x) + l_2(x)$$

e

$$(\beta l)(x) = \beta l(x)$$

anche  $H'$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

Fissata una base per  $H$

$$H = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

siano  $E_1, \dots, E_n \in H'$  tali che

$$E_i(e_j) = \delta_{ij}$$

dove  $\delta_{ij}$  è il simbolo delta di Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Gli  $E_i$  sono una base di  $H'$ . Infatti, sia  $\sum_i c_i E_i = 0$ , allora esso è il funzionale nullo e particolarmente è nullo se valutato sugli  $e_j$ , ovvero  $c_j = 0$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ . Inoltre, sia  $l \in H'$ , allora per ogni  $v = \sum_i v_i e_i \in H$  si ha che  $l(v) = \sum_i v_i l(e_i)$ . Sia ora

$\sum_i l(e_i)E_i \in \langle E_1, \dots, E_n \rangle$ . Si ha che

$$\left( \sum_i l(e_i)E_i \right) (v) = \sum_i \sum_j l(e_i)v_j\delta_{ij} = \sum_i v_i l(e_i) = l(v)$$

per ogni  $v$ , ovvero  $l = \sum_i l(e_i)E_i \in \langle E_1, \dots, E_n \rangle$ .

Dunque

$$H' = \langle E_1, \dots, E_n \rangle$$

e la base  $\mathcal{E}' = \{E_1, \dots, E_n\}$  è detta **base duale** di  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Dunque  $H$  e  $H'$  nel caso finito hanno la stessa dimensione come  $\mathbb{R}$ -spazi vettoriali.

L'applicazione lineare  $\psi: H \rightarrow H'$  riferita alle due basi  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  (ovvero tale che  $\psi(e_i) = E_i$  per ogni  $i$ ) è un isomorfismo di  $\mathbb{R}$ -spazi vettoriali, non canonico perché dipende dalla scelta delle due basi. Indicato invece con

$$H'' = \text{Hom}(H', \mathbb{R})$$

lo spazio biduale di  $H$ , si dimostra il seguente teorema, sempre in dimensione finita:

**Teorema 1.1.1.** *Sia  $H$  uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Allora esiste un isomorfismo canonico di spazi vettoriali tra  $H$  e  $H''$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo l'applicazione  $\Psi: H \rightarrow H''$  tale che

$$(\Psi(v))(l) = l(v) \tag{1.1}$$

per ogni  $v \in H$  e ogni  $l \in H'$ .  $\Psi$  è evidentemente ben definita (infatti  $\Psi(v)$  è lineare su  $H'$  per ogni  $v$ ) ed è lineare su  $H$ ; inoltre non dipende dalla base scelta su  $H$ . Mostriamo che  $\Psi$  è iniettiva (e che dunque è un isomorfismo, perché  $\dim(H) = \dim(H') = \dim(H'')$ ). Sia  $v \in H$  tale che  $\Psi(v) = 0$ , ovvero per ogni  $l \in H'$   $l(v) = (\Psi(v))(l) = 0$ . Questo implica  $v = 0$  in quanto

$$\bigcap_{l \in H'} \text{Ker}(l) = \langle 0 \rangle.$$

Infatti, supponiamo che  $v = \sum_i v_i e_i$ ; allora, in particolare

$$0 = E_j(v) = \sum_i v_i E_j(e_i) = v_j$$

per ogni  $j$ , cioè  $v = 0$ . □

Continueremo ad usare la notazione  $\Psi(x) \in H''$  tenendo presente l'identificazione  $x \leftrightarrow \Psi(x)$  appena mostrata.

Dato un isomorfismo  $\varphi: H \rightarrow H'$  si definisce la forma

$$[\ , ]_{\varphi,1}: H \times H \rightarrow \mathbb{R} \tag{1.2}$$

$$[v, w]_{\varphi,1} = (\varphi(v))(w)$$

che risulta essere bilineare, così come la forma  $[v, w]_{\varphi,2} = (\varphi(w))(v)$ .  
 Si noti che  $[v, w]_{\varphi,1} = [w, v]_{\varphi,2}$ , ovvero che vale l'equivalenza

$$[\cdot, \cdot]_{\varphi,1} = [\cdot, \cdot]_{\varphi,2} \iff [\cdot, \cdot]_{\varphi,1} \text{ è simmetrica.}$$

Viceversa, data  $[\cdot, \cdot]: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  bilineare si definisce l'applicazione

$$F_{[\cdot, \cdot]}: H \rightarrow H' \tag{1.3}$$

$$F_{[\cdot, \cdot]}(v) = F_v$$

dove  $F_v(w) = [v, w]$  per ogni  $w \in H$ .

**Teorema 1.1.2.**  $F_{[\cdot, \cdot]_{\varphi,1}} \equiv \varphi$

*Dimostrazione.* Sia  $v \in H$ . Allora  $F_{[\cdot, \cdot]_{\varphi,1}}(v) = (F_{[\cdot, \cdot]_{\varphi,1}})_v$  dove, per ogni  $w \in H$

$$(F_{[\cdot, \cdot]_{\varphi,1}})_v(w) = [v, w]_{\varphi,1} = (\varphi(v))(w)$$

ovvero  $F_{[\cdot, \cdot]_{\varphi,1}}(v) = (F_{[\cdot, \cdot]_{\varphi,1}})_v \equiv \varphi(v)$  per ogni  $v \in H$ , da cui la tesi. □

**Definizione 1.1.1.** Diremo che uno spazio vettoriale  $H$  è dotato di **prodotto interno** se esiste una applicazione  $[\cdot, \cdot]: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  con le proprietà seguenti:

- $[u + v, w] = [u, w] + [v, w]$  per ogni  $u, v, w \in H$
- $[\alpha u, v] = \alpha[u, v]$  per ogni  $u, v \in H$  e per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $[u, v] = [v, u]$  per ogni  $u, v \in H$
- $[u, u] \geq 0$  per ogni  $u \in H$  e  $[u, u] = 0$  se e solo se  $u = 0$

Dunque un prodotto interno su  $H$  è una forma bilineare simmetrica definita positiva.

Passiamo ad una seconda serie di definizioni e risultati utili alla fine della comprensione del lavoro.

**Definizione 1.1.2.**  $H$  spazio vettoriale. Un sottoinsieme  $A \subseteq H$  è un

1. **sottospazio affine** di  $H$  se  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}, x, y \in A$
2. **insieme convesso** di  $H$  se  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$  per ogni  $\lambda \in [0, 1], x, y \in A$ .

Osserviamo che ogni sottospazio vettoriale di  $H$  è un sottospazio affine e che per ogni sottospazio affine  $A \subseteq H$  esiste un unico sottospazio vettoriale  $K_A$  di  $H$  parallelo ad  $A$  (cioè tale che  $A = K + v$  per un certo  $v \in H$ ): esso è l'insieme della forma

$$K_A = A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}.$$

Infatti  $K_A$  è sottospazio vettoriale di  $H$ , parallelo ad  $A$ , ed è l'unico con questa proprietà perché ogni sottospazio affine è parallelo ad uno ed un solo sottospazio vettoriale.

**Definizione 1.1.3.** Definiamo la **dimensione** di un sottospazio affine  $A$  come

$$\dim(A) \stackrel{def}{=} \dim(K_A).$$

**Osservazione 1.1.1.** È chiaro che, data una famiglia di sottospazi affini dello spazio  $H$ , allora l'intersezione degli elementi della famiglia è ancora un sottospazio affine. Allo stesso modo, ogni famiglia di insiemi convessi di  $H$  è chiusa per intersezione arbitraria.

Dato un insieme  $D \subseteq H$ , chiamiamo **inviluppo affine** di  $D$  lo spazio affine che si ottiene intersecando tutti i sottospazi affini di  $H$  che contengono  $D$ : lo indichiamo con  $\text{aff}(D)$ . Esso è il più piccolo sottospazio affine che contiene  $D$ . Chiamiamo, analogamente, **inviluppo convesso** di  $D$  l'insieme convesso che si ottiene intersecando tutti gli insiemi convessi che contengono  $D$ : lo indichiamo con  $\text{conv}(D)$ . Esso è il più piccolo insieme convesso di  $H$  contenente  $D$ .

**Teorema 1.1.3.** Dato un insieme  $D \subseteq H$ , l'inviluppo convesso di  $D$  coincide con l'insieme delle combinazioni convesse dei sottoinsiemi finiti di  $D$ , ovvero

$$\text{conv}(D) \stackrel{teo}{=} \left\{ \sum_{t=1}^r \lambda_t d_t \mid r \in \mathbb{N}, d_t \in D, \lambda_t \geq 0 \text{ e } \sum_{t=1}^r \lambda_t = 1 \right\}.$$

**Definizione 1.1.4.** Un sottoinsieme  $C \subseteq H$  si dice **cono** se

$$\text{per ogni } a \in C \text{ e ogni } \alpha \geq 0 \text{ allora } \alpha a \in C.$$

**Definizione 1.1.5.** Sia  $C$  un cono. Un elemento  $e \in C$  si dice **punto estremo** (o retta estrema) per  $C$  se non può essere decomposto non banalmente nella somma di altri due elementi di  $C$ , ovvero: se  $e = f_1 + f_2$  con  $f_i \in C$ , allora  $f_i = c_i e$  per certi  $c_i \geq 0$ . Indicheremo l'insieme dei punti estremali di  $C$  con  $\text{Est}(C)$ .

Banalmente, se  $e$  è un punto estremo di  $C$ , allora ogni punto  $\lambda \cdot e$  con  $\lambda \neq 0$  è ancora estremo (e questo giustifica la dicitura "retta estrema"). In più, i punti estremali di un cono convesso appartengono al bordo del cono.

**Esempio 1.1.1.** Sia  $\mathcal{E}_2 = \{e_1, e_2\}$  la base euclidea di  $\mathbb{R}^2$ . Il quadrante positivo  $\mathbb{R}_+^2$  è un cono, il cui bordo è formato dalle due semirette positive delle ascisse e delle ordinate; il bordo coincide con l'insieme dei punti estremali e ogni elemento del cono è somma di due elementi estremali. Ovviamente si può ripetere il ragionamento per una qualsiasi base del piano.

**Esempio 1.1.2.** Sia  $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base euclidea di  $\mathbb{R}^3$  e consideriamo

$$\mathbb{R}_+^3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\},$$

l'ottante positivo.  $\mathbb{R}_+^3$  è un cono, il cui bordo è formato da

$$\partial \mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R}_+^3 \cap \{xyz = 0\}.$$

I punti estremali di  $\mathbb{R}_+^3$  sono i raggi generati dagli elementi di  $\mathcal{E}_3$ . Ogni punto di  $\partial \mathbb{R}_+^3 \setminus \text{Est}(\mathbb{R}_+^3)$  si scrive in modo unico come somma di due punti estremali. Ogni elemento

dell'interno del cono ha una decomposizione come somma di tre (ma non due) punti estremali. Anche in questo esempio si è presa per comodità la base  $\mathcal{E}_3$  ma si può ripetere l'esempio per una qualsiasi altra base  $\{v_1, v_2, v_3\}$  considerando il cono

$$C = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \mid w \cdot v_1, w \cdot v_2, w \cdot v_3 \geq 0 \right\}.$$

**Proposizione 1.1.1.** *Sia  $C \subseteq H$  un cono. Allora  $C$  è convesso se e solo se, per ogni  $a, b \in C$ , allora  $a + b \in C$ .*

*Dimostrazione.* Se  $C$  è un cono convesso, allora dati  $a, b \in C$  vale che  $\frac{1}{2}(a + b) \in C$  e dunque per la proprietà di cono  $a + b \in C$ . Viceversa, se  $a, b \in C$ , per  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $(1 - \lambda)a, \lambda b \in C$  e dunque  $(1 - \lambda)a + \lambda b \in C$  ovvero  $C$  è convesso.  $\square$

Analogamente a quanto fatto prima, chiamiamo **inviluppo conico** di un insieme  $D \subseteq H$  l'insieme  $\text{con}(D)$  delle somme finite a coefficienti positivi di elementi di  $D$ . Esso è il più piccolo cono convesso contenente  $D$ .

Si chiama **dimensione** del cono convesso  $C$  il valore  $\dim(\text{aff}(C))$ , cioè la dimensione dell'inviluppo affine di  $C$ . Essa è indipendente dallo spazio nel quale si considera immerso il cono  $C$ . In questa tesi lavoreremo esclusivamente con coni che contengono l'origine dello spazio vettoriale, e che hanno, dunque, per inviluppo affine un sottospazio vettoriale dello spazio.

Per il nostro lavoro ci serviremo, inoltre, dei seguenti risultati:

**Teorema 1.1.4** (Milman). *Un cono convesso che non contiene rette è inviluppo convesso dei suoi punti estremali.*

**Teorema 1.1.5** (Carathéodory). *Sia  $C$  un cono convesso di dimensione  $n$  contenente  $0$ , e sia  $z = \sum_{j=1}^b x_j$  con  $x_j \in C$ . Allora esiste  $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq C$  tale che  $z = \sum_{i=1}^n y_i$  e tale che, per ogni  $i$ ,  $y_i = \epsilon_j x_j$  per qualche  $x_j$ , con  $\epsilon_j \leq 1$ .*

*Dimostrazione.* Proviamo la tesi per  $b = n + 1$ , il resto si deduce induttivamente. In questa situazione, gli  $x_j$  sono linearmente dipendenti e quindi esistono dei  $\sigma_j$  non tutti nulli tali che  $\sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j x_j = 0$ ; in particolare, a meno di riordinare i termini, possiamo supporre che  $0 < \sigma_{n+1} = \max_j \sigma_j$ .

Allora  $1 \geq (\sigma_{n+1})^{-1} \sigma_j$  per ogni  $j$  e quindi

$$z = \sum_{j=1}^{n+1} (x_j - (\sigma_{n+1})^{-1} \sigma_j x_j) = \sum_{j=1}^n (1 - (\sigma_{n+1})^{-1} \sigma_j) x_j.$$

$\square$

Osserviamo che se un cono  $C$  che non contiene rette è inviluppo conico di  $\tilde{C} \subseteq C$ , allora è inviluppo conico di  $\tilde{C} \cap \partial C$ . Dai due teoremi precedenti si conclude inequivocabilmente il seguente

**Corollario 1.1.1.** *Sia  $C$  un cono convesso di dimensione  $n$  che non contiene rette. Allora ogni  $x \in C$  si scrive come somma di al più  $n$  punti estremali di  $C$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x \in C$ . Allora, per il Teorema 1.1.4,  $x$  è involuppo convesso di punti estremali di  $C$ , e per il Teorema 1.1.5 il numero di tali punti si riduce al più a  $n$ .  $\square$

**Definizione 1.1.6.** Sia  $C$  un cono convesso di  $H$ . Il **cono duale** di  $C$  in  $H$  è l'insieme

$$C^* \stackrel{\text{def}}{=} \{l \in H' \mid l(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in C\} \subseteq H'.$$

**Teorema 1.1.6.** Il cono duale  $C^*$  di un cono convesso  $C$  è un cono convesso. Inoltre,  $(C^*)^* = \bar{C}$ . In particolare, se  $C$  è chiuso, allora  $(C^*)^* = C$ .

*Dimostrazione.* Per la linearità di  $H'$ , il duale di un cono convesso è ancora un cono convesso. Ricordando l'identificazione  $x \leftrightarrow \Psi(x)$  di  $H$  con  $H''$ , mostriamo che  $(C^*)^* = \bar{C}$ . Se  $x \in C$  e  $l \in C^*$  allora per definizione  $(\Psi(x))(l) = l(x) \geq 0$  per ogni  $l \in C^*$ : dunque  $\Psi(x) \in (C^*)^*$ , ovvero  $C \subseteq (C^*)^*$ . Inoltre il duale di un cono è sempre un chiuso, per continuità: se  $l_n \in C^*$  e  $l_n \xrightarrow{n} l \in H'$ , allora  $l_n(x) \xrightarrow{n} l(x) \geq 0$  per ogni  $x \in C$ , ovvero  $l \in C^*$ . Quindi  $(C^*)^*$  è un chiuso, ovvero  $\bar{C} \subseteq (C^*)^*$ .

Viceversa, supponiamo che esista un elemento  $\Psi(z) \in (C^*)^*$  con  $z \notin \bar{C}$ . Allora  $\bar{C}$  e  $\{z\}$  sono due sottinsiemi chiusi, convessi e distinti di  $H$ , e dunque per il Teorema di Separazione (vedi [P]) esiste un iperpiano separatore  $A$  per la coppia  $(\bar{C}, \{z\})$ , di supporto per  $\bar{C}$  nel vertice 0. L'iperpiano  $A$  è rappresentanto da un funzionale  $l_A \in H'$ , ovvero  $A = \{x \in H \mid l_A(x) = 0\}$ , per cui per ogni  $x \in C$  vale che  $l_A(x) \geq 0$ , mentre  $l_A(z) \leq 0$ . La prima condizione ci dice che  $l_A \in C^*$  e con ciò concluderemmo che, poiché  $\Psi(z) \in (C^*)^*$ ,  $l_A(z) \geq 0$ . Contraddizione.  $\square$

## 1.2 Varietà algebriche

Ricordiamo inizialmente alcune definizioni e risultati di geometria algebrica. Sia  $\mathbb{R}$  il campo dei numeri reali,  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$  lo spazio affine di dimensione  $n$  su  $\mathbb{R}$  e sia  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  l'anello dei polinomi in  $n$  indeterminate su  $\mathbb{R}$ . Per semplicità, in tutto il lavoro, indicheremo con le lettere  $x, y, z, w$  rispettivamente le indeterminate  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Per il Teorema della Base di Hilbert, poiché  $\mathbb{R}$  è un campo (dunque noetheriano), si ha che  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  è un anello noetheriano, e che i suoi ideali sono quindi finitamente generati.

Dato  $S \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  un insieme di polinomi, indichiamo con  $\langle S \rangle$  l'ideale generato da  $S$ , ovvero le combinazioni lineari finite di elementi di  $S$  con coefficienti polinomi di  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . Indichiamo infine con  $\langle f_1, \dots, f_l \rangle = \langle \{f_1, \dots, f_l\} \rangle$ .

Possiamo definire, a partire da un ideale

$$I = \langle f_1, \dots, f_l \rangle \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n],$$

un sottoinsieme  $V(I) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$  della forma

$$V(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n \mid f(x) = 0 \text{ per ogni } f \in I\}$$

ovvero

$$V(I) = \{x \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n \mid f_j(x) = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, l\}.$$

**Definizione 1.2.1.**  $V(I) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$  è la **varietà algebrica affine** associata all'ideale  $I$ .

Viceversa, se  $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$ , si può considerare l'insieme dei polinomi

$$I(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \mid g(x) = 0 \text{ per ogni } x \in X\}$$

che è evidentemente un ideale di  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ .

Sia adesso  $\mathbb{K}$  un campo e sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n+1$  su  $\mathbb{K}$ . Indicheremo con  $\mathbb{P}(V)$  lo **spazio proiettivo  $n$ -dimensionale su  $\mathbb{K}$** , ovvero l'insieme dei sottospazi vettoriali di  $V$  di dimensione 1. Con la notazione  $\mathbb{P}(V) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  si intende lo stesso spazio, identificando  $V \cong \mathbb{K}^{n+1}$  tramite un opportuno isomorfismo di spazi vettoriali (una scelta di coordinate su  $V$ ).

Un polinomio  $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  si dice **omogeneo di grado  $d$**  se ogni monomio di  $F$  è di grado  $d$  in  $x_0, \dots, x_n$  o equivalentemente se  $F(\lambda X) = \lambda^d F(X)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Definizione 1.2.2.**  $X \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  è una **varietà proiettiva** se  $X$  è il luogo di zeri di un insieme di polinomi omogenei  $S \subseteq \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ , ovvero se  $X = V(S) = V(\langle S \rangle)$ . Dato invece un sottinsieme  $Y \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ , l'**ideale omogeneo** di  $Y$  è l'ideale  $I(Y) \subseteq \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$  generato da tutti i polinomi omogenei che si annullano in  $Y$ .

Se  $F$  è un polinomio omogeneo di grado  $d$ , si dice che  $X = V(F)$  è una **ipersuperficie** di grado  $d$ . Se  $d = 1$ ,  $X$  è anche detto **iperpiano**. Per le nozioni di dimensione, grado, irriducibilità e componenti irriducibili di generiche varietà proiettive ci rifacciamo a [Harr] e [Hart]. Citiamo i seguenti fatti fondamentali:

**Teorema 1.2.1.** *Siano  $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{P}^n$  varietà proiettive,  $Y$  irriducibile e  $\dim(Y) = \dim(X)$ . Allora  $X = Y$ .*

**Teorema 1.2.2.** *Sia  $X \subseteq \mathbb{P}^n$  una varietà irriducibile di dimensione  $r$  e sia  $V(F)$  una ipersuperficie non contenente alcuna componente irriducibile di  $X$ . Allora ogni componente irriducibile di  $X \cap V(F)$  ha dimensione  $r - 1$ .*

**Osservazione 1.2.1.** Facilmente si può mostrare che vale la seguente caratterizzazione: un ideale  $J \subseteq \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$  è generato da polinomi omogenei se e solo se per ogni  $F \in J$ , tutte le componenti omogenee di  $F$  appartengono a  $J$ . In questo caso, si dice che l'ideale  $J$  è omogeneo.

Notiamo le seguenti proprietà delle sottovarietà proiettive di  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ :

1.  $V(x_0, \dots, x_n) = \emptyset$  e  $V(0) = \mathbb{R}\mathbb{P}^n$
2.  $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2)$
3.  $\bigcap_i V(I_i) = V\left(\sum_i I_i\right)$

Tali proprietà ricalcano quelle della famiglia dei chiusi di una topologia.

**Definizione 1.2.3.** Si chiama **Topologia di Zariski** su  $\mathbb{RP}^n$  la topologia i cui insiemi chiusi sono le sottovarietà proiettive di  $\mathbb{RP}^n$ .

Saremo anche interessati a considerare, dato un certo insieme affine  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  o proiettivo  $B \subseteq \mathbb{RP}^n$ , la sua chiusura rispetto alla Topologia di Zariski:

**Definizione 1.2.4.** Chiamiamo **chiusura di Zariski** di  $A$  (rispettivamente di  $B$ ) la più piccola varietà affine (rispettivamente varietà proiettiva) contenente  $A$  (risp.  $B$ ). La indicheremo con  $\overline{\text{Zar}}(A)$  (rispettivamente  $\overline{\text{Zar}}(B)$ ).

**Definizione 1.2.5.** Dati i polinomi  $F_1, \dots, F_l, G_1, \dots, G_t$  chiamiamo l'insieme della forma

$$S = \left\{ x \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n \mid F_j(x) \geq 0 \forall j, G_i = 0 \forall i \right\}$$

una **varietà semialgebrica affine**.

### 1.2.1 La varietà di Veronese

Sia dunque  $\mathbb{RP}^n$  lo spazio proiettivo  $n$ -dimensionale su  $\mathbb{R}$  e sia  $d \in \mathbb{N}$ . Indichiamo con

$$\mathcal{I}(n, d) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ I = (i_1, \dots, i_n) \mid \sum_{j=1}^n i_j = d, i_j \in \mathbb{N} \right\}$$

l'insieme dei multiindici di  $\mathbb{N}^n$  la somma delle cui componenti è uguale a  $d$ . Esso è formato (vedi [GKZ], p. 427) dai punti a coordinate naturali del simpleso

$$d\Delta^{n-1} = \left\{ (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n i_j = d, i_j \geq 0 \right\},$$

ovvero  $\mathcal{I}(n, d) = \mathbb{Z}^n \cap d\Delta^{n-1}$ .

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ . Denotiamo con  $V^{\otimes d}$  il prodotto tensoriale di  $d$  copie di  $V$  e sia  $\mathfrak{S}_d$  il gruppo simmetrico sull'insieme di  $d$  elementi. Esiste una azione naturale di  $\mathfrak{S}_d$  su  $V^{\otimes d}$  data da  $\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_d) = v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(d)}$ . Sia  $\pi: V^{\otimes d} \rightarrow V^{\otimes d}$  data da

$$\pi(v_1 \otimes \dots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(d)}.$$

L'immagine  $S^d(V) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(V^{\otimes d})$  è chiamata  **$d$ -esima potenza simmetrica** di  $V$ . Lo spazio  $S^d(V)$  è in corrispondenza con l'insieme dei polinomi omogenei di grado  $d$  su  $n$  indeterminate. Consideriamo ora l'immersione

$$\mathcal{V}_{n,d}: \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^{\binom{n+d}{d}-1} \cong \mathbb{P}(S^d(\mathbb{R}^n)) \quad (1.4)$$

dove, in coordinate

$$\mathcal{V}_{n,d}([x_0 : \dots : x_n]) = [\dots : X^I : \dots]$$

al variare di  $X^I$  monomio di grado  $d$  in  $x_0, \dots, x_n$ :

$$X^I = \prod_{j=1}^n x_j^{i_j} \text{ al variare di } I \in \mathcal{I}(n, d). \quad (1.5)$$

Sia ora  $N = \binom{n+d}{d} - 1$ . La funzione  $\mathcal{V}_{n,d}$  è una mappa regolare da  $\mathbb{R}P^n$  in  $\mathbb{R}P^N$  chiamata **Embedding di Veronese**, mentre l'immagine  $\mathcal{V}_{n,d}(\mathbb{R}P^n) \subseteq \mathbb{R}P^N$  è una sottovarietà proiettiva di  $\mathbb{R}P^N$  chiamata **Varietà di Veronese**, così come tutte le varietà ad essa proiettivamente equivalenti.

La varietà di Veronese è intersezione di quadriche di  $\mathbb{R}P^N$ , in quanto essa è descritta da tutte le equazioni della forma  $X^I X^J = X^K X^L$  ovvero della forma

$$z_I z_J = z_K z_L$$

nelle coordinate omogenee dell'immagine: esse rappresentano delle ipersuperfici quadriche, e sono tante quante le doppie coppie distinte  $((I, J), (K, L))$  di multiindici tali che  $I_t + J_t = K_t + L_t$  per ogni  $t = 1, \dots, n$  e tali che la somma delle componenti di  $I_t + J_t$  sia  $d$ .

Diamo una ulteriore descrizione geometrica della varietà di Veronese. Consideriamo, ad esempio, l'insieme

$$Y = \left\{ \text{coniche di } \mathbb{R}P^2 \right\}.$$

Poiché una conica  $\mathcal{C}$  del piano proiettivo è rappresentata (modulo scalari) da un polinomio omogeneo di secondo grado in tre indeterminate della forma

$$\mathcal{C} : u_{00}x^2 + 2u_{01}xy + 2u_{02}xz + u_{11}y^2 + 2u_{12}yz + u_{22}z^2 = 0$$

è dunque immediata l'identificazione

$$\sigma : Y \rightarrow \mathbb{R}P^5$$

dove  $\sigma(\mathcal{C}) = [u_{00} : u_{01} : u_{02} : u_{11} : u_{12} : u_{22}]$ , tramite cui  $\mathbb{R}P^5$  parametrizza le coniche piane. Considerando parallelamente l'immagine del secondo embedding di Veronese

$$\mathcal{V}_{2,2}(\mathbb{R}P^2) = \left\{ [t_0^2 : t_0 t_1 : t_0 t_2 : t_1^2 : t_1 t_2 : t_2^2] \mid [t_0 : t_1 : t_2] \in \mathbb{R}P^2 \right\} \subseteq \mathbb{R}P^5$$

si nota che le relazioni che definiscono la varietà (che sono polinomi omogenei di grado 2 nelle coordinate omogenee di  $\mathbb{R}P^5$ ) sono rappresentabili come l'annullamento di tutti i minori di ordine 2 della matrice

$$M = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ u_{01} & u_{11} & u_{12} \\ u_{02} & u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}$$

nelle coordinate omogenee dell'immagine  $\mathbb{R}P^5$ , per cui i punti di  $\mathbb{R}P^5$  che appartengono alla varietà di Veronese sono tutte e sole le coniche la cui matrice ha rango 1, ovvero

doppiamente degeneri. Dunque la superficie di Veronese in  $\mathbb{RP}^5$  è proprio:

$$\mathcal{V}_{2,2}(\mathbb{RP}^2) = \left\{ \text{rette doppie di } \mathbb{RP}^2 \right\}.$$

In generale, possiamo identificare lo spazio  $\mathbb{RP}^{\binom{n+d}{d}-1}$  con l'insieme

$$\mathbb{RP}^{\binom{n+d}{d}-1} = \left\{ \text{ipersuperfici di grado } d \text{ in } x_0, \dots, x_n \right\} \quad (1.6)$$

e l'immagine di  $V_{n,d}$  con

$$\mathcal{V}_{n,d}(\mathbb{RP}^n) = \left\{ \text{potenze } d\text{-esime di forme lineari in } x_0, \dots, x_n \right\}. \quad (1.7)$$

### 1.3 Risultanti e discriminanti

Trattando di funzioni polinomiali in più variabili, è interessante talvolta indagare se due polinomi hanno o meno radici comuni nei loro campi di spezzamento. Iniziamo con il caso ad una variabile.

**Teorema 1.3.1.** *Sia  $D$  un Dominio a Fattorizzazione Unica, e siano  $f(x)$  e  $g(x)$  in  $D[x]$  di grado  $m \geq 0$  ed  $n \geq 0$  rispettivamente. Allora  $f$  e  $g$  hanno un fattore irriducibile comune se e solo se esistono  $A, B \in D[x]$  di grado rispettivamente  $n-1$  e  $m-1$  tali che  $Af + Bg = 0$ .*

*Dimostrazione.* Se  $f = H\tilde{f}$  e  $g = H\tilde{g}$ , allora ponendo  $A = \tilde{f}$  e  $B = -\tilde{g}$  si ha la tesi. Viceversa, se  $Af = -Bg$ , si ha che ogni fattore irriducibile di  $g$  divide  $A$  o  $f$ : poiché  $\deg A = \deg g - 1$ , allora un fattore irriducibile di  $g$  divide  $f$ .  $\square$

Dunque, dati  $f$  e  $g$  come sopra, il problema di determinare se essi hanno un fattore comune equivale al problema di risolvere il sistema lineare

$$Af + Bg = 0 \quad (1.8)$$

che ha come incognite i coefficienti dei polinomi  $A$  e  $B$ . Tale sistema è omogeneo, dunque si trovano soluzioni accettabili  $(A, B) \neq (0, 0)$  se e solo se si annulla il determinante della matrice  $(m+n) \times (m+n)$

$$R_{f,g} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_m & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ g_0 & g_1 & \dots & g_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & \dots & g_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & g_0 & g_1 & \dots & \dots & g_n \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

dove  $f(x) = f_0 + f_1x + \dots + f_mx^m$  e  $g(x) = g_0 + g_1x + \dots + g_nx^n$ , con  $f_m \neq 0$  e  $g_n \neq 0$ . Diamo dunque la seguente

**Definizione 1.3.1** (Formula di Sylvester). Chiamiamo il **risultante** di  $f$  e  $g$  il polinomio  $\text{Res}(f, g) = \det(\mathbf{R}_{f,g})$  biomogeneo di grado  $n$  nei coefficienti di  $f$  e  $m$  in quelli di  $g$ .

Una caratterizzazione del risultante che ci sembra importante afferma che

$$\text{Res}(f, g) = f_m^n g_n^m \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$$

dove  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  sono le radici di  $f$  e  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  quelle di  $g$ .

Per una teoria generale riguardo ai risultanti di polinomi in più variabili rimandiamo a [GKZ], cap. 13. Ci basti sapere che, nel caso particolare in cui si considerano  $f_0, \dots, f_n$  polinomi omogenei in  $x_0, \dots, x_n$  è possibile costruire un polinomio irriducibile  $\text{Res}(f_0, \dots, f_n)$  nei coefficienti degli  $f_i$  che è nullo quando questi ultimi hanno una radice comune in  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

È noto, inoltre, che per un polinomio di secondo grado  $f(x) = ax^2 + bx + c$  a coefficienti reali vale la seguente equivalenza:

$$f \text{ ha una radice doppia} \iff \Delta(f) = b^2 - 4ac = 0.$$

Si nota che in questo caso  $f$  ha in comune tale radice con la derivata  $f'(x) = 2ax + b$ , ed infatti risulta che

$$\text{Res}(f, f') = \det \begin{pmatrix} c & b & a \\ b & 2a & 0 \\ 0 & b & 2a \end{pmatrix} = -a \cdot \Delta(f) = 0.$$

Poiché  $a \neq 0$ , si ottiene che  $\text{Res}(f, f') = 0$  se e solo se  $\Delta(f) = 0$ .

Vorremmo generalizzare il polinomio  $\Delta$  costruendo, dato un qualsiasi polinomio omogeneo  $F \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ , un polinomio  $\Delta(F)$  che sia nullo se  $F$  è divisibile per il quadrato di una forma lineare:

$$F \text{ ha radici multiple} \iff \Delta(F) = 0. \tag{1.10}$$

Sia dunque  $F$  polinomio in  $x_0, \dots, x_n$  omogeneo di grado  $m$ .

**Definizione 1.3.2.** Chiamiamo **discriminante** del polinomio  $F$  il polinomio

$$\Delta(F) = \pm m^{\frac{(-1)^{n+1} - (m-1)^{n+1}}{m}} \cdot \text{Res} \left( \frac{\partial F}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

L'equivalenza (1.10) è garantita dal seguente noto risultato dovuto a Eulero:

**Teorema 1.3.2** (Identità di Eulero).  $F$  polinomio omogeneo di grado  $m$  in  $x_0, \dots, x_n$ . Allora

$$m \cdot F = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

## Capitolo 2

# Coni di Hilbert

$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  è un anello graduato in cui la componente omogenea di grado  $m$  è rappresentata dal sottogruppo dei polinomi omogenei di grado  $m$  in  $n$  indeterminate. Indichiamo la scomposizione di  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  in questo modo:

$$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{F}_{n,m}$$

dove

$$\mathbf{F}_{n,m} \stackrel{def}{=} \left\{ F \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \text{ omogeneo di grado } m \right\}. \quad (2.1)$$

$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  è anche uno spazio vettoriale reale; allo stesso modo ogni  $\mathbf{F}_{n,m}$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $N(n, m) = \binom{n+m-1}{n-1}$ . Possiamo osservare infatti che  $\mathbf{F}_{n,m}$  è generato dai monomi della forma  $X^I$  come sono stati introdotti in (1.5). Chiameremo questa la **base monomiale** di  $\mathbf{F}_{n,m}$ :

$$\mathbf{F}_{n,m} = \langle X^I \mid I \in \mathcal{I}(n, m) \rangle. \quad (2.2)$$

Con queste notazioni, posto

$$|I| = \sum_{j=1}^n i_j$$

e

$$c(I) = \binom{|I|}{i_1, \dots, i_n} = \frac{|I|!}{\prod_{j=1}^n i_j!}$$

si ha dunque che un polinomio  $F \in \mathbf{F}_{n,m}$  ha una tipica rappresentazione della forma

$$F(X) = F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{I \in \mathcal{I}(n,m)} c(I) a(F; I) X^I. \quad (2.3)$$

Dunque rappresenteremo con il simbolo  $a(F, I)$  il coefficiente del polinomio  $F$  riferito al monomio  $X^I$  diviso per il coefficiente multinomiale  $c(I)$ . Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , se  $\star$  è il prodotto scalare euclideo su  $\mathbb{R}^n$ , denotiamo con

$$(\alpha \star)^m(X) \stackrel{def}{=} (\alpha \star X)^m = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right)^m = \sum_{I \in \mathcal{I}(n,m)} c(I) \alpha^I X^I \in \mathbf{F}_{n,m}. \quad (2.4)$$

Notiamo che

$$a((\alpha\star)^m; I) = \alpha^I = \prod_{k=1}^n \alpha_k^{i_k}.$$

**Esempio 2.0.1.** Sia  $F(x, y, z) = 3x^2 + 7xy + 4xz - 4y^2 + 9yz - 6z^2$  un polinomio di  $\mathbf{F}_{3,2}$ . Si ha che

$$\begin{aligned} a(F, (2, 0, 0)) &= \frac{3}{c(2,0,0)} = 3 & a(F, (1, 1, 0)) &= \frac{7}{c(1,1,0)} = \frac{7}{2} \\ a(F, (1, 0, 1)) &= \frac{4}{c(1,0,1)} = 2 & a(F, (0, 2, 0)) &= -\frac{4}{c(0,2,0)} = -4 \\ a(F, (0, 1, 1)) &= \frac{9}{c(0,1,1)} = \frac{9}{2} & a(F, (0, 0, 2)) &= -\frac{6}{c(0,0,2)} = -6 \end{aligned}$$

che sono proprio i termini della matrice  $B$  che rappresenta  $F$  come forma quadratica:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & \frac{7}{2} & 2 \\ \frac{7}{2} & -4 & \frac{9}{2} \\ 2 & \frac{9}{2} & -6 \end{pmatrix}.$$

## 2.1 Dualità per $\mathbf{F}_{n,m}$ e insiemi di nodi

Abbiamo visto che  $\mathbf{F}_{n,m}$  è uno spazio vettoriale a dimensione finita sui reali, e si è anche esibita una base “canonica” formata dai monomi  $X^I$  dove  $I$  è un multiindice di  $\mathcal{S}(n, m)$ . Per questo, anche lo spazio duale di  $\mathbf{F}_{n,m}$  ha dimensione finita sui reali, e tale dimensione è la stessa di  $\mathbf{F}_{n,m}$ .

A seguito di ciò, fissata la base monomiale  $\mathcal{E}$ , è possibile trovare una base  $\mathcal{E}'$  dello spazio duale  $(\mathbf{F}_{n,m})'$  che sia duale rispetto alla base  $\mathcal{E}$  fissata, ovvero tale che, se  $\partial_I \in \mathcal{E}'$ , si abbia

$$\partial_I(X^J) = \delta_{IJ}$$

per ogni  $I, J \in \mathcal{S}(n, m)$ , dove  $\delta_{IJ}$  è il simbolo delta di Kronecker (e dove si intende, ovviamente, che due multiindici  $I, J$  sono diversi se e solo se esiste  $l \in \{1, \dots, n\}$  tale che  $i_l \neq j_l$ ). La base duale della base monomiale per  $\mathbf{F}_{n,m}$  sarà dunque l'insieme  $\mathcal{E}' = \{\partial_J \mid J \in \mathcal{S}(n, m)\}$  formato dalle derivazioni

$$\partial_J \stackrel{def}{=} \left( \frac{1}{\prod_{l=1}^n j_l!} \right) \frac{\partial}{\partial X^J} \tag{2.5}$$

dove

$$\frac{\partial}{\partial X^J} \stackrel{def}{=} \frac{\partial^{|J|}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_n^{j_n}}.$$

Dunque si ha

$$\mathbf{F}'_{n,m} = \langle \partial_I \mid I \in \mathcal{S}(n, m) \rangle.$$

Consideriamo adesso l'isomorfismo  $\varphi: \mathbf{F}_{n,m} \rightarrow \mathbf{F}'_{n,m}$  riferito a  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  dove

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{1}{m!} \frac{\partial}{\partial X^J} \mid J \in \mathcal{S}(n, m) \right\} = \left\{ \frac{\partial_J}{c(J)} \mid J \in \mathcal{S}(n, m) \right\}.$$

Nel nostro caso le due forme bilineari

$$[F, G]_{\varphi,1} = (\varphi(F))(G) \quad \text{e} \quad [F, G]_{\varphi,2} = (\varphi(G))(F),$$

coincidono e sono uguali a

$$\begin{aligned}
(\varphi(F))(G) &= \sum_{I \in \mathcal{J}(n,m)} c(I)a(F;I) \frac{1}{m!} \frac{\partial}{\partial X^I} \left( \sum_{J \in \mathcal{J}(n,m)} c(J)a(G;J)X^J \right) = \\
&= \sum_{I, J \in \mathcal{J}(n,m)} c(I)c(J)a(F;I)a(G;J) \frac{1}{m!} \frac{\partial}{\partial X^I} (X^J) = \\
&= \sum_{I \in \mathcal{J}(n,m)} c(I)^2 a(F;I)a(G;I) \frac{1}{m!} \prod_{l=1}^n i_l! = \\
&= \sum_{I \in \mathcal{J}(n,m)} c(I)a(F;I)a(G;I) = (\varphi(G))(F).
\end{aligned}$$

Inoltre

$$(\varphi(F))(F) = \sum_{I \in \mathcal{J}(n,m)} c(I)a(F;I)^2 \geq 0$$

e vale l'uguaglianza a zero se e solo se (poiché tutti i termini della somma sono non negativi)  $a(F;I) = 0$  per ogni  $I$ , ovvero se e solo se  $F = 0$ , per il principio di identità dei polinomi.

Dunque, in questo lavoro faremo riferimento alla forma bilineare (detta **di apolarità**)

$$[F, G] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I \in \mathcal{J}(n,m)} c(I)a(F;I)a(G;I) \quad (2.6)$$

che è un prodotto interno su  $\mathbf{F}_{n,m}$ .

Notiamo che, identificando un polinomio  $H$  con le sue coordinate rispetto alla base monomiale, quindi pensandolo come un elemento di  $\mathbb{R}^{N(n,m)}$  rispetto ad un fissato ordine monomiale, il prodotto interno  $[\cdot, \cdot]$  risulta essere l'usuale prodotto euclideo, pesato sui coefficienti  $c(I)$ . Dunque, in questo lavoro considereremo lo spazio duale  $\mathbf{F}'_{n,m}$  ancora come un insieme di polinomi tramite l'identificazione seguente. Sia  $p \in \mathbf{F}'_{n,m}$ , allora

$$p = \sum_{I \in \mathcal{J}(n,m)} c(I)a(p;I) \frac{\partial_I}{c(I)} = \sum_{I \in \mathcal{J}(n,m)} a(p;I)\partial_I$$

e vale che, per ogni  $F \in \mathbf{F}_{n,m}$

$$\begin{aligned}
p(F) &= \sum_{I \in \mathcal{J}(n,m)} a(p;I)\partial_I \left( \sum_{J \in \mathcal{J}(n,m)} c(J)a(F;J)X^J \right) = \\
&= \sum_{I \in \mathcal{J}(n,m)} \sum_{J \in \mathcal{J}(n,m)} c(J)a(p;I)a(F;J)\delta_{IJ} = \\
&= \sum_{I \in \mathcal{J}(n,m)} c(I)a(p;I)a(F;I) = \\
&= [\tilde{p}, F],
\end{aligned}$$

dove

$$\tilde{p}(X) = \sum_{I \in \mathcal{I}(n,m)} c(I)a(p; I)X^I = \varphi^{-1}(p).$$

**Esempio 2.1.1.** Un caso particolarmente interessante riguardo al prodotto  $[F, g]$  è quando  $g$  è della forma  $g(X) = (\alpha \star)^m(X)$  (vedi (2.4)) con  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , per cui

$$[F, g] = \sum_{I \in \mathcal{I}(n,m)} c(I)a(F; I)\alpha^I = F(\alpha)$$

Generalizzando, se  $h(X) = \sum_{k=1}^r (\alpha_k \star)^m(X)$ , allora per linearità

$$[F, h] = \sum_{k=1}^r F(\alpha_k). \quad (2.7)$$

Sia adesso  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ , e consideriamo l'insieme delle combinazioni lineari delle potenze di forme lineari, associate ai sottoinsiemi finiti di  $A$ , come accennato in (2.4), ovvero l'insieme

$$V_A = \left\{ \sum_{k=1}^l \lambda_k (\alpha_k \star)^m \mid l \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha_k \in A \right\} \subseteq \mathbf{F}_{n,m}$$

Come si è detto in (1.7), per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$   $l(X) = (\alpha \star)^m(X)$  appartiene alla varietà di Veronese  $\mathcal{V}_{n-1,m}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1})$ , per cui tale insieme di combinazioni a coefficienti reali risulta essere l'involuppo affine del cono affine dell'immagine secondo  $\mathcal{V}_{n-1,m}$  di  $A$ , ovvero

$$V_A = \text{aff}\left(C_a(\mathcal{V}_{n-1,m}(A))\right),$$

dove si intende per cono affine di un insieme proiettivo  $Z \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  l'insieme

$$C_a(Z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid [x] \in Z\}.$$

Calcoliamone lo spazio ortogonale dentro  $\mathbf{F}_{n,m}$ :

**Proposizione 2.1.1.** *L'ortogonale di  $V_A$  in  $\mathbf{F}_{n,m}$  è  $I(A) \cap \mathbf{F}_{n,m}$ .*

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} V_A^\perp &= \left\{ F \in \mathbf{F}_{n,m} : 0 = \left[ F, \sum_{k=1}^l \lambda_k (\alpha_k \star)^m \right], \text{ per ogni } \lambda_1, \dots, \lambda_l \right\} = \\ &= \left\{ F \in \mathbf{F}_{n,m} : 0 = \sum_{k=1}^l \lambda_k F(\alpha_k), \text{ per ogni } \lambda_1, \dots, \lambda_l \right\} = \\ &= \left\{ F \in \mathbf{F}_{n,m} : F(\alpha) = 0, \text{ per ogni } \alpha \in A \right\} = \\ &= I(A) \cap \mathbf{F}_{n,m}. \end{aligned}$$

□

**Definizione 2.1.1.** Sia  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_h\} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $A$  è **m-indipendente** se i polinomi  $\{(\alpha_k \star)^m\}$  sono linearmente indipendenti in  $\mathbf{F}_{n,m}$ .

**Definizione 2.1.2.** Sia  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_h\}$  m-indipendente. Se  $h = N(n, m) = \dim(\mathbf{F}_{n,m})$ , allora  $\{(\alpha_k \star)^m\}$  genera  $\mathbf{F}_{n,m}$  e  $A$  è detto **insieme base di nodi** per  $\mathbf{F}_{n,m}$ .

**Corollario 2.1.1.** Sono dunque equivalenti per  $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ :

1.  $I(A) \cap \mathbf{F}_{n,m} = \{0\}$
2.  $V_A = \mathbf{F}_{n,m}$
3.  $A$  è un insieme base di nodi

**Esempio 2.1.2.** L'insieme  $V_A$  non è identificato dall'insieme  $A$ . Infatti, consideriamo  $\mathcal{V}_{1,2}(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^2$  l'immagine di  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$  tramite il secondo embedding di Veronese, ovvero la conica piana  $\mathcal{C} = V(z_{00}z_{11} - z_{01}^2)$  espressa nelle coordinate omogenee dell'immagine. Siano  $W_1 = \{P_1, P_2, P_3\}$  e  $W_2 = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$  due terne distinte di punti in posizione generale di  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ . Allora le rispettive immagini giacciono sulla conica  $\mathcal{C}$  e i rispettivi coni affini sono due terne di vettori in posizione generale in  $\mathbb{R}^3$ . Dunque

$$V_{W_1} = V_{W_2} = \mathbb{R}^3.$$

**Teorema 2.1.1** (Serret).  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_h\} \subseteq \mathbb{R}^n$  è m-indipendente se e solo se esiste  $\{l_1, \dots, l_h\} \subseteq \mathbf{F}_{n,m}$  tale che  $l_j(\alpha_k) = \delta_{jk}$ , ovvero se e solo se esiste un insieme di forme duali di grado  $m$  per  $A$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo che tali polinomi esistano e che  $q = \sum \lambda_k (\alpha_k \star X)^m$  sia la forma nulla; allora

$$0 = [q, l_i] = \sum \lambda_k l_i(\alpha_k) = \lambda_i$$

per ogni  $i$ . Viceversa, basta prendere la base duale  $\{l_j\}$  dell'insieme di vettori linearmente indipendenti  $\{(\alpha_k \star)^m\}$ , per cui  $\delta_{jk} = [l_j, (\alpha_k \star)^m] = l_j(\alpha_k)$ .  $\square$

Ogni spazio  $\mathbf{F}_{n,m}$  contiene un insieme base di nodi (è sufficiente prendere i vettori relativi ad una base di  $V_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n} = \mathbf{F}_{n,m}$ ) ed inoltre si può costruire un insieme di forme duali per  $\mathcal{S}(n, m)$ , che risulta dunque un insieme base di nodi per  $\mathbf{F}_{n,m}$  (per tutto questo rimandiamo a [Rel]).

Inoltre, poiché  $\mathbf{F}_{n,m}$  è generato dai suoi monomi,  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{N(n,m)}\}$  è un insieme base di nodi se e solo se, per ogni  $I \in \mathcal{S}(n, m)$ , esistono dei coefficienti reali  $\lambda_k(I)$  tali che

$$X^I = \sum_{k=1}^{N(n,m)} \lambda_k(I) (\alpha_k \star X)^m,$$

ovvero, moltiplicando entrambi i membri per un generico  $G \in \mathbf{F}_{n,m}$

$$a(G; I) = \sum_{k=1}^{N(n,m)} \lambda_k(I) G(\alpha_k). \tag{2.8}$$

Dunque, se  $A$  è un insieme base di nodi, allora i coefficienti di un qualsiasi polinomio  $G$  sono combinazioni lineari dei valori di  $G$  sugli elementi di  $A$ .

## 2.2 La forma quadratica $\mathbf{H}_F$

Faremo vedere in questa sezione che è possibile associare ad ogni polinomio  $F \in \mathbf{F}_{n,m}$  una data forma quadratica  $H_F$  in modo biunivoco. Sia dunque  $m = 2s$ ,  $T = (T_L)_{L \in \mathcal{J}(n,s)}$  una  $N(n,s)$ -upla di indeterminate e

$$\mathcal{L}(X; T) = \sum_{L \in \mathcal{J}(n,s)} X^L T_L$$

dove come al solito si intende  $X^L = x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$  se  $L = (l_1, \dots, l_n)$ . Dunque si ha che

$$\mathbf{F}_{n,s} = \left\{ \mathcal{L}(X; T) \mid T \in \mathbb{R}^{N(n,s)} \right\}$$

ovvero che  $\mathcal{L}(X; T)$  descrive  $\mathbf{F}_{n,s}$  quando  $T$  varia in  $\mathbb{R}^{N(n,s)}$ , e che  $\mathcal{L}$  è una forma lineare in  $T$ . Calcoliamo adesso il quadrato di  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}^2(X; T) = \sum_{L \in \mathcal{J}(n,s)} \sum_{M \in \mathcal{J}(n,s)} T_L T_M X^{L+M} = \sum_{I \in \mathcal{J}(n,m)} \sum_{L+M=I} T_L T_M X^I,$$

ed  $\mathcal{L}^2 \in \mathbf{F}_{n,m}$ . Possiamo allora moltiplicare il risultato contro un polinomio generico  $F \in \mathbf{F}_{n,m}$ , ottenendo la seguente

**Definizione 2.2.1.** Chiamiamo la forma quadratica nelle variabili  $T$

$$\mathbf{H}_F(T) \stackrel{\text{def}}{=} [F(X), \mathcal{L}^2(X; T)] = \sum_L \sum_M a(F; L+M) T_L T_M \quad (2.9)$$

**forma di Hankel** del polinomio  $F$ .

**Proposizione 2.2.1.** *La forma di Hankel è univocamente determinata dal polinomio  $F$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\mathbf{H}_F = \mathbf{H}_G$  per certi  $F, G \in \mathbf{F}_{n,m}$ . Questo significa che  $\mathbf{H}_F(T) = \mathbf{H}_G(T)$  per ogni  $T \in \mathbb{R}^{N(n,s)}$ . Dunque per il principio dell'identità dei polinomi  $a(F, J) = a(G, J)$  per ogni  $J \in \mathcal{J}(n, m)$  da cui  $F = G$ .  $\square$

Tali matrici di ordine  $N(n, s)$  con  $s = \frac{m}{2}$ , che rappresentano la forma di Hankel associata ad un polinomio  $F$ , sono anche note come **catalettici simmetrici**. Il nome di forma di Hankel non è casuale, come si evince da alcuni casi particolari.

**Esempio 2.2.1.** Consideriamo inizialmente il caso  $n = 2$ ,  $m = 2$ . Sia

$$F(x, y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 \in \mathbf{F}_{2,2}.$$

In questo caso si ha  $I(2, 1) = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ,  $T = (T_{(1,0)}, T_{(0,1)}) = (t_1, t_2)$  e  $\mathcal{L}(X; T) = xt_1 + yt_2$ . Dunque

$$\mathcal{L}^2(X; T) = x^2t_1^2 + y^2t_2^2 + 2xyt_1t_2$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_F(t_1, t_2) &= [b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2, x^2t_1^2 + y^2t_2^2 + 2xyt_1t_2] = \\ &= b_{11}t_1^2 + 2b_{12}t_1t_2 + b_{22}t_2^2,\end{aligned}$$

ovvero  $\mathbf{H}_F(t_1, t_2)$  è la forma quadratica di matrice

$$B_{2,2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

come  $F$  stesso.

**Esempio 2.2.2.** Generalizzando al caso  $m = 2$  consideriamo la forma quadratica

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i \leq j} b_{ij}x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n c(I_{ij})a(G, I_{ij})X^{I_{ij}}$$

dove per semplicità si intende  $I_{ij} = e_i + e_j$  dove  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Dunque si ha  $I(n, 1) = \{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $T = (T_{e_1}, \dots, T_{e_n}) = (t_1, \dots, t_n)$  e  $\mathcal{L}(X; T) = x_1t_1 + \dots + x_nt_n$ . Quindi, in questo caso

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_G(t_1, \dots, t_n) &= \left[ \sum_{i=1}^n b_{ii}X^{I_{ii}} + \sum_{i \leq j} 2b_{ij}X^{I_{ij}}, \sum_{i=1}^n t_i^2 X^{I_{ii}} + \sum_{i \leq j} 2t_i t_j X^{I_{ij}} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n b_{ii}t_i^2 + \sum_{i \leq j} 2b_{ij}t_i t_j,\end{aligned}$$

ovvero  $\mathbf{H}_G(t_1, \dots, t_n)$  è la forma quadratica di matrice

$$B_{n,2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

come  $G$  stesso.

**Esempio 2.2.3.** Analizziamo poi il caso delle forme binarie,  $n = 2$ ,  $m = 2s$ . Sia

$$L(x, y) = \sum_{i=0}^m c_i x^i y^{m-i} = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a(L; (i, m-i)) x^i y^{m-i} \in \mathbf{F}_{2,m},$$

con  $a(L; (i, m-i)) = \frac{c_i}{\binom{m}{i}}$ .

Allora  $\mathbb{R}^{N(2,s)} = \mathbb{R}^{s+1} \ni T = (T_{(0,s)}, \dots, T_{(s,0)}) = (t_0, \dots, t_s)$ ,

$$\mathcal{L}(x, y; t_0, \dots, t_s) = \sum_{j=0}^s X^{(j,s-j)} T_{(j,s-j)} = \sum_{j=0}^s t_j x^j y^{s-j}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_L(t_0, \dots, t_s) &= [L, \mathcal{L}^2] = \\
 &= \left[ \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a(L; (i, m-i)) x^i y^{m-i}, \sum_{i=0}^m \left( \sum_{l+r=i} t_l t_r \right) x^i y^{m-i} \right] = \\
 &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a(L; (i, m-i)) \frac{1}{\binom{m}{i}} \sum_{l+r=i} t_l t_r = \\
 &= \sum_{i=0}^m \sum_{l+r=i} t_l t_r a(L; (i, m-i)) = \\
 &= a(L; (0, m)) t_0^2 + a(L; (1, m-1)) (t_0 t_1 + t_1 t_0) + \\
 &\quad + a(L; (2, m-2)) (t_0 t_2 + t_1^2 + t_2 t_0) + \dots + a(L; (m, 0)) t_s^2.
 \end{aligned}$$

Ovvero  $\mathbf{H}_L$  è la forma quadratica di matrice  $B_{2,m} = (b_{lr})$  dove  $b_{lr} = a(L; (l+r, m-l-r))$ ;  $B_{2,m}$  è, dunque, una matrice le cui diagonali a pendenza positiva sono costanti:

$$B_{2,m} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} & \cdots & b_{0s} \\ b_{01} & b_{02} & b_{03} & \cdots & \cdots & b_{1s} \\ b_{02} & b_{03} & \cdots & \cdots & b_{1s} & b_{2s} \\ b_{03} & \cdots & \cdots & b_{1s} & b_{2s} & b_{3s} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b_{0s} & b_{1s} & b_{2s} & \cdots & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Una generica matrice di questo tipo è detta *matrice di Hankel*.

**Esempio 2.2.4.** Consideriamo infine il caso della quartiche piane: sia

$$P(x, y, z) = \sum_{i+j+k=4} c_{ijk} a_{ijk} x^i y^j z^k \in \mathbf{F}_{3,4}.$$

Si ha che  $N(3, 2) = \binom{4}{2} = 6$ , e quindi indicando con

$$(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (T_{(200)}, T_{(020)}, T_{(002)}, T_{(110)}, T_{(101)}, T_{(011)}),$$

la forma  $\mathbf{H}_P$  è la forma quadratica di matrice  $6 \times 6$  (vedi [Re1])

$$B_{3,4} = \begin{pmatrix} a_{400} & a_{220} & a_{202} & a_{310} & a_{301} & a_{211} \\ a_{220} & a_{040} & a_{022} & a_{130} & a_{121} & a_{031} \\ a_{202} & a_{022} & a_{004} & a_{112} & a_{103} & a_{013} \\ a_{310} & a_{130} & a_{112} & a_{220} & a_{211} & a_{121} \\ a_{301} & a_{121} & a_{103} & a_{211} & a_{202} & a_{112} \\ a_{211} & a_{031} & a_{013} & a_{121} & a_{112} & a_{022} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Come ricorda anche Reznick in [Re1], il determinante  $C(F) = \det \mathbf{H}_F$ , chiamato analogamente **cataletticante**, fu studiato sistematicamente da Sylvester nei casi  $n = 2$  e  $(n, m) = (3, 4)$ . Esso è legato alla scrittura del polinomio  $F$  come somma di potenze di forme lineari. Dal Teorema 4.6 in [Re1] si ha che, nei casi sopra citati, se  $F$  è somma

di potenze di forme lineari, allora il rango di  $H_F$  uguaglia il più piccolo intero  $t$  per cui  $F$  ha una rappresentazione come somma di  $t$  potenze. Dunque, se il rango di  $H_F$  è massimo, ovvero è uguale a  $N(n, s)$  ( $s = \frac{m}{2}$ ), allora  $F$  ha almeno una scrittura come somma di  $N(n, s)$  potenze. Se invece il cataletticante si annulla l'altezza della scrittura si abbassa.

## 2.3 Coni di Hilbert e loro bordo

Supponiamo sempre che  $m$  sia un numero pari,  $m = 2s$ . Studieremo particolarmente alcuni sottoinsiemi di  $\mathbf{F}_{n,m}$ . Il primo è l'insieme

$$\mathbf{P}_{n,m} \stackrel{def}{=} \left\{ F \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } F(X) \geq 0 \text{ per ogni } X \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (2.14)$$

dei polinomi omogenei di grado  $m$  non negativi su  $\mathbb{R}^n$ : nella Proposizione 2.3.1 mostreremo che tale insieme forma un cono di  $\mathbf{F}_{n,m}$ . Considereremo poi l'insieme

$$\Sigma_{n,m} \stackrel{def}{=} \left\{ F \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } F = \sum_{j=1}^r h_j^2 \text{ dove } h_j \in \mathbf{F}_{n,s} \text{ e } r \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.15)$$

delle somme finite di quadrati di polinomi di grado  $s = \frac{m}{2}$ ; notiamo che anche questo insieme è un cono, che si può ottenere come involuppo conico di  $\mathbf{F}_{n,s}^2$ . Infine, l'insieme

$$\mathbf{Q}_{n,m} \stackrel{def}{=} \left\{ F \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } F = \sum_{k=1}^r (\alpha_k \star)^m \text{ dove } \alpha_k \in \mathbb{R}^n \text{ e } r \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.16)$$

delle somme di potenze  $m$ -esime di forme lineari.

**Proposizione 2.3.1.** *Valgono i seguenti risultati:*

1.  $\mathbf{Q}_{n,m} \subseteq \Sigma_{n,m} \subseteq \mathbf{P}_{n,m}$  per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$
2.  $\mathbf{P}_{n,m}$ ,  $\Sigma_{n,m}$  e  $\mathbf{Q}_{n,m}$  sono coni convessi chiusi di  $\mathbf{F}_{n,m}$  per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$
3.  $\mathbf{P}_{n,m}^* = \mathbf{Q}_{n,m}$  e  $\mathbf{Q}_{n,m}^* = \mathbf{P}_{n,m}$  per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$ .
4.  $\Sigma_{n,m}^* = \left\{ q \in \mathbf{F}_{n,m} \mid \mathbf{H}_q \succeq 0 \right\}$
5. Se  $F_j \in \mathbf{P}_{n,m_j}$ , per  $j \in \{1, \dots, k\}$  allora  $V(\sum F_j) = \bigcap V(F_j)$

*Dimostrazione.*

1. Poiché  $m = 2s$  è pari, se  $F \in \mathbf{Q}_{n,m}$ , allora

$$F = \sum_{k=1}^r (\alpha_k \star)^m = \sum_{k=1}^r ((\alpha_k \star)^s)^2$$

e  $(\alpha_k \star)^s \in \mathbf{F}_{n,s}$ , ovvero  $F \in \Sigma_{n,m}$ . Se  $G \in \Sigma_{n,m}$  allora esiste  $\{h_1, \dots, h_r\} \subseteq \mathbf{F}_{n,s}$  tali che  $G(X) = \sum_{j=1}^r h_j^2(X)$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$ , ovvero  $G \geq 0$ .

2. Se  $F, G \in \mathbf{P}_{n,m}$  e  $\alpha \succeq 0$  allora  $(F + G)(X) = F(X) + G(X) \geq 0$  e  $\alpha F(X) \geq 0$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$ , quindi  $\mathbf{P}_{n,m}$  è un cono convesso. Inoltre  $\mathbf{P}_{n,m}$  è chiuso perché se

$\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{P}_{n,m}$  e  $F_k \xrightarrow{k} F$  in  $\mathbf{F}_{n,m}$  allora  $a(F_k; I) \xrightarrow{k} a(F; I)$  per ogni  $I \in \mathcal{I}(n, m)$ , e dunque

$$0 \leq F_k(X) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}(n,m)} c(I) a(F_k, I) X^I \xrightarrow{k} \sum_{I \in \mathcal{I}(n,m)} c(I) a(F, I) X^I = F(X)$$

per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$ .

Si prova altrettanto facilmente che  $\Sigma_{n,m}$  e  $\mathbf{Q}_{n,m}$  sono coni convessi di  $\mathbf{F}_{n,m}$ . Notiamo adesso che

$$\Sigma_{n,m} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Sigma_{n,m}^k \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_{n,m} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{Q}_{n,m}^k$$

dove si è posto

$$\Sigma_{n,m}^k = \left\{ F \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } F = \sum_{j=1}^k h_j^2 \text{ dove } h_j \in \mathbf{F}_{n,s} \right\}$$

e

$$\mathbf{Q}_{n,m}^k = \left\{ F \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } F = \sum_{j=1}^k (\alpha_j \star)^m \text{ dove } \alpha_j \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Per il teorema di Carathéodory, per ogni  $k \geq N(n, m)$

$$\Sigma_{n,m}^k = \Sigma_{n,m}^{N(n,m)} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_{n,m}^k = \mathbf{Q}_{n,m}^{N(n,m)}$$

ovvero

$$\Sigma_{n,m} = \bigcup_{k=1}^{N(n,m)} \Sigma_{n,m}^k = \Sigma_{n,m}^{N(n,m)}$$

e

$$\mathbf{Q}_{n,m} = \bigcup_{k=1}^{N(n,m)} \mathbf{Q}_{n,m}^k = \mathbf{Q}_{n,m}^{N(n,m)}.$$

Proviamo (e sarà sufficiente per la tesi) che  $\Sigma_{n,m}^k$  e  $\mathbf{Q}_{n,m}^k$  sono chiusi per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Supponiamo di avere una successione di polinomi  $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{Q}_{n,m}^r$  che tende a  $F \in \mathbf{F}_{n,m}$ . Allora

$$F_j(X) = \sum_{k=1}^r (\alpha_{k1}^{(j)} x + \cdots + \alpha_{kn}^{(j)} x_n)^m,$$

con  $a(F_j; I) \xrightarrow{j} a(F; I)$  per ogni  $I$ . Sia  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ , e sia  $I_b = m e_b$ . In particolare, poiché  $c(I_b) = \frac{m!}{m!} = 1$ ,

$$\sum_{k=1}^r (\alpha_{kb}^{(j)})^m = a(F_j; I_b) \xrightarrow{j} a(F; I_b) = c(I_b) a(F; I_b) = F(e_b)$$

per ogni  $b$ , e dunque i coefficienti  $\{\alpha_{kb}^{(j)}\}$  sono limitati uniformemente ed esiste una

sottosuccessione  $\{j_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  tale che  $\alpha_{kb}^{(j_h)} \xrightarrow{h} \alpha_{kb}$  per certi  $\alpha_{kb}$ , per ogni coppia  $(k, b)$ .  
 Dunque

$$F(X) = \sum_{k=1}^r (\alpha_{k1}x + \cdots + \alpha_{kn}x_n)^m \in \mathbf{Q}_{n,m}.$$

Supponiamo adesso che  $G_j = \sum_{k=1}^r (h_k^{(j)})^2 \in \Sigma_{n,m}^r$  e  $G_j \xrightarrow{j} G$  in  $\mathbf{F}_{n,m}$ , e sia  $\{\alpha_l\}_{0 \leq l \leq N(n,s)}$  un insieme base di nodi per  $\mathbf{F}_{n,s}$  e  $M = \max_l \{G(\alpha_l)\}$ .

Allora esiste un opportuno  $j_0$  tale che  $0 \leq G_j(\alpha_l) \leq 2M$  per ogni  $j \geq j_0$ , ovvero  $|h_k^{(j)}(\alpha_l)| \leq (2M)^{\frac{1}{2}}$  per  $j \geq j_0$ . Quindi, per quanto visto in (2.8)

$$|a(h_k^{(j)}, I)| = \left| \sum_{l=1}^{N(n,s)} \lambda_l(I) h_k^{(j)}(\alpha_l) \right| \leq (2M)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{N(n,s)} |\lambda_l(I)| \leq L$$

uniformemente. Analogamente a prima, si trova una sottosuccessione di indici tale che  $h_k^{j_t}(x) \xrightarrow{t} h_k(x)$  e quindi

$$G(X) = \sum_{k=1}^r (h_k(X))^2 \in \Sigma_{n,m}^r.$$

3. Avendo appena provato che  $\mathbf{P}_{n,m}$  e  $\mathbf{Q}_{n,m}$  sono entrambi chiusi, è chiaro che i due risultati di questo punto sono equivalenti, perché se  $\mathbf{P}_{n,m}^* = \mathbf{Q}_{n,m}$  allora  $\mathbf{Q}_{n,m}^* = (\mathbf{P}_{n,m}^*)^* = \overline{\mathbf{P}_{n,m}} = \mathbf{P}_{n,m}$ , e viceversa, a seguito del Teorema 1.1.6.

Proviamo dunque che  $\mathbf{Q}_{n,m}^* = \mathbf{P}_{n,m}$ . Si ha che  $p \in \mathbf{Q}_{n,m}^*$  se e solo se, per ogni  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$0 \leq \left[ p, \sum_{k=1}^r (\alpha_k \star)^m \right] = \sum_{k=1}^r p(\alpha_k).$$

Particolarmente, questo vale se e solo se  $p(\beta) \geq 0$  per ogni  $\beta \in \mathbb{R}^n$ , ovvero se e solo se  $p \in \mathbf{P}_{n,m}$ .

4. Per dualità,  $q \in \Sigma_{n,m}^*$  se e solo se  $[q, G] \geq 0$  per ogni  $G \in \Sigma_{n,m}$ , ovvero se e solo se  $[q, \sum_{k=1}^t f_k^2] \geq 0$  per ogni sottoinsieme  $\{f_1, \dots, f_t\} \subseteq \mathbf{F}_{n,s}$ . Questo accade se e solo se  $[q, f^2] \geq 0$  per ogni  $f \in \mathbf{F}_{n,s}$ , ovvero  $\mathbf{H}_q(T) = [q, \mathcal{L}^2(X; T)] \geq 0$  per ogni  $T \in \mathbb{R}^{N(n,s)}$ . Quindi  $\mathbf{H}_q \geq 0$ .

5. Ovviamente  $V(\sum F_j) \supseteq \bigcap V(F_j)$ . Ma per la semidefinita positività di tutti gli  $F_j$  si ha che, se  $a \in V(\sum F_j)$  allora  $a$  deve annullare ogni  $F_j$ , da cui la tesi. □

**Esempio 2.3.1** (caso  $n = 1$ ). Eliminiamo un caso banale, che non considereremo oltre nel lavoro. Si ha infatti che

$$\mathbf{F}_{1,m} = \left\{ b \cdot x^m \text{ al variare di } b \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

e che quindi  $\mathbf{P}_{1,m} = \Sigma_{1,m} = \mathbf{Q}_{1,m} = \left\{ b \cdot x^m \text{ al variare di } b \geq 0 \right\} \sim [0, +\infty)$ .

### 2.3.1 Teorema di Hilbert ed esempi

Nel 1888 Hilbert individuò le condizioni necessarie e sufficienti sulla coppia  $(n, m)$  affinché l'inclusione  $\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbf{P}_{n,m}$  fosse un'uguaglianza, ovvero le condizioni per cui ogni polinomio su  $n$  indeterminate non negativo, omogeneo di grado  $m$ , si possa scrivere come somma di quadrati di polinomi di grado  $s = \frac{m}{2}$ . Il teorema di Hilbert asserisce che questi casi sono:  $n = 2, m = 2$  o  $(n, m) = (3, 4)$ . Egli però non dette alcuna costruzione diretta di polinomi non negativi che non sono somma di quadrati, ma si limitò a verificarne l'esistenza tracciando un metodo per la costruzione di controesempi.

Prima di affrontare una dimostrazione del teorema di Hilbert, premettiamo alcuni di questi esempi storici, ovvero polinomi  $F \in \Delta_{n,m}$ , dove

$$\Delta_{n,m} \stackrel{def}{=} \mathbf{P}_{n,m} \setminus \Sigma_{n,m}.$$

Alcuni di essi, come si è detto, giunsero più tardi della prova di Hilbert.

**Esempio 2.3.2** (Robinson, per  $\Delta_{3,6}$ ). È abbastanza semplice dimostrare che il polinomio  $R(x, y, z)$

$$R = x^6 + y^6 + z^6 - (x^4y^2 + x^2y^4 + x^4z^2 + x^2z^4 + y^4z^2 + y^2z^4) + 3x^2y^2z^2$$

è semidefinito positivo (ovvero appartiene a  $P_{3,6}$ ) ma non può essere scritto come somma di quadrati di elementi di  $\mathbf{F}_{3,3}$ .

Infatti la diseuguaglianza  $R \geq 0$  si ottiene direttamente grazie ad un risultato più generale dovuto a Schur<sup>1</sup>. Inoltre, consideriamo questo insieme di zeri per  $R$ :

$$\mathcal{Z} = \{(1, \pm 1, \pm 1), (1, \pm 1, 0), (1, 0, \pm 1), (0, 1, \pm 1)\}.$$

Se per assurdo fosse

$$R(x, y, z) = \sum_{k=1}^t (C_k(x, y, z))^2 \tag{2.18}$$

dove le  $C_k$  sono cubiche piane non tutte nulle, allora otterremmo

$$C_k|_{\mathcal{Z}} = 0$$

per ogni cubica  $C_k$ . Questo genera  $t$  sistemi di dieci<sup>2</sup> relazioni indipendenti in dieci incognite, e quindi porta alla condizione  $C_k \equiv 0$  per ogni  $k$ , che contraddice l'ipotesi.

È interessante porre particolare attenzione su questo aspetto. L'insieme  $\mathcal{Z}$  non è generico, ma rappresenta effettivamente un insieme base di nodi per  $\mathbf{F}_{3,3}$ . Supponiamo infatti

<sup>1</sup>**Diseuguaglianza di Schur:** per ogni  $r, u, v, w \geq 0$  reali, vale che

$$u^r(u-v)(u-w) + v^r(v-u)(v-w) + w^r(w-u)(w-v) \geq 0.$$

Supponendo, infatti, senza perdita di generalità, che  $u \geq v \geq w$ , si ha che il termine di sinistra eguaglia  $(u-v)[u^r(u-w) - v^r(v-w)] + w^r(w-u)(w-v)$  che è  $\geq 0$  perché ogni termine è non negativo. Nel caso del polinomio  $R$ , la diseuguaglianza si applica a  $(r, u, v, w) = (1, x^2, y^2, z^2)$ .

<sup>2</sup>Si ricorda che  $\mathbf{F}_{3,3} = \langle x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, xy^2, y^2z, xz^2, yz^2, xyz \rangle_{\mathbb{R}}$ .

che

$$C(x, y, z) = \sum_{i+j+k=3} h_{ijk} x^i y^j z^k \in I(\mathcal{Z}) \cap \mathbf{F}_{3,3}.$$

Imponendo che  $C$  si annulli su  $\mathcal{Z}$  si ottiene il sistema omogeneo

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{300} + h_{030} + h_{003} + h_{210} + h_{201} + h_{120} + h_{021} + h_{102} + h_{012} + h_{111} = 0 \\ h_{300} + h_{030} - h_{003} + h_{210} - h_{201} + h_{120} - h_{021} + h_{102} + h_{012} - h_{111} = 0 \\ h_{300} - h_{030} + h_{003} - h_{210} + h_{201} + h_{120} + h_{021} + h_{102} - h_{012} - h_{111} = 0 \\ h_{300} - h_{030} - h_{003} - h_{210} - h_{201} + h_{120} - h_{021} + h_{102} - h_{012} + h_{111} = 0 \\ h_{300} + h_{030} \quad + h_{210} \quad + h_{120} \quad \quad \quad = 0 \\ h_{300} - h_{030} \quad - h_{210} \quad + h_{120} \quad \quad \quad = 0 \\ h_{300} \quad + h_{003} \quad + h_{201} \quad \quad + h_{102} \quad \quad = 0 \\ h_{300} \quad - h_{003} \quad - h_{201} \quad \quad + h_{102} \quad \quad = 0 \\ \quad h_{030} + h_{003} \quad \quad \quad + h_{021} \quad + h_{012} \quad = 0 \\ \quad h_{030} - h_{003} \quad \quad \quad - h_{021} \quad + h_{012} \quad = 0 \end{array} \right.$$

di matrice

$$M_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che è non singolare ( $\det(M_C) = 128$ ) e che porta quindi all'unica soluzione banale  $C \equiv 0$ : tale risultato non è accettabile per le cubiche dell'eventuale decomposizione (2.18) del polinomio di Robinson. Dunque, in particolare, si è ottenuto che

$$V_{\mathcal{Z}}^{\perp} = I(\mathcal{Z}) \cap \mathbf{F}_{3,3} = \{0\}$$

o, equivalentemente, che  $V_{\mathcal{Z}} = \mathbb{R}^3$ .

Il fatto interessante è che da  $\mathbf{R}$  e dall'insieme  $\mathcal{Z}$  è possibile costruire una sestica

$$F \in \text{int}(\Sigma_{3,6}^*) \setminus \text{int}(Q_{3,6}),$$

ovvero un ulteriore esempio interessante. Infatti, se  $\mathcal{Z} = \{\beta_1, \dots, \beta_{10}\}$  e  $\beta_k = (a_k, b_k, c_k)$  per  $k = 1, \dots, 10$  allora

$$F(x, y, z) = \sum_{k=1}^{10} (a_k x + b_k y + c_k z)^6 \quad (2.19)$$

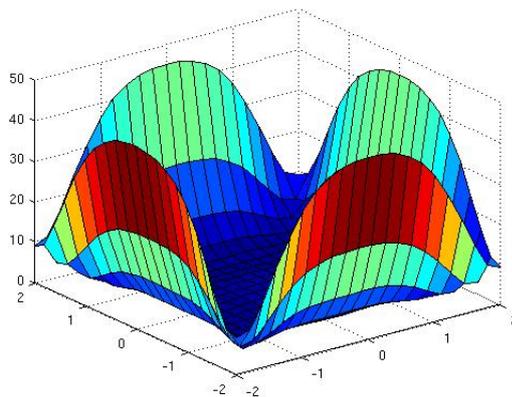


Figura 2.1: Robinson  $R(x, y, 1)$

gode delle seguenti proprietà:

1.  $[F, R] = \sum(R(\beta_k)) = 0$ , per cui  $F \notin \text{int}(Q_{3,6})$
2.  $[F, h^2] = \sum((h(\beta_k))^2) \geq 0$  per ogni  $0 \neq h \in \mathbf{F}_{3,3}$ , da cui  $F \in \text{int}(\Sigma_{3,6}^*)$ .

Inoltre, come è ampiamente argomentato in [CL], si può vedere che  $R$  è un punto estremale del cono  $\mathbf{P}_{3,6}$  e che vale il seguente fatto: se  $H \in \mathbf{P}_{3,6}$  si annulla su  $\mathcal{L}$ , allora  $H = \lambda R$  per un certo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Esempio 2.3.3** (Hilbert, per  $\Delta_{3,6}$ ). È noto che, date due cubiche piane, e presi i loro nove punti di intersezione  $\Pi = \{s_i\}_{i \in \{1, \dots, 9\}}$  (sono tanti per il Teorema di Bezout), allora una qualsiasi altra cubica passante per otto di questi nove punti passa anche per il nono punto. Utilizzando questo risultato classico, Hilbert riuscì a costruire un elemento di  $\Delta_{3,6}$ , lavorando dapprima con polinomi in due variabili e omogenizzando poi a polinomi con tre variabili. L'idea era questa. Supponiamo che  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  siano le equazioni delle due cubiche e supponiamo che  $\Pi$  non contenga tre punti allineati o sei punti su una stessa quadrica. Hilbert costruì una quadrica  $T(x, y, z)$  non nulla con zeri in  $\{s_1, \dots, s_5\}$  e una quartica non nulla  $S(x, y, z)$  con gli stessi zeri e singolare in  $\{s_6, s_7, s_8\}$ .  $T$  e  $S$  esistono perché: una quadrica del piano è rappresentata da una matrice simmetrica  $3 \times 3$ , e quindi ha sei coefficienti, e si stanno imponendo solo 5 condizioni corrispondenti ai 5 punti; analogamente, sui 15 coefficienti di  $S$  imponiamo  $5 + 9 = 14$  condizioni. Dunque, la sestica  $ST$  è singolare in tutto  $\Pi \setminus \{s_9\} = \{s_1, \dots, s_8\}$ . Hilbert mostrò che  $(ST)(s_9) \neq 0$  e che esiste una perturbazione  $P_\epsilon = f^2 + g^2 + \epsilon \cdot ST$  tale che il polinomio  $P_\epsilon$  sia positivo. Ma per il risultato classico prima ricordato si arriva ad una contraddizione se si suppone che  $P_\epsilon$  sia somma di quadrati di cubiche piane. Se fosse, infatti,  $P_\epsilon = \sum_j W_j^2$ , allora ciascuna delle  $W_j$  si annullerebbe su  $\{s_1, \dots, s_8\}$  e dunque si annullerebbero anche sul nono punto  $s_9$ , ma al contrario  $P_\epsilon$  non si annulla su  $s_9$ .

**Esempio 2.3.4** (Motzkin, per  $\Delta_{n,2n}$ ). Motzkin dimostrò che per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , il polinomio

$$M_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - nx_n^2)x_1^2 \cdots x_{n-1}^2 + x_n^{2n} \quad (2.20)$$

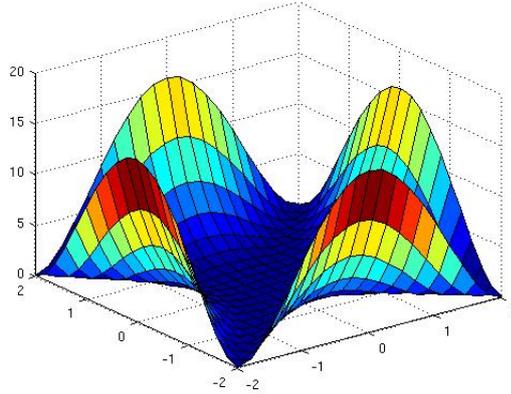


Figura 2.2:  $F(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

appartiene a  $\Delta_{n,2n}$ .

Infatti, se per  $n = 2$  si ha che  $F(x, y) = (x^2 - y^2)^2 = (x - y)^2(x + y)^2$  appartiene a  $\Sigma_{2,4}$  (Figura 2.2), consideriamo il primo caso  $n = 3$ . La semidefinita positività di

$$M_3(x, y, z) = x^4y^2 + x^2y^4 + z^6 - 3x^2y^2z^2$$

è garantita dalla diseguaglianza aritmetico-geometrica

$$\frac{1}{3}(x^4y^2 + x^2y^4 + z^6) \geq (x^6y^6z^6)^{\frac{1}{3}}$$

applicata a  $(x^4y^2, x^2y^4, z^6)$ . Mostriamo che  $M_3$  non può essere scritto come somma di quadrati di cubiche di  $\mathbf{F}_{3,3}$ . Se infatti fosse

$$M_3(x, y, z) = x^4y^2 + x^2y^4 + z^6 - 3x^2y^2z^2 = \sum_{j=1}^t (C_j(x, y, z))^2$$

con  $C_j \in \mathbf{F}_{3,3}$ , allora innanzitutto si può dedurre che nessuna delle cubiche contiene (in particolare) termini in  $x^3, y^3, x^2z, xz^2, y^2z, yz^2$ . Inoltre si avrebbe

$$M_3(x, y, 1) = x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2 = \sum_{j=1}^t (C_j(x, y, 1))^2.$$

Adesso, i polinomi  $C_j(x, y, 1)$  non conterranno termini in  $x^2, y^2, x, y$  e quindi particolarmente il coefficiente  $-3$  è generato solo dalla somma dei quadrati dei coefficienti in  $xy$  di ogni  $C_j$ , da cui un assurdo perché  $-3$  non è somma di quadrati di coefficienti reali.

**Esempio 2.3.5** (Choi-Lam, per  $\Delta_{3,6}$  e  $\Delta_{4,4}$ ).

$$S(x, y, z) = x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 - 3x^2y^2z^2 \in \Delta_{3,6} \tag{2.21}$$

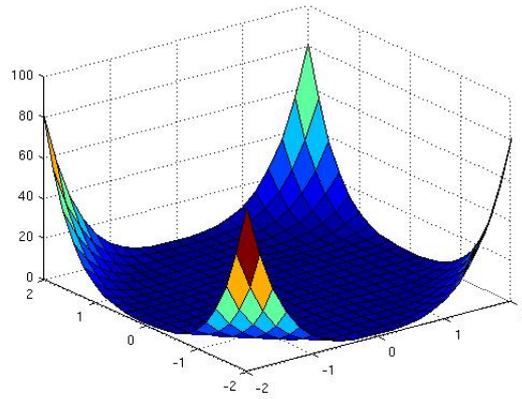


Figura 2.3: Motzkin  $M_3(x, y, 1)$

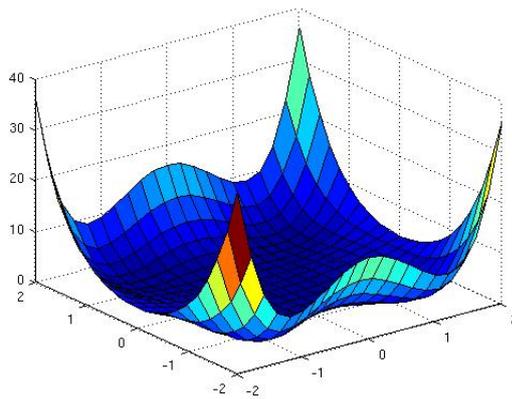


Figura 2.4: Choi-Lam  $S(x, y, 1)$

$$Q(x, y, z, w) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + w^4 - 4xyzw \in \Delta_{4,4} \quad (2.22)$$

Ancora una volta,  $Q$  è semidefinito positivo su  $\mathbb{R}^4$  a causa della disegualianza aritmetico-geometrica. Supponiamo che  $Q = \sum q_i^2$  dove  $q_i$  sono forme quadratiche in  $x, y, z, w$ . Necessariamente, poiché  $Q$  non contiene termini in  $x^4, y^4, z^4$ , nessun  $q_i$  contiene termini in  $x^2, y^2, z^2$ , e allo stesso modo non contiene termini in  $xw, yw, zw$ . Dunque ogni  $q_i$  dovrebbe contenere solo termini in  $xy, xz, y, z$ , e  $w^2$ , ma così non c'è possibilità di generare il monomio in  $xyzw$ . Osserviamo che tali considerazioni possono essere estese in generale: una quartica  $\bar{Q}$  che non contiene i sei termini citati poc'anzi, ma che contiene un termine  $t \cdot xyzw$  con  $t \neq 0$ , non appartiene al cono delle somme di quadrati.

Riportiamo quindi una dimostrazione del teorema di Hilbert, tratta nella parte delle quartiche piane dal lavoro [CL].

**Teorema 2.3.1** (Teorema di Hilbert). *Ogni polinomio omogeneo in  $n$  indeterminate  $x_1, \dots, x_n$  di grado  $m$ , non negativo, è somma di quadrati di polinomi omogenei di grado  $\frac{m}{2}$  (ovvero  $\mathbf{P}_{n,m} = \Sigma_{n,m}$ ) se e solo se si verifica almeno uno dei seguenti casi:*

- $n = 2$  (forme binarie)
- $m = 2$  (forme quadratiche)
- $(n, m) = (3, 4)$  (quartiche piane)

*Dimostrazione.* Consideriamo inizialmente il cono  $\mathbf{P}_{n,2}$  delle forme quadratiche semidefinite positive. Sia  $X = (x_1, \dots, x_n)$ . Se  $F \in \mathbf{P}_{n,2}$  allora  $F$  è della forma

$$F(X) = X^t Q X$$

dove  $Q \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$  è una matrice simmetrica semidefinita positiva. Dal Teorema di Lagrange, esiste una matrice  $C \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  tale che  $C^t Q C = D$  è diagonale, ovvero nella classe di congruenza di  $Q$  (cioè nella sua orbita rispetto all'azione di  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  su  $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ ) c'è una matrice diagonale  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Dunque, posto  $X = CY$ , con  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  si ha che

$$F(CY) = (CY)^t Q (CY) = Y^t [C^t Q C] Y = Y^t D Y \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}(Y)$$

che è una forma diagonale per  $F$ . Dal Teorema di Sylvester discende che la forma  $F$  ha segnatura  $(r, 0)$  dove  $r$  è il rango della matrice  $Q$ . Dunque, senza perdita di generalità,  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$  e quindi il polinomio  $F$  si scrive come somma di  $r$  quadrati di forme lineari in  $x_1, \dots, x_n$ :

$$F(X) = \tilde{F}(C^{-1}X) = (C^{-1}X)^t D (C^{-1}X) = \sum_{i=1}^r d_i (C^{-1}X)_i^2 = \sum_{i=1}^r d_i (C_{(i)}^{-1} \cdot X)^2.$$

Dunque  $\mathbf{P}_{n,2} = \Sigma_{n,2} = \mathbf{Q}_{n,2}$ , o equivalentemente  $\Delta_{n,2} = \emptyset$ .

Passiamo adesso a  $\mathbf{P}_{2,m}$ . Sia  $G \in \mathbf{P}_{2,m}$  della forma

$$G(x, y) = \sum_{i=0}^m \zeta_i x^i y^{m-i}.$$

Se indichiamo con  $r$  il numero delle radici reali di  $G$  contate con molteplicità e  $2c$  quello delle sue radici complesse contate con le coniugate, si ha che  $G$  ha un numero pari di radici reali (sempre, con molteplicità) poiché  $m = 2s = r + 2c$ , ovvero  $r = 2(s - c)$ . Se  $r \geq 2$ , ovvero se  $G$  ammette radici reali, esse sono singolari per  $\{G = 0\}$ , ovvero sono radici doppie. Dunque  $G$  è il prodotto di un quadrato di un polinomio  $H$  con tutte radici reali di grado  $\frac{r}{2}$ , di un polinomio  $L(x, y) = A(x, y) + iB(x, y)$  di grado  $c$  e del suo complesso coniugato. Dunque:

$$\begin{aligned} G &= \prod_{j=1}^{\frac{r}{2}} (a_j x - b_j y)^2 \prod_{j=r+1}^{r+c} (c_j x - d_j y) \prod_{j=r+1}^{r+c} (\bar{c}_j x - \bar{d}_j y) \\ &= H^2(x, y)(A(x, y) + iB(x, y))(A(x, y) - iB(x, y)) \\ &= H^2(x, y)(A^2(x, y) + B^2(x, y)) = (HA)^2(x, y) + (HB)^2(x, y). \end{aligned}$$

Poiché  $\deg(HA) = \deg(HB) = \frac{r}{2} + c = s = \frac{m}{2}$ , si ha che  $\mathbf{P}_{2,m} = \Sigma_{2,m}$  come volevasi dimostrare. Notiamo che si è inoltre mostrato che ogni forma binaria è somma di al più due quadrati di polinomi di grado metà.

Analizziamo infine il caso sporadico di  $\mathbf{P}_{3,4}$ . Premettiamo il seguente

**Lemma.** Sia  $T(x, y, z) \in \mathbf{P}_{3,4}$ . Allora esiste  $q(x, y, z)$  forma quadratica non nulla tale che  $T \geq q^2$ .

*Dimostrazione.* Sia  $V(T) \subseteq \mathbb{RP}^2$  l'insieme degli zeri di  $T$ .

1. Supponiamo che  $V(T) = \emptyset$ . Allora  $\frac{T}{(x^2+y^2+z^2)^2} \geq \epsilon \gtrsim 0$  sulla sfera unitaria  $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ , e dunque  $T \geq \epsilon(x^2 + y^2 + z^2)^2$  su  $\mathbb{S}^2$  e quindi su  $\mathbb{R}^3$ .
2. Se invece  $V(T)$  è composto da un solo punto, a meno di cambiare coordinate possiamo assumere che  $T(1, 0, 0) = 0$ . Dunque

$$T = x^2 f(y, z) + 2xg(y, z) + h(y, z), \text{ e quindi}$$

$$f \cdot T = (xf + g)^2 + fh - g^2$$

con  $f, h, fh - g^2 \geq 0$ . Allora ci sono due sotto-casi.

- Se  $f$  ha rango 1, allora  $f = L^2$  è il quadrato di una forma lineare, dunque  $L^2 h - g^2 \geq 0$  e dunque  $L$  divide  $g$ , cioè  $g = Lg_1$ . Quindi in questo caso

$$L^2 \cdot T \geq (xL^2 + Lg_1)^2$$

ovvero

$$T \geq (xL + g_1)^2.$$

- Se  $f$  ha rango 2, ovvero se è definita positiva, si ha che  $fh - g^2 \gtrsim 0$  perché se tale discriminante avesse uno zero non banale  $(a_1, a_2)$ , troveremmo uno zero  $\left(-\frac{g(a_1, a_2)}{f(a_1, a_2)}, a_1, a_2\right)$  di  $T$ , che invece si annulla solo in  $(1, 0, 0)$ . Dunque, su  $\mathbb{S}^1$

(e quindi ovunque) si ha che  $\frac{fh-g^2}{f^3} \geq \epsilon \gtrsim 0$ , ovvero

$$f \cdot T \geq fh - g^2 \geq \epsilon f^3,$$

ovvero

$$T \geq \epsilon f^2,$$

da cui la tesi.

3. L'ultimo caso da analizzare resta  $|V(T)| \geq 2$ . Come prima, sia  $T(1, 0, 0) = T(0, 1, 0) = 0$ , dunque  $T$  non è di grado 3 o 4 né in  $x$  né in  $y$ . Dunque  $T = x^2 f(y, z) + 2xzg(y, z) + z^2 h(y, z)$  dove  $f, g, h$  sono forme quadratiche. Quindi

$$f \cdot T = (xf + zg)^2 + z^2(fh - g^2) \quad \text{ed}$$

$$h \cdot T = (xg + zh)^2 + x^2(fh - g^2)$$

con  $f, h, fh - g^2 \geq 0$ . Se  $f$  o  $h$  ha rango 1, si utilizza un argomento simile al caso precedente, perché sarebbero quadrati di forme lineari. Supponiamo invece che  $f, h \gtrsim 0$ , e anche qui si hanno due casi.

- Se  $fh - g^2$  ha uno zero non banale  $(a_1, a_2)$ , sia  $\beta = -\frac{g(a_1, a_2)}{f(a_1, a_2)}$ . Allora

$$T_1(x, y, z) = T(x + \beta z, y, z) = x^2 f + 2xz(g + \beta f) + z^2(h + 2\beta g + \beta^2 f).$$

Il terzo termine della somma si annulla in  $(a_1, a_2)$ , ovvero il rango di  $h + 2\beta g + \beta^2 f$  è  $\leq 1$ , e dunque per quanto visto nei casi precedenti  $T_1 \geq Q^2$ , e quindi anche  $T$ .

- Se invece il discriminante  $fh - g^2$  è definito positivo. Allora  $\frac{fh-g^2}{(y^2+z^2)f} \geq \epsilon \geq 0$  su  $\mathbb{S}^1$  e quindi  $fh - g^2 \geq \epsilon(y^2 + z^2)f$  su  $\mathbb{R}^2$ . Quindi

$$f \cdot T \geq z^2(fh - g^2) \geq \epsilon z^2(y^2 + z^2)f$$

ovvero

$$T \geq \epsilon z^4, \quad \text{come si voleva.}$$

Supponiamo dunque adesso che  $T(x, y, z) \in \mathbf{P}_{3,4}$ . Scomponiamo  $T$  nella somma di elementi di  $\text{Est}(\mathbf{P}_{3,4})$  in questo modo:  $T = T_1 + \dots + T_h$ . Applicando il lemma ad ogni  $T_j$  si ha che esistono forme quadratiche  $q_j$  tali che  $T_j - q_j^2 = H_j \geq 0$ , cioè  $H_j \in \mathbf{P}_{3,4}$ . Quindi  $T_j = c_j q_j^2 = (\sqrt{c_j} q_j)^2$  per ogni  $j$ . Dunque  $T \in \Sigma_{3,4}$ .

Viceversa, supponiamo di aver trovato un polinomio  $P \in \Delta_{n,m}$ , ovvero un polinomio di  $\mathbf{P}_{n,m}$  che non è somma di quadrati. Allora, possiamo considerarlo come un elemento di  $P_{\nu,m}$  per ogni  $\nu \geq n$ , ampliando l'insieme di indeterminate, e dunque si ha che  $P \in \Delta_{\nu,m}$ . Allo stesso modo, è ovvio che se  $\mu \geq m$  è ancora pari, allora  $x^{\mu-m} \cdot P \in \Delta_{n,\mu}$ . Dunque, se  $\Delta_{\bar{n},\bar{m}} \neq \emptyset$ , allora per ogni  $n \geq \bar{n}$  e per ogni  $m \geq \bar{m}$  pari,  $\Delta_{n,m} \neq \emptyset$ . Avendo esibito esempi di elementi  $\Delta_{3,6}$  (come nell'esempio 2.3.2) ed in  $\Delta_{4,4}$  (come (2.22)) si conclude che per  $n \geq 3$  e  $m \geq 6$  o per  $n, m \geq 4$ ,  $\Delta_{n,m}$  è non vuoto.  $\square$

Notiamo che i coni che stiamo studiando possono essere visti sia come sottinsiemi di uno spazio vettoriale  $(\mathbf{F}_{n,m})$  sia confusi con i loro proiettivizzati, dove per “proiettivizzato” di un cono  $C \subseteq \mathbf{F}_{n,m}$  si intende  $\mathbb{P}(C) = \{[x] \mid x \in C\} \subseteq \mathbb{P}(\mathbf{F}_{n,m}) = \mathbb{P}^{\binom{n+m-1}{n-1}-1}$ ; ogni elemento di  $\mathbb{P}(C)$  definisce infatti una ipersuperficie di  $\mathbb{P}^{\binom{n+m-1}{n-1}-1}$ .

**Definizione 2.3.1.** Chiamiamo **bordo algebrico** di  $\mathbf{P}_{n,m}$  la chiusura di Zariski del bordo euclideo del cono  $\mathbf{P}_{n,m}$ , ovvero la varietà

$$\partial_a \mathbf{P}_{n,m} = \mathfrak{Zar}(\partial \mathbf{P}_{n,m}).$$

Analoga definizione vale per  $\Sigma_{n,m}$  e  $\mathbf{Q}_{n,m}$ .

### 2.3.2 Bordo di $\mathbf{P}_{n,m}$

Diamo una forma esplicita al bordo algebrico del cono dei polinomi non negativi su  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposizione 2.3.2.** Valgono i seguenti risultati per il cono  $\mathbf{P}_{n,m}$ :

1.  $F \in \text{Int}(\mathbf{P}_{n,m})$  se e solo se  $F$  è definito positivo su  $\mathbb{R}^n$ .
2.  $F \in \partial \mathbf{P}_{n,m}$  se e solo se  $F \in \mathbf{P}_{n,m}$  e ha una radice in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Se  $F \in \partial \mathbf{P}_{n,m}$  si annulla in  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , allora  $V(F) \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  è singolare in  $[a]$ , ovvero  $\nabla F(a) = 0$ .
3.  $\partial_a \mathbf{P}_{n,2} = V(\det) = \left\{ M \text{ simmetriche} \mid \det(M) = 0 \right\}$ .
4.  $\partial_a \mathbf{P}_{n,m} = V(\Delta) = \left\{ F \in \mathbf{F}_{n,m} \mid \Delta(F) = 0 \right\}$ .

*Dimostrazione.*

1. L'interno di un cono  $C$  è determinato dagli elementi  $x \in C$  tali che per ogni  $0 \neq y \in C^*$ ,  $[x, y] \geq 0$ . Dunque,  $F \in \mathbf{P}_{n,m}$  è un punto interno se e solo se, dato  $0 \neq p = \sum (\alpha_k \star)^m \in \mathbf{Q}_{n,m}$  con  $\{0\} \neq \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathbb{R}^n$ , allora  $0 \leq [p, F] = \sum F(\alpha_k)$ ; ovvero  $F(\beta) \geq 0$  su  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Dunque

$$\text{Int}(\mathbf{P}_{n,m}) = \{F \in \mathbf{P}_{n,m} \mid F(\beta) \geq 0 \text{ per ogni } \beta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}.$$

2. L'equivalenza è ovvia dopo che si è mostrato il punto 1. Sia ora  $F \in \partial \mathbf{P}_{n,m}$  e sia  $[a] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  un punto di  $V(F)$  (che è non vuota). Allora vale la seguente relazione al prim'ordine:

$$\begin{aligned} 0 \leq F(X) &= F(a) + \nabla F(a)^t (X - a) + o(|X - a|) \\ &= \nabla F(a)^t (X - a) + o(|X - a|) \end{aligned}$$

I termini al second'ordine non danno contributo al segno, che è positivo per ipotesi: dunque, scegliendo  $Z_j = a + \epsilon e_j$  e  $W_j = a - \epsilon e_j$  dove  $e_j$  è il  $j$ -esimo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ , si ottiene che esiste un  $\nu \geq 0$  tale che, per ogni  $\epsilon \leq \nu$

$$0 \leq \nabla F(a)^t (Z_j - a) = \epsilon \frac{\partial F}{\partial x_j}(a) \quad \text{e} \quad 0 \leq \nabla F(a)^t (W_j - a) = -\epsilon \frac{\partial F}{\partial x_j}(a)$$

per ogni  $j$ . Dunque, necessariamente risulta  $\nabla F(a) = 0$ .

3. Osserviamo che nel caso  $m = 2$ , i coni  $\Sigma_{n,2}$  e  $\mathbf{Q}_{n,2}$  coincidono banalmente, e dunque anche  $\mathbf{P}_{n,2} = \Sigma_{n,2}^* = \{\mathbf{H}_F \succeq 0\}$  (si veda a tal proposito (2.11)). Si ha, precisamente, che  $\mathbf{F}_{n,2} = \{M \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \mid \text{simmetriche}\}$ , e quindi

$$\mathbf{P}_{n,2} = \{M \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \mid \text{simmetriche, } M \succeq 0\}$$

e che dunque per la caratterizzazione dell'interno di  $\mathbf{P}_{n,m}$

$$\text{Int}(\mathbf{P}_{n,2}) = \{M \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \mid \text{simmetriche, } M \succ 0\},$$

ovvero le matrici con  $n$  autovalori positivi. Dunque il bordo  $\partial\mathbf{P}_{n,2}$  è rappresentato dall'insieme

$$\partial\mathbf{P}_{n,2} = \{M \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R}) \mid \text{simmetriche, } M \succeq 0, \det(M) = 0\}.$$

Il bordo algebrico di  $\mathbf{P}_{n,2}$  coincide dunque con la varietà determinante  $V(\det)$ .

4. Si è visto al punto 2 che se  $F \in \partial\mathbf{P}_{n,m}$  allora  $F$  ha un punto critico non nullo. Dunque il discriminante di  $F$  si annulla, ovvero

$$\partial\mathbf{P}_{n,m} = \mathbf{P}_{n,m} \cap V(\Delta) = \{F \in \mathbf{P}_{n,m} \text{ tali che } \Delta(F) = 0\};$$

dunque  $\partial\mathbf{P}_{n,m} \subseteq V(\Delta)$  e

$$\partial_a\mathbf{P}_{n,m} \subseteq V(\Delta).$$

$\partial_a\mathbf{P}_{n,m}$  è una ipersuperficie e  $\Delta$  è un polinomio irriducibile di grado  $n(m-1)^{n-1}$ : dunque  $V(\Delta)$  è un'ipersuperficie irriducibile di grado  $n(m-1)^{n-1}$ . Dunque, poiché ogni componente irriducibile di una ipersuperficie ha codimensione 1 (Teorema 1.2.2), dunque per i Teoremi 1.2.1 si conclude che

$$\partial_a\mathbf{P}_{n,m} = V(\Delta).$$

□

### 2.3.3 Bordo di $\mathbf{Q}_{n,m}$ e $\Sigma_{n,m}^*$

**Osservazione 2.3.1.** Consideriamo inizialmente gli elementi di  $\mathbf{Q}_{n,m}$  della forma

$$v_\alpha(X) = (\alpha \star X)^m, \text{ per } \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

Se consideriamo una relazione di equivalenza del tipo

$$v_\alpha \sim v_\beta \iff \text{esiste } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ t.c. } \alpha = \lambda\beta,$$

ovvero se e solo se  $v_\alpha = \lambda^m v_\beta$ , detto

$$B = \{v_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}^n\}$$

si osserva che

$$\frac{B}{\sim} = \mathcal{V}_{n-1,m}(\mathbb{RP}^{n-1}) \subseteq \mathbb{RP}^{\binom{n+m-1}{n-1}-1},$$

ovvero che gli elementi del quoziente  $\frac{B}{\sim}$  sono la varietà di Veronese reale su  $\mathbb{RP}^{n-1}$ . Dunque il cono  $\mathbf{Q}_{n,m}$  è involuppo conico dei punti dell'intersezione della Veronese con il bordo, ovvero l'insieme

$$\mathbf{Q}_{n,m} = \text{con}(\mathcal{V}_{n-1,m}(\mathbb{RP}^{n-1}) \cap \partial\mathbf{Q}_{n,m}). \quad (2.23)$$

Notiamo però che gli elementi della Veronese sono punti estremali di  $\mathbf{Q}_{n,m}$ . Infatti, una potenza  $m$ -esima di una forma lineare non si scompone non banalmente in una somma di potenze  $m$ -esime, in quanto: se  $(\alpha \star X)^m = (\beta \star X)^m + (\gamma \star X)^m$  e poiché il luogo degli zeri  $V((\alpha \star X)^m) = V(\alpha \star X)$  è un iperpiano  $\alpha^\perp$  di  $\mathbb{R}^n$ , avremmo che

$$\alpha^\perp = V((\beta \star X)^m + (\gamma \star X)^m) = V((\beta \star X)^m) \cap V((\gamma \star X)^m) = \beta^\perp \cap \gamma^\perp,$$

ovvero  $\alpha^\perp = \beta^\perp = \gamma^\perp$ . Dunque

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{n-1,m}(\mathbb{RP}^{n-1}) = \text{Est}(\mathbf{Q}_{n,m}) \\ \mathbf{Q}_{n,m} = \text{con}(\mathcal{V}_{n-1,m}(\mathbb{RP}^{n-1})). \end{cases} \quad (2.24)$$

**Osservazione 2.3.2.** Osserviamo inoltre che un polinomio che appartiene al bordo  $\partial\mathbf{Q}_{n,m}$  della forma

$$q = \sum_{k=1}^t (\alpha_k \star)^m$$

avrà la proprietà che esiste un polinomio  $F \in \mathbf{Q}_{n,m}^* = \mathbf{P}_{n,m}$  tale che  $[F, q] = 0$ . Questo significa che

$$0 = \left[ F, \sum_{k=1}^t (\alpha_k \star)^m \right] = \sum_{k=1}^t F(\alpha_k).$$

Poiché  $F$  è un polinomio non negativo, allora necessariamente  $F(\alpha_k) = 0$  per ogni  $k \in \{1, \dots, t\}$ . Ovviamente abbiamo ottenuto che necessariamente anche  $F$  deve stare sul bordo del suo insieme  $\mathbf{P}_{n,m}$ : infatti gli  $\alpha_k$  sono non tutti nulli, e quindi  $F$  deve avere uno zero reale non nullo.

Sia  $L(q) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ . Dunque si ha che  $q \in \partial\mathbf{Q}_{n,m}$  se e solo se esiste  $F \in \partial\mathbf{P}_{n,m}$  tale che

$$L(q) \subseteq V(F),$$

ovvero l'insieme  $L(q)$  giace sull'ipersuperficie definita da  $F$ .

Ovvero

**Proposizione 2.3.3.**  $q \in \mathbf{Q}_{n,m}$  come sopra. Allora  $q \in \partial\mathbf{Q}_{n,m}$  se e solo se  $\partial\mathbf{P}_{n,m} \cap I(L(q)) \neq \emptyset$ .

Nei casi di Hilbert (forme binarie, forme quadratiche e quartiche piane) si ha che

$$\mathbf{Q}_{n,m} = \Sigma_{n,m}^* = \left\{ q \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } \mathbf{H}_q \geq 0 \right\},$$

e quindi  $\partial \mathbf{Q}_{n,m} = \partial \Sigma_{n,m}^*$  e  $\partial_a \mathbf{Q}_{n,m} = \partial_a \Sigma_{n,m}^*$ . Dunque passiamo alla seguente

**Osservazione 2.3.3.** Per come abbiamo definito la forma quadratica di Hankel, possiamo in effetti identificare il duale  $\mathbf{F}'_{n,m}$  di  $\mathbf{F}_{n,m}$  come il sottospazio delle forme di Hankel dentro lo spazio  $G_{n,s}$  delle forme quadratiche reali su  $\mathbf{F}_{n,s}$ : se  $q \in \mathbf{F}'_{n,m}$ , a tale funzionale si associa biunivocamente la forma quadratica  $\mathbf{H}_q(f) = q(f^2)$ , che è esattamente quello che si è fatto definendo la forma di Hankel; dunque  $\mathbf{F}'_{n,m} \subseteq G_{n,s}$ . Quindi, detto  $G_{n,s}^+ = \{Q \in G_{n,s} \mid Q(f) \geq 0 \ \forall f \in \mathbf{F}_{n,s}\}$ , si è visto che

$$\Sigma_{n,m}^* = G_{n,s}^+ \cap \mathbf{F}'_{n,m}, \quad (2.25)$$

cioè che il cono  $\Sigma_{n,m}^*$  è la sezione del cono delle matrici semidefinite positive  $G_{n,s}^+$  con il sottospazio  $\mathbf{F}'_{n,m}$ .

Dunque

$$\begin{aligned} \partial_a \Sigma_{n,m}^* &= \partial_a (G_{n,s}^+ \cap \mathbf{F}'_{n,m}) = (\partial_a G_{n,s}^+) \cap \mathbf{F}'_{n,m} = \\ &= \left\{ q \in \mathbf{F}_{n,m} \text{ tali che } \det(\mathbf{H}_q) = 0 \right\} = \\ &= V(\det H_q). \end{aligned}$$

Quindi si conclude che, in generale, il bordo algebrico di  $\Sigma_{n,m}^*$  è il luogo delle catalettici simmetriche singolari.

### 2.3.4 Bordo di $\Sigma_{3,6}$ e $\Sigma_{4,4}$

Riguardo al bordo algebrico del cono dei polinomi SOS, riportiamo alcuni risultati tratti da [BH]. In particolare siamo interessati ai coni  $\Sigma_{3,6}$  e  $\Sigma_{4,4}$  che sono i primi due esempi di inclusione stretta dentro i coni dei semidefiniti positivi. Abbiamo visto che il bordo algebrico del cono dei non negativi è la cosiddetta varietà discriminante. È possibile che in certi casi tali bordi condividano una componente irriducibile con i bordi del corrispondente cono delle somme di quadrati. Caratterizzare anche le altre componenti è un interessante problema di ricerca che risulta ancora aperto per il generico cono  $\mathbf{P}_{n,m}$ .

**Teorema 2.3.2.** *Il bordo algebrico di  $\Sigma_{3,6}$  ha una sola componente non discriminante, di grado 83.200, che consiste nei polinomi che sono somma di tre quadrati di cubi.*

**Teorema 2.3.3.** *Il bordo algebrico di  $\Sigma_{4,4}$  ha una sola componente non discriminante, di grado 38.475, che consiste nei polinomi che sono somma di quattro quadrati di quadrati.*

Inoltre, sempre in [BH], si dà una caratterizzazione della chiusura dell'insieme dei punti estremali dell'insieme dei polinomi semidefiniti positivi che non sono somma di quadrati, nei casi (3,6) e (4,4):

**Teorema 2.3.4.** *La chiusura di Zariski dell'insieme dei punti estremali di  $\mathbf{P}_{3,6} \setminus \Sigma_{3,6}$  è la varietà di Severi delle sestiche razionali del piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$ : tale varietà ha dimensione 17 e grado 26.312.976 nello spazio  $\mathbb{P}^{27}$  delle sestiche piane.*

**Teorema 2.3.5.** *La chiusura di Zariski dell'insieme dei punti estremali di  $\mathbf{P}_{4,4} \setminus \Sigma_{4,4}$  è la varietà dei simmetroidi di grado 4 in  $\mathbb{P}^3$ , cioè la superficie definita dal determinante di*

una matrice  $4 \times 4$  di forme lineari: tale varietà ha dimensione 24 nello spazio  $\mathbb{P}^{34}$  delle superfici quartiche di  $\mathbb{P}^3$ .

Tali risultati forniscono, tra le altre cose, nuove rappresentazioni geometriche dei polinomi che sono somme di quadrati ma strettamente definite positive (cioè nell'interno di  $\mathbf{P}_{n,m}$ ) e di polinomi del bordo di  $\mathbf{P}_{n,m}$  che non sono somme di quadrati. Il calcolo esplicito del grado di tali varietà può essere utile non soltanto nello studio delle loro proprietà geometriche, ma anche in problemi di ottimizzazione o comunque in campo applicativo. Nel lavoro [B] si giunge inoltre ai seguenti due risultati, che sono in stretta relazione con i Teoremi (2.3.2) e (2.3.3), ottenuti studiando l'insieme degli elementi del bordo di  $\Sigma_{3,6}$  e  $\Sigma_{4,4}$  che giacciono all'interno del cono dei non negativi:

**Teorema 2.3.6** (Blekherman). *Sia  $F \in \partial\Sigma_{3,6} \cap \text{Int}(\mathbf{P}_{3,6})$ . Allora  $F$  ha una scrittura come somma di tre quadrati e non può essere scritto come somma di due quadrati.*

**Teorema 2.3.7** (Blekherman). *Sia  $F \in \partial\Sigma_{4,4} \cap \text{Int}(\mathbf{P}_{4,4})$ . Allora  $F$  ha una scrittura come somma di quattro quadrati e non può essere scritto come somma di tre quadrati.*

Citiamo, inoltre, il seguente risultato tratto da [CT]:

**Teorema 2.3.8** (Colliot-Thélène). *Una generica sestica di  $\Sigma_{3,6}$  è somma di quattro (ma non di tre) quadrati di funzioni razionali.*

## Capitolo 3

# Numero di Carathéodory

Come si è visto, dal Teorema di Hilbert si evince che, in certi casi, un polinomio omogeneo di grado pari  $m$  si scrive come somma di quadrati di polinomi omogenei di grado  $s = \frac{m}{2}$ . Vorremmo studiare alcuni casi in cui è possibile dire qualcosa di più riguardo al *tipo* di tali rappresentazioni come somma di quadrati.

D'ora in avanti supporremo sempre  $\mathbf{P}_{n,m} = \Sigma_{n,m}$ .

**Definizione 3.0.2.** Chiameremo **r-rappresentazione** di un polinomio  $F \in \mathbf{P}_{n,m}$  una rappresentazione di  $F$  come somma

$$F = F_1^2 + \dots + F_r^2 \tag{3.1}$$

di  $r$  quadrati di altri polinomi. Chiameremo inoltre una rappresentazione del tipo (3.1) **estremale** se gli  $F_i^2$  sono tutti estremali

La bontà della definizione di rappresentazione estremale è garantita dalla seguente osservazione.

**Osservazione 3.0.4.** Essere il quadrato di un certo polinomio è condizione necessaria per essere estremale dentro  $\mathbf{P}_{n,m} = \Sigma_{n,m}$ : se così non è, il polinomio si scrive come somma di altri elementi del cono, e quindi non è estremale.

Notiamo che, per l'ipotesi di omogeneità, ognuno degli  $F_i$  ha grado  $s$  e che, per quanto detto nel corollario 1.1.1,  $F$  si può scrivere come somma finita di punti estremali di  $\mathbf{P}_{n,m}$ . Per cui è ben definito il numero naturale

$$h(F) = \min_{\mathbb{N}} \left\{ r \mid F \text{ ha una } r\text{-rappresentazione estremale} \right\},$$

che chiameremo **altezza** di  $F$ . Avremo le seguenti proprietà per  $h(F)$ :

- $h(F + G) \leq h(F) + h(G)$  per ogni  $F, G$
- $h(L) = 1$  se e solo se  $L$  è estremale.

Saremo, dunque, interessati al cosiddetto **numero di Carathéodory** del cono  $\mathbf{P}_{n,m}$ , ovvero al valore

$$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,m}) = \sup_{F \in \mathbf{P}_{n,m}} h(F).$$

Per il Corollario 1.1.1,  $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,m})$  è un max, in quanto è superiormente limitato da

$$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,m}) \leq \dim \mathbf{P}_{n,m} = \binom{n+m-1}{n-1}.$$

Per avere un'idea di questa limitazione, nella Tabella 3.1 si trovano alcuni valori in dimensione bassa. In questo modo, una volta calcolato  $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,m})$ , si ottiene che ogni forma  $F \in \mathbf{P}_{n,m}$  ha una  $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,m})$ -rappresentazione estrema, e che questo valore è il minimo per tale proprietà.

$n$	$m$	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,m}) \leq \binom{n+m-1}{n-1}$
2	2	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,2}) \leq 3$
2	4	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,4}) \leq 5$
2	6	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,6}) \leq 7$
2	8	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,8}) \leq 9$
2	10	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,10}) \leq 11$
3	2	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{3,2}) \leq 6$
4	2	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{4,2}) \leq 10$
5	2	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{5,2}) \leq 15$
6	2	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{6,2}) \leq 21$
3	4	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{3,4}) \leq 15$

Tabella 3.1: Limitazione per  $\mathfrak{C}$  nei primi casi di Hilbert

Sarà utile, inoltre, considerare una particolare azione del gruppo  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  sul cono  $\mathbf{P}_{n,m}$  data da

$$\Phi: \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{P}_{n,m} \rightarrow \mathbf{P}_{n,m} \tag{3.2}$$

$$(M, F) \mapsto M \cdot F$$

tale che  $(M \cdot F)(X) = F(M^{-1}X)$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$ .

### 3.1 Il caso delle forme quadratiche: $\mathbf{P}_{n,2}$

Come si è ricordato anche nella dimostrazione del Teorema di Hilbert, se  $F \in \mathbf{P}_{n,2}$  esso è rappresentato da una matrice  $M$ ,  $n \times n$  a coefficienti reali, simmetrica e semidefinita positiva. Per Sylvester riusciamo a esprimere  $F$  come somma di  $r$  quadrati

$$F = \sum_{j=1}^r (T_j \cdot X)^2 \tag{3.3}$$

dove come sempre  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $r \leq n$  è il rango di  $M$ . Come si è trovato nel capitolo precedente, il bordo di  $\mathbf{P}_{n,2}$  è composto dalle forme singolari, ovvero ha come chiusura di Zariski la varietà determinante; dunque il bordo contiene le forme quadratiche di rango minore stretto di  $n$ . I punti estremali saranno, dunque, le forme di rango uno, ovvero i quadrati perfetti di polinomi di grado uno: infatti ogni forma di rango superiore a uno, non negativa, si decompone nella somma di forme di rango uno e la minima decomposizione possibile ha altezza pari al rango stesso. Anche le forme  $T_j \cdot X$  di (3.3) sono lineari e dunque il loro quadrato è estrema dentro  $\mathbf{P}_{n,2}$ .

Per questo otteniamo che una forma quadratica di rango  $k$  con  $0 \leq k \leq n$  ha altezza  $k$  e che dunque il numero di Carathéodory del cono  $\mathbf{P}_{n,2}$  è minore o uguale a  $n$  e precisamente coincide con il massimo rango di una forma quadratica semidefinita positiva su  $\mathbb{R}^n$ ; ma poiché

$$G_n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \in \mathbf{P}_{n,2}$$

per ogni  $n$ , si conclude che vale, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , il seguente

**Teorema 3.1.1.** *Il numero di Carathéodory per  $\mathbf{P}_{n,2}$  è  $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{n,2}) = n$ .*

**Esempio 3.1.1.** Studiamo le possibili rappresentazioni come somme di due quadrati di  $G_2(x, y) = x^2 + y^2 \in \mathbf{P}_{2,2}$ . Supponiamo di avere

$$G_2 = (ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2,$$

da cui le condizioni

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

soddisfatte se e solo se i vettori  $(a, c)$  e  $(b, d)$  appartengono a  $\mathbb{S}^1 = \text{SO}(2, \mathbb{R})$  e sono ortogonali tra loro. Dunque  $\text{SO}(2, \mathbb{R})$  parametrizza la famiglia delle rappresentazioni di  $G_2$  come somma di due quadrati.

**Esempio 3.1.2.** Studiamo adesso il numero delle rappresentazioni del polinomio  $G_n(X) = x_1^2 + \dots + x_n^2$  rappresentato “rispetto alla base ortonormale canonica” di  $\mathbb{R}^n$ . Sia

$$\begin{aligned} G_n(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{k=1}^n \left( \alpha_{k1}x_1 + \dots + \alpha_{kn}x_n \right)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \alpha_{k1}^2x_1^2 + \dots + \alpha_{kn}^2x_n^2 + 2 \sum_{i < j} \alpha_{ki}\alpha_{kj}x_ix_j \right). \end{aligned}$$

Questo impone le seguenti  $n + \binom{n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$  condizioni quadratiche

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2 = 1, & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}\alpha_{kj} = 0, & \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}^2, \end{cases} \quad (3.4)$$

sulla matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \dots & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

che impongono l'appartenenza  $M \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$ . Questo implica che le righe di  $M$  formano una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  e che  $\text{SO}(n, \mathbb{R})$  parametrizza la famiglia delle rappresentazioni di  $G_n$  come somma di quadrati.

### 3.2 Il caso delle forme binarie: $\mathbf{P}_{2,m}$

Concentriamoci particolarmente sul caso  $n = 2$  delle forme binarie di grado pari  $m = 2s$ . Sia  $F \in \mathbf{P}_{2,m} = \Sigma_{2,m}$  della forma

$$F(x, y) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} c_{j,m-j} x^j y^{m-j}. \quad (3.5)$$

Come si è già fatto notare, le radici reali di  $F$  hanno pari molteplicità, e dunque si può spezzare in questa forma:

$$F(x, y) = \prod_t (a_t x - b_t y)^{2k_t} \prod_{\alpha} (a_{\alpha} x - b_{\alpha} y)(\bar{a}_{\alpha} x - \bar{b}_{\alpha} y) \quad (3.6)$$

dove la prima produttoria è fatta sul numero di radici reali contate senza molteplicità, mentre la seconda sull'insieme delle coppie di radici complesse coniugate di  $F$ .

Osserviamo che per ogni scelta di  $s = \frac{m}{2}$  radici, raggruppandole in un fattore  $A$  e lasciando le seconde  $s$  radici in un fattore  $B$ , si può scrivere  $F$  come

$$F = A \cdot B = \frac{1}{4}(A + B)^2 + \frac{1}{4}(iA - iB)^2 \quad (3.7)$$

ovvero come somma di due quadrati di polinomi di grado  $s$  a coefficienti complessi. Nel caso in cui i coefficienti dei fattori  $A + B$  e  $iA - iB$  risultassero reali, avremmo una scomposizione di  $F$  come somma di due quadrati di polinomi di grado metà. Per il nostro lavoro saranno interessanti alcuni particolari tipi di tali partizioni.

**Definizione 3.2.1.** Sia  $F \in \mathbf{P}_{2,m}$ . Chiamiamo una **partizione delle radici** di  $F$  una coppia  $A, \bar{A} \in \mathbf{F}_{2, \frac{m}{2}}$  tali che

1.  $F = A \cdot \bar{A}$
2. Data  $\alpha$  radice di  $F$ , allora  $\alpha$  è radice di  $A$  se e solo se  $\bar{\alpha}$  è radice di  $\bar{A}$ .

Dunque, se

$$A(x, y) = \text{Re}(A)(x, y) + i \cdot \text{Im}(A)(x, y) \quad \text{e} \quad \bar{A}(x, y) = \text{Re}(A)(x, y) - i \cdot \text{Im}(A)(x, y),$$

si avrà la decomposizione

$$F = (\operatorname{Re}(A))^2 + (\operatorname{Im}(A))^2. \quad (3.8)$$

Vale il seguente fatto fondamentale:

**Teorema 3.2.1.** *Sia  $F = G^2 + H^2$  una forma binaria di grado  $m$  pari, con  $G, H$  polinomi a coefficienti reali. Allora esiste una partizione  $(A, \bar{A})$  delle radici di  $F$  per cui, senza perdita di generalità, si ha  $G = \operatorname{Re}(A)$  e  $H = \operatorname{Im}(A)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $F$  come in ipotesi, dunque  $F = (G + iH)(G - iH)$  e i polinomi a coefficienti complessi  $G + iH$  e  $G - iH$  hanno grado  $s = \frac{m}{2}$ . Nel campo complesso entrambi i polinomi si fattorizzano in un prodotto di  $s$  forme lineari, e dunque ogni loro radice è anche radice di  $F$ . Se  $G(\alpha) + i \cdot H(\alpha) = 0$  allora coniugando si avrà  $G(\bar{\alpha}) - i \cdot H(\bar{\alpha}) = 0$  da cui, chiamato  $A = G + iH$ , si ha che  $(A, \bar{A})$  è una partizione delle radici di  $F$  e  $G = \operatorname{Re}(A)$  e  $H = \operatorname{Im}(A)$ .  $\square$

Concentriamoci, inoltre, prima di passare ad alcuni esempi in grado basso, sulle varietà degli zeri di una generica forma binaria (3.5) scomposta come in (3.6).

$\mathbf{P}_{2,m}$	<b>Classi di <math>V(F)</math></b>	<b>Estremali</b>	<b>Totale</b>
$m = 2$	[2] $\emptyset$	1	2
$m = 4$	[4] [2, 2]	2	4
$m = 6$	[6] [4, 2] [2, 2, 2]	3	7
$m = 8$	[8] [6, 2] [4, 4] [4, 2, 2] [2, 2, 2, 2]	5	12
$m = 10$	[10] [8, 2] [6, 4] [6, 2, 2] [4, 4, 2] [4, 2, 2, 2] [2, 2, 2, 2, 2]	7	19
$m = 12$	[12] [10, 2] [8, 4] [6, 6] [8, 2, 2] [6, 4, 2] [4, 4, 4] [6, 2, 2, 2] [4, 4, 2, 2] [4, 2, 2, 2, 2] [2, 2, 2, 2, 2, 2]	11	30
$m = 14$	[14] [12, 2] [10, 4] [8, 6] [10, 2, 2] [8, 4, 2] [6, 6, 2] [6, 4, 4] [8, 2, 2, 2] [6, 4, 2, 2] [4, 4, 4, 2] [6, 2, 2, 2, 2] [4, 4, 2, 2, 2] [4, 2, 2, 2, 2, 2] [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]	15	45

Tabella 3.2: Varietà degli zeri reali per forme binarie di grado basso

Nella Tabella 3.2 sono riportati i vari casi di varietà degli zeri di una data forma binaria di grado pari, fino al grado 14. Gli zeri reali di una forma binaria  $F$  di grado pari  $m$  formano una ipersuperficie della retta proiettiva reale  $V(F) \subseteq \mathbb{RP}^1$ , ovvero un insieme finito di punti, o, in senso affine, un insieme finito di rette del piano  $\mathbb{R}^2$  per l'origine. Con la notazione  $V(F) = [p_1, \dots, p_k]$  intendiamo che  $V(F)$  è l'unione di  $k$  rette distinte  $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$ , dove ogni  $L_i$  ha "molteplicità"  $p_i$ . È chiaro che la notazione  $[p_1, \dots, p_k]$  indica una "classe" di varietà, mentre per identificare la varietà degli zeri reali di un certo

polinomio (sempre ovviamente a meno di multipli) è necessario e sufficiente indicare i suoi zeri come l'unione  $L_1^{p_1} \cup L_2^{p_2} \cup \dots \cup L_k^{p_k}$  dove  $L_i \neq L_j$  per  $i \neq j$ .

Per semplicità, riportiamo accanto ad ogni valore di  $m$  soltanto i casi in cui  $F$  ha tutte le radici reali (tranne il caso  $m = 2$  dove compare anche il caso vuoto), per cui, al “livello”  $m$ , per ogni  $k$ -upla  $[p_1, \dots, p_k]$  si ha  $\sum p_i = m$ . Per ottenere tutti i casi di un dato  $m$  bisogna dunque unire anche tutti i casi degli  $m$  precedenti, con un piccolo abuso di notazione. Notiamo che le classi così elencate corrispondono proprio ai casi estremali al livello  $m$  e notiamo che il numero di tali casi è uguale al numero di partizioni dell'intero  $\frac{m}{2}$ . Vale la seguente caratterizzazione per  $\text{Est}(\mathbf{P}_{2,m})$ :

**Teorema 3.2.2.** *Sia  $m$  pari e sia  $F \in \mathbf{P}_{2,m}$ . Allora  $F$  è estrema per il cono  $\mathbf{P}_{2,m}$  se e solo se, dato  $V(F)$  della forma  $[p_1, \dots, p_k]$ , vale che  $\sum p_i = m$ , ovvero se e solo se  $F$  è il quadrato di un polinomio con sole radici reali.*

*Dimostrazione.* Facciamo vedere che il quadrato di un polinomio con sole radici reali è estrema. Supponiamo che  $F = G^2$  abbia solo radici reali, con  $\partial G = s = \frac{\partial F}{2}$ , e che  $F = F_1 + F_2$  con  $F_i \in \mathbf{P}_{2,m}$ . Come osservato più volte, vale che

$$V(F) = V(F_1) \cap V(F_2)$$

per la semidefinita positività. Dunque  $V(F) \subseteq V(F_i)$  per  $i = 1, 2$ . Inoltre ogni forma lineare della fattorizzazione di  $F$  deve comparire anche nella fattorizzazione di  $F_1$  e  $F_2$ . Infatti, sia  $L(x, y) = ax - by$  una forma lineare che divide  $F$ ; allora

$$0 = F(b, a) = F_1(b, a) + F_2(b, a)$$

e per la semidefinita positività si ha che  $(b, a)$  annulla entrambi gli  $F_i$  ovvero che  $L$  li divide. Mostriamo adesso che tali forme lineari compaiono con la stessa molteplicità nella scrittura degli  $F_i$  rispetto a quella con cui compaiono nella scrittura di  $F$ . Mostriamo, dapprima, per induzione sulla molteplicità  $2t$  con cui appare  $L$  nella fattorizzazione di  $F$ , che se  $L^{2t}$  divide, appunto,  $F$ , allora divide anche gli  $F_i$ . Se  $t = 1$ , allora sia  $F = L^2 H$ . Come si è visto,  $L$  divide gli  $F_i$ , e dunque anche  $L^2$ , cioè  $F_i = L^2 J_i$ , da cui la tesi. Supponiamo, ora, che  $F = L^{2t} H$ . Come prima,  $L^2$  divide ancora gli  $F_i$ , e dunque  $F = L^{2t} H = L^2 (H_1 + H_2)$  con  $F_i = L^2 H_i$  e  $H_i$  ancora non negativi, da cui  $L^{2(t-1)} H = H_1 + H_2$ . Per ipotesi induttiva  $L^{2(t-1)}$  divide gli  $H_i$ , e dunque si conclude che  $L^{2t}$  divide  $F_i$ . Ripetendo questo ragionamento per ogni forma lineare della fattorizzazione di  $F$ , ricordando che  $F, F_1, F_2$  sono tutti e tre di grado  $m$  e che  $F$  ha solo radici reali, si ottiene che

$$V(F) = V(F_1) = V(F_2) = L_1^{2t_1} \cup \dots \cup L_k^{2t_k}.$$

Dunque  $F, F_1, F_2$  definiscono la stessa ipersuperficie e dunque esistono due numeri reali  $\lambda_1, \lambda_2$  non negativi tali che  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  e  $F_i = \lambda_i F$ , da cui l'estremalità di  $F$ .

Viceversa, supponiamo che  $F$  sia estrema in  $\mathbf{P}_{2,m}$ . Dunque, prima di tutto esiste  $G \in \mathbf{F}_{2,s}$  tale che  $F = G^2$ , come già osservato. Supponiamo per assurdo che  $G$  abbia una radice complessa. Osserviamo che, a meno dell'azione (3.2), possiamo supporre che

tale radice sia immaginaria pura. Se infatti

$$\begin{aligned} F &= (x - \alpha y)^{2t} (x - \bar{\alpha} y)^{2t} \cdot H^2(x, y) = \\ &= \left( (x - \alpha_1 y) - i\alpha_2 y \right)^{2t} \left( (x - \alpha_1 y) + i\alpha_2 y \right)^{2t} \cdot H^2(x, y), \end{aligned}$$

allora, operando la sostituzione di variabili

$$\begin{cases} \varphi = x - \alpha_1 y \\ \psi = y \end{cases}$$

di matrice  $T = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ , si ottiene che nell'orbita di  $F$  rispetto all'azione (3.2) c'è un polinomio  $\tilde{F}$  con una radice immaginaria pura della stessa molteplicità:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\varphi, \psi) &= (\varphi - i\alpha_2 \psi)^{2t} (\varphi + i\alpha_2 \psi)^{2t} \cdot \tilde{H}^2(\varphi, \psi) = \\ &= (\varphi^2 + (\alpha_2 \psi)^2)^{2t} \cdot \tilde{H}^2 = \\ &= \left( \sum_{i=0}^{2t} \binom{2t}{i} \varphi^{2i} (\alpha_2 \psi)^{2(2t-i)} \right) \cdot \tilde{H}^2 = \\ &= \sum_{i=0}^{2t} \binom{2t}{i} (\varphi^i (\alpha_2 \psi)^{2t-i} \cdot \tilde{H})^2, \end{aligned}$$

e dunque

$$F(x, y) = \tilde{F}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = \sum_{i=0}^{2t} \binom{2t}{i} \left( (x - \alpha_1 y)^i (\alpha_2 y)^{2t-i} \cdot H \right)^2$$

e per ogni  $i = 0, \dots, 2t$  si ha che il termine  $i$ -esimo della somma è diverso da  $F$ . Quindi, procedendo per assurdo, si è trovata una decomposizione di  $F$  come somma di altri elementi del cono. Contraddizione, perché avevamo scelto  $F$  estrema.  $\square$

**Osservazione 3.2.1.** Notiamo che è possibile determinare, a questo punto, la dimensione dell'insieme dei punti estremali di  $\mathbf{P}_{2,m}$ . Sia come sempre  $s = \frac{m}{2}$ . Allora se una forma binaria  $F$  di grado  $m$  ha una decomposizione del tipo  $F = \sum E_i$  dove  $E_i = H_i^2$ , i polinomi  $H_i$  appartengono ad  $F_{2,s}$  che ha dimensione affine  $s + 1$  e proiettiva  $s$ . Quindi l'insieme degli estremali ha dimensione  $\frac{m}{2} + 1$  in senso affine, ed  $\frac{m}{2}$  in senso proiettivo.

### 3.2.1 Le quartiche

Abbiamo analizzato, inizialmente, il primo caso non banale di forme binarie non negative, quello delle quartiche di  $\mathbf{P}_{2,4}$ :

$$\mathbf{P}_{2,4} = \left\{ F(x, y) = c_{04}y^4 + 4c_{13}xy^3 + 6c_{22}x^2y^2 + 4c_{31}x^3y + c_{40}x^4 \succeq 0 \right\}.$$

Sia  $F \in \mathbf{P}_{2,4}$ . Per il Teorema fondamentale dell'Algebra, sul campo dei complessi  $F$  ha una fattorizzazione unica in forme lineari:

$$F = \prod_{i=1}^4 (a_i x - b_i y),$$

dove  $[a_i : b_i] \in \mathbb{CP}^1$ . Se poi imponiamo la semidefinita positività, si hanno sostanzialmente quattro casi:

1.  $F$  ha una radice reale di molteplicità 4 (esempio in Figura 3.1)
2.  $F$  ha due radici reali entrambe doppie (Figura 3.2)
3.  $F$  ha una radice reale doppia e una coppia di complesse (Figura 3.3)
4.  $F$  ha due coppie di radici complesse coniugate (Figura 3.4)

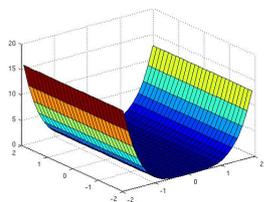


Figura 3.1:  $Q_1 = x^4$

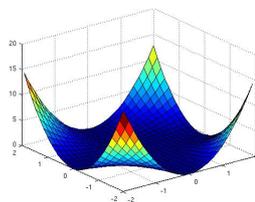


Figura 3.2:  $Q_2 = x^2 y^2$

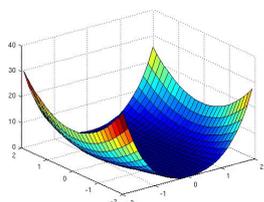


Figura 3.3:  $Q_3 = x^2(x^2 + y^2)$

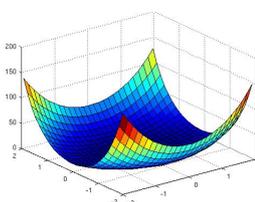


Figura 3.4:  $Q_4 = (x^2 + y^2)(x^2 + 4y^2)$

I polinomi di tipo 4 compongono l'interno di  $\mathbf{P}_{2,4}$ , mentre gli altri fanno parte del bordo del cono. In più, per i polinomi  $F \in \partial\mathbf{P}_{2,4}$  i punti reali di  $\{F = 0\}$  sono singolari, e quindi le eventuali radici reali hanno molteplicità pari. Analizzando la varietà degli zeri  $V(F) \subseteq \mathbb{R}^2$  (o proiettivamente dentro  $\mathbb{P}^1$ ) nei vari casi di cui sopra, si ha che rispettivamente

1.  $V(Q_1)$  è una retta quadrupla (un punto quadruplo di  $\mathbb{P}^1$ )
2.  $V(Q_2)$  è l'unione di due rette doppie (due punti doppi distinti di  $\mathbb{P}^1$ )
3.  $V(Q_3)$  è una retta doppia (un punto doppio di  $\mathbb{P}^1$ )
4.  $V(Q_4) = \{(0, 0)\}$  ( $\emptyset$  in  $\mathbb{P}^1$ )

Ma cosa succede alle varietà associate quando si sommano elementi di  $\mathbf{P}_{2,4}$ ? Come si è visto in generale, date  $F_1, F_2 \in \mathbf{P}_{2,4}$ , vale che  $V(F_1 + F_2) = V(F_1) \cap V(F_2)$  per la semidefinita positività di entrambe. Ad esempio, si prenda

$$\begin{aligned} F_1 &= (x - y)^2(x + y)^2 \\ F_2 &= (2x - y)^2(2x + y)^2 \\ F_1 + F_2 &= 17x^4 - 10x^2y^2 + 2y^4, \end{aligned}$$

per cui  $V(F_1)$  e  $V(F_2)$  sono coppie di rette doppie, l'intersezione è  $\{0\}$  nel piano affine e dunque vuota in  $\mathbb{P}^1$ ; di contro,  $V(F_1 + F_2) = \emptyset$ . Oppure si prenda

$$\begin{aligned} F_1 &= (x - y)^2(x + y)^2 \\ F_2 &= (x - y)^2(2x - y)^2 \\ F_1 + F_2 &= (x - y)^2(5x^2 - 2xy + 2y^2) \end{aligned}$$

e il secondo fattore di  $F_1 + F_2$  ha due radici non reali. In questo caso le due coppie di rette doppie hanno un elemento comune, che diventa il luogo degli zeri reali di  $F_1 + F_2$ . Dalla Tabella 3.3, nella quale si riportano tutte le combinazioni di somme di due elementi di  $\mathbf{P}_{2,4}$ , identificate dalle varietà di zeri associate, si può dire qualcosa di più su  $\partial\mathbf{P}_{2,4}$ .

$\mathbf{V}(\mathbf{F}_1)$	$\mathbf{V}(\mathbf{F}_2)$	$\mathbf{V}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$	caso
$L^4$	$R^4$	$L^4$ $\emptyset$	$L = R$ altrimenti
$L^4$	$R_1^2 \cup R_2^2$	$R_1^2$ $\emptyset$	$L = R_1$ altrimenti
$L^4$	$R^2$	$R^2$ $\emptyset$	$L = R$ altrimenti
$L^4$	$\emptyset$	$\emptyset$	-
$L_1^2 \cup L_2^2$	$R_1^2 \cup R_2^2$	$L_1^2 \cup L_2^2$ $L_1^2$ $\emptyset$	$L_1 = R_1$ e $L_2 = R_2$ $L_1 = R_1$ e $L_2 \neq R_2$ altrimenti
$L_1^2 \cup L_2^2$	$R^2$	$R^2$ $\emptyset$	$L_1 = R$ altrimenti
$L_1^2 \cup L_2^2$	$\emptyset$	$\emptyset$	-
$L^2$	$R^2$	$L^2$ $\emptyset$	$L = R$ altrimenti
$L^2$	$\emptyset$	$\emptyset$	-
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	-

Tabella 3.3: Somma di elementi di  $\mathbf{P}_{2,4}$

Rispetto alla classificazione nelle quattro tipologie indicate sopra, si conclude che:

- L'interno di  $\mathbf{P}_{2,4}$  è formato dagli elementi di tipo 4.

- Il bordo di  $\mathbf{P}_{2,4}$  è formato dagli elementi di tipo 1,2,3.
- I punti estremali di  $\mathbf{P}_{2,4}$  sono quelli di tipo 1,2.

Dunque si è ritrovato quanto mostrato genericamente per le forme binarie, ovvero che  $\text{Est}(\mathbf{P}_{2,4})$  è la varietà delle quartiche che sono quadrati di polinomi con tutte le radici reali.

## Decomposizioni

Applichiamo adesso quanto detto in (3.8) ad una generica quartica. Sia

$$\mathbf{P}_{2,4} \ni F = a \cdot x^4 + \dots$$

e dunque si hanno due casi. Se  $a = 0$ , allora  $y$  divide  $F$  e dunque anche  $y^2$ . Allora, se  $F = c \cdot y^4$ ,  $F$  è già un quadrato estremoale. Se  $F = y^2(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y)$ , scegliendo  $A = y(x - \alpha y)$  e  $B = \bar{A}$  si ha che

$$F = (xy - \alpha_1 y^2)^2 + (\alpha_2 y^2)^2$$

dove  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ , ovvero somma di due estremali. Possiamo decomporre dunque  $F \in \mathbf{P}_{2,4}$  in questo modo:

$$F = (x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y)(x - \beta y)(x - \bar{\beta}y)$$

e consideriamo i quattro casi come sopra, ponendo  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$  e  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ :

1.  $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$ , ovvero  $F = (x - \alpha y)^4$ . Dunque  $F$  è già il quadrato del polinomio  $(x - \alpha y)^2$ , che ha una radice reale doppia; ovvero  $F$  è estremoale. Notare che  $F$  giace nell'orbita di  $x^4$  rispetto all'azione (3.2), perché  $\det \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$  per ogni  $\alpha$ .
2.  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$ , ovvero  $F = (x - \alpha y)^2(x - \beta y)^2$ . Anche in questo caso  $F$  è il quadrato di un polinomio con tutte le radici reali, ovvero  $F$  è estremoale. Osserviamo anche qui che  $F$  sta nell'orbita di  $x^2 y^2$  perché il determinante della matrice della sostituzione di variabili è  $\det = \alpha - \beta \neq 0$ .
3.  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Allora  $F = (x - \alpha y)^2(x - \beta y)(x - \bar{\beta}y)$ . Scegliendo  $A = (x - \alpha y)(x - \beta y)$ ,  $B = \bar{A} = (x - \alpha y)(x - \bar{\beta}y)$ , si ha che

$$\begin{aligned} F &= A \cdot \bar{A} = \text{Re}(A)^2 + \text{Im}(A)^2 = \\ &= \left( x^2 - (\alpha + \beta_1)xy + \alpha\beta_1 y^2 \right)^2 + \left( \beta_2 xy - \alpha\beta_2 y^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Il secondo polinomio si annulla in  $[1 : 0]$  e quindi ha due radici reali; la condizione affinché  $\text{Re}(A)$  abbia due radici reali è che il discriminante di  $\text{Re}(A)$  sia non negativo, ovvero che  $\Delta = (\alpha + \beta_1)^2 - 4\alpha\beta_1 = (\alpha - \beta_1)^2 \geq 0$ , e questo è vero per ognuna

delle due possibili scelte di  $\beta$ . Quindi  $\operatorname{Re}(A)$  ha due radici reali ed un polinomio di questo tipo si scrive come somma di due estremali, cioè ha altezza 2.

4.  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Scegliamo  $A = (x - \alpha y)(x - \beta y)$ ,  $B = \bar{A}$ . Allora

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Re}(A)^2 + \operatorname{Im}(A)^2 = \\ &= \left( x^2 - (\alpha_1 + \beta_1)xy + (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)y^2 \right)^2 + \\ &\quad + \left( (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)y^2 - (\alpha_2 + \beta_2)xy \right)^2. \end{aligned}$$

Il secondo addendo ha, come prima, due radici reali esplicite. Il discriminante del primo addendo risulta essere:

$$\Delta = (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 4(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) = (\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4\alpha_2\beta_2. \quad (3.9)$$

A questo punto è chiaro che, senza perdita di generalità, possiamo scegliere  $\alpha$  e  $\beta$  (e di conseguenza  $A$ ) in modo che le loro parti immaginarie siano concordi, e dunque ottenere l'esistenza di una decomposizione di  $F$  come somma di due quadrati di polinomi con solo radici reali.

**Esempio 3.2.1.** Come esempio di un polinomio di tipo 4, prendiamo

$$F = x^4 - 2x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + 2y^4.$$

Il polinomio si spezza nel prodotto  $F = (x - iy)(x + iy)(x - (1 + i)y)(x - (1 - i)y)$ . Scegliamo ad esempio  $\alpha = i$  e  $\beta = 1 + i$ , che hanno entrambi parte immaginaria positiva. Allora  $A = (x - iy)(x - (1 + i)y) = (x^2 - xy - y^2) + i(y^2 - 2xy)$  e dunque si ha la decomposizione

$$F = \left( x^2 - xy - y^2 \right)^2 + \left( y^2 - 2xy \right)^2.$$

Osserviamo che potevamo scegliere anche  $\alpha = -i$  e  $\beta = 1 - i$  e ottenere  $A = (x + iy)(x - (1 - i)y) = (x^2 - xy - y^2) + i(2xy - y^2)$  che porta però alla stessa decomposizione di  $F$ , in quanto rappresenta la stessa partizione a meno dell'ordine.

Per avere un'idea di come si scompongano i vari prototipi di quartiche che si sono analizzate, torniamo agli esempi che abbiamo fatto precedentemente:

1.  $Q_1 = x^4$ , è il quadrato di  $x^2$ , ed è estrema per  $\mathbf{P}_{2,4}$ .
2.  $Q_2 = x^2y^2$ , è il quadrato di  $xy$ , ed è estrema per  $\mathbf{P}_{2,4}$ .
3.  $Q_3 = x^2(x^2 + y^2) = Q_1 + Q_2$  non è un quadrato, ma è somma di due punti estremali di  $\mathbf{P}_{2,4}$ .
4.  $Q_4 = (x^2 + y^2)(x^2 + 4y^2) = (x^2 - 2y^2)^2 + (3xy)^2$  è somma di due punti estremali di  $\mathbf{P}_{2,4}$ .

## Unicità della rappresentazione

Riguardo l'unicità della rappresentazione come somma di due estremali di una quartica  $F$ , vale la seguente caratterizzazione.

**Proposizione 3.2.1.** *Se  $F \in \partial\mathbf{P}_{2,4}$ , allora  $F$  ha una unica decomposizione come somma di al più due estremali. Esiste inoltre una ipersuperficie quadrica di  $\mathbb{R}^4$  che divide  $\mathbf{P}_{2,4}$  in due regioni, formate rispettivamente dalle quartiche con esattamente una ed esattamente due rappresentazioni possibili come somma di al più due estremali.*

*Dimostrazione.* È chiaro che l'unicità della rappresentazione vale per ogni elemento di  $\partial\mathbf{P}_{2,4}$ . Infatti, se  $F$  appartiene al bordo,  $F$  ha una radice reale doppia e quindi ha la forma

$$F(x, y) = (ax - by)^2(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y)$$

con  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dunque c'è una sola partizione  $(A, \bar{A})$  delle radici di  $F$  a meno di scambiare  $A$  con  $\bar{A}$ , e quindi una sola possibile decomposizione. Inoltre, una quartica generica ha la forma

$$F = (x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y)(x - \beta y)(x - \bar{\beta}y),$$

e dunque  $\mathbb{P}(\text{Int}(\mathbf{P}_{2,4}))$  può essere identificato con l'insieme

$$\left\{ F = (x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y)(x - \beta y)(x - \bar{\beta}y) \mid \alpha_2 \geq 0, \beta_2 \leq 0, \alpha_1 \leq \beta_1 \right\},$$

il quale a sua volta è parametrizzato dalla varietà semialgebrica

$$W = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \mid \alpha_2 \geq 0, \beta_2 \leq 0, \alpha_1 \leq \beta_1 \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Consideriamo l'ipersuperficie

$$Q = V\left((\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4\alpha_2\beta_2\right) \subset \mathbb{R}^4,$$

definita come luogo di zeri del discriminante della parte reale della partizione di un generico  $F \in \mathbf{P}_{2,4}$  come in (3.9). Si ottiene che  $W = W^+ \cup W^-$  dove

$$W^+ = W \cap \left\{ (\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4\alpha_2\beta_2 \geq 0 \right\}$$

e

$$W^- = W \cap \left\{ (\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4\alpha_2\beta_2 \leq 0 \right\}.$$

Dunque  $Q$  divide  $W$  in due regioni, per cui se  $p \in W^+$  la quartica  $F_p$  parametrizzata da  $p$  ha esattamente due rappresentazioni distinte come somma di due estremali, mentre se  $p \in W^-$ ,  $F_p$  ha una unica rappresentazione.

Si ritrova, inoltre, che  $\partial\mathbf{P}_{2,4} \subset W^+$ . Infatti, se la quartica  $F_p$  appartiene al bordo, allora, detto  $p = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)$ , si ha che  $\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2 = 0$ , cioè che il punto  $p$  appartiene a  $\partial W$ : in questo caso le due rappresentazioni per  $F_p$  sono coincidenti.  $\square$

Si ottiene, dunque, che non vale l'unicità della rappresentazione in  $\mathbf{P}_{2,4}$ . Inoltre, facciamo

due esempi di polinomi appartenenti alle due regioni dell'interno del cono corrispondenti al numero di rappresentazioni:

- *Unica rappresentazione.* Sia  $F_t = (x^2 + y^2)(x^2 + t^2 y^2)$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Poiché entrambe le radici sono immaginarie pure ( $\alpha_1 = 0 = \beta_1$ ) si ottiene che la relazione 3.9 può valere solo scegliendo la partizione  $A$  in modo che le radici abbiano parti immaginarie concordi; dunque, una sola partizione e quindi una sola decomposizione, cioè la seguente:

$$F_t = (x^2 - ty^2)^2 + ((1+t)xy)^2.$$

- *Doppia rappresentazione.* Sia  $F = x^4 - 6x^3y + 11x^2y^2 - 6xy^3 + 10y^4$  la quartica di radici  $\{\pm i, 3 \pm i\}$ . Scegliendo come prima partizione

$$A_1 = (x - (3+i)y)(x - iy)$$

si ottiene la decomposizione estrema

$$F = (x^2 - 3xy - y^2)^2 + (-2xy + 3y^2)^2.$$

Notiamo che questa decomposizione corrisponde alla partizione in cui si è scelto  $\alpha = 3 + i$  e  $\beta = i$ , ovvero con parti immaginarie entrambe positive. Ma si nota che la condizione  $\Delta \geq 0$  è verificata anche scambiando  $\beta$  con  $\bar{\beta} = -i$ , in quanto in questo caso  $\Delta = 9 - 4 = 5 \geq 0$ . Questa seconda partizione, con

$$A_2 = (x - (3+i)y)(x + iy),$$

genera la decomposizione

$$F = (x^2 - 3xy + y^2)^2 + (3y^2)^2,$$

che non coincide con la precedente.

**Osservazione 3.2.2.** Riprendendo l'Osservazione 3.2.1, notiamo che il cono  $\mathbf{P}_{2,4}$  ha dimensione 5, in quanto  $\dim(\mathbf{F}_{2,4}) = \binom{2+4-1}{4} = 5$ , ma proiettivamente possiamo considerare  $\mathbf{P}_{2,4} \subset \mathbb{P}^4$ , quindi di dimensione 4. L'insieme degli estremali ha la stessa dimensione di  $\mathbf{F}_{2,2}$ , ovvero  $\binom{2+2-1}{2} = 3$  cioè proiettivamente 2. Quindi abbiamo decomposto ogni elemento di un cono di dimensione 4 in somma di elementi che appartengono ad un insieme di dimensione 2.

Riassumendo, poiché un polinomio di  $\mathbf{P}_{2,4}$  può avere altezza 1 o 2, ma tale cono non contiene solo quadrati perfetti, si ottiene che

**Teorema 3.2.3.** *Il numero di Carathéodory per  $\mathbf{P}_{2,4}$  è  $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,4}) = 2$ .*

**Osservazione 3.2.3.** Come visto in (2.12), la forma di Hankel per la quartica generica

$F$  è  $\mathbf{H}_F(T) = T^t B_{2,4}^F T$  dove

$$B_{2,4}^F = \begin{pmatrix} c_{04} & c_{13} & c_{22} \\ c_{13} & c_{22} & c_{31} \\ c_{22} & c_{31} & c_{40} \end{pmatrix}.$$

Se ad esempio  $F = (x + \alpha y)^4$ , allora la Hankel associata è

$$\begin{pmatrix} \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

di rango uno. Infatti, come ripetuto più volte, le quarte potenze di una forma lineare sono in corrispondenza con i punti della varietà di Veronese  $\mathcal{V}_{1,4}$ , nota anche come *curva normale razionale* di grado 4. I polinomi di questo tipo sono, come visto, esattamente i punti estremali di  $\mathbf{Q}_{2,4}$ .

Se invece  $G = (ax + by)^2(cx + dy)^2$ , con  $ad - bc \neq 0$ , la matrice è

$$\begin{pmatrix} b^2 d^2 & \frac{abd^2 + b^2 cd}{2} & \frac{a^2 d^2 + 4abcd + b^2 c^2}{6} \\ \frac{abd^2 + b^2 cd}{2} & \frac{a^2 d^2 + 4abcd + b^2 c^2}{6} & \frac{a^2 cd + abc^2}{2} \\ \frac{a^2 d^2 + 4abcd + b^2 c^2}{6} & \frac{a^2 cd + abc^2}{2} & a^2 c^2 \end{pmatrix}$$

ed ha rango massimo. È chiaro infatti che il rango della matrice di Hankel è un invariante sotto l'azione (3.2), e se consideriamo  $G = x^2 y^2$  si ha che

$$x^2 y^2 = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

dove si nota che la matrice di Hankel di una quartica rappresenta il polinomio come una forma quadratica nella base monomiale di grado metà, in questo caso di grado due. Il determinante

$$\det(B_{2,4}) = c_{04}c_{22}c_{40} + 2c_{13}c_{31}c_{22} - c_{22}^3 - c_{31}^2c_{04} - c_{13}^2c_{40}$$

definisce una ipersuperficie cubica in  $\mathbb{R}\mathbb{P}^4$ , che come si è visto è proprio il bordo algebrico di  $\Sigma_{2,4}^* = \mathbf{Q}_{2,4}$ .

### 3.2.2 Le sestiche

Un polinomio  $F \in \mathbf{P}_{2,6}$  si spezza nel prodotto di sei forme binarie lineari.

#### Il bordo

Eliminiamo, prima di tutto, un caso semplice, ovvero mettiamoci nel bordo di  $\mathbf{P}_{2,6}$ . Supponiamo dunque che  $F$  abbia una radice reale, ovvero che  $(ax - by)^2$  divida  $F$  con

$a, b \in \mathbb{R}$ , allora

$$F = (ax - by)^2 G \quad (3.11)$$

dove  $G \in \mathbf{P}_{2,4}$ , per cui

$$F = (ax - by)^2 (G_1^2 + G_2^2) = \left( (ax - by)G_1 \right)^2 + \left( (ax - by)G_2 \right)^2$$

e gli addendi hanno solo radici reali. Dunque si conclude che il bordo del cono  $\mathbf{P}_{2,6}$  è costituito da polinomi di altezza uno o due.

### L'interno

Proseguendo, ci resta dunque da analizzare soltanto il caso in cui  $F$  non ha radici reali. Scriviamo la nostra sestica come prodotto di forme lineari:

$$F = (x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y)(x - \beta y)(x - \bar{\beta}y)(x - \gamma y)(x - \bar{\gamma}y), \quad (3.12)$$

con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Se indichiamo con  $\alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha$  e  $\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha$  e così per  $\beta$  e  $\gamma$ , si ha dunque che  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \neq 0$ . Isolando senza perdita di generalità la radice  $\alpha$ , si ottiene

$$F = (x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y) \cdot G \quad (3.13)$$

dove  $G$  è una quartica binaria. Osserviamo innanzitutto che, poiché la forma quadratica  $(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y)$  è non negativa, allora  $G \in \mathbf{P}_{2,4}$  e per questo (come sopra) si scrive come somma  $G = G_1^2 + G_2^2$  dove i  $G_i$  sono forme binarie di grado due con solo radici reali. Analogamente  $(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y) = H_1^2 + H_2^2$  dove gli  $H_i$  sono forme lineari. Dunque si ha che

$$F = (H_1^2 + H_2^2)(G_1^2 + G_2^2) = \sum_{i,j \in \{1,2\}} (H_i G_j)^2$$

ovvero che  $F$  è somma di al più 4 quadrati di polinomi con solo radici reali, ovvero che

**Osservazione 3.2.4.**  $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,6}) \leq 4$ .

Cerchiamo di ridurre questo limite. Indichiamo come nel caso generico con

$$A = (x - \alpha y)(x - \beta y)(x - \gamma y), \quad (3.14)$$

una data partizione delle radici della sestica  $F$ . Si ha come prima che  $F = A \cdot \bar{A} = \operatorname{Re}(A)^2 + \operatorname{Im}(A)^2$ . Calcolando, si ottiene

$$A = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2y + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)xy^2 - \alpha\beta\gamma y^3,$$

e dunque

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A) &= x^3 - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)x^2y + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_2\gamma_2 - \\ &\quad - \beta_2\gamma_2)xy^2 - (\alpha_1\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_2\gamma_1 - \alpha_1\beta_2\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_2)y^3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(A) = & -(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)x^2y + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_1\gamma_2 + \beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\gamma_1 + \\ & + \beta_2\gamma_1)xy^2 - (\alpha_1\beta_1\gamma_2 - \alpha_2\beta_2\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_1)y^3. \end{aligned}$$

Osserviamo che  $\operatorname{Im}(A) = y \cdot Q$ , dove  $Q$  è un opportuno polinomio di secondo grado, e dunque  $\operatorname{Im}(A)$  ha come radice reale il punto  $[1 : 0]$ . Dunque la condizione affinché  $\operatorname{Im}(A)$  abbia tre radici reali è che  $Q$  abbia due radici reali, ovvero che

$$\begin{aligned} \Delta(Q) = & \left(\alpha_1\beta_2 + \alpha_1\gamma_2 + \beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\gamma_1 + \beta_2\gamma_1\right)^2 - 4\left[\left(\alpha_2 + \beta_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma_2\right)\left(\alpha_1\beta_1\gamma_2 - \alpha_2\beta_2\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_1\right)\right] \end{aligned}$$

sia non negativo. Per quanto riguarda  $\operatorname{Re}(A)$ , rinominiamo i suoi coefficienti in questo modo

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -\frac{1}{3}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \\ a_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_2\gamma_2 - \beta_2\gamma_2) \\ a_3 = \alpha_2\beta_2\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\beta_1\gamma_1 \end{cases}$$

e consideriamo la matrice  $2 \times 3$  formata da

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

È noto che, a meno di multipli scalari, esiste un unico polinomio omogeneo di grado due nella base delle derivazioni  $\{\partial_x^2, \partial_x\partial_y, \partial_y^2\}$  che annulla la cubica  $\operatorname{Re}(A)$ , e che tale polinomio ha per coefficienti i minori  $2 \times 2$  con segno della matrice  $C$ . Si ha

$$\left( \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \partial_x^2 - \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \partial_x\partial_y + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \partial_y^2 \right) (\operatorname{Re}(A)) = 0.$$

Si ha inoltre che la cubica ha solo radici reali se e solo se il discriminante del polinomio delle derivazioni è non positivo, ovvero la condizione diventa

$$a_3^2 - 3a_1^2a_2^2 - 6a_1a_2a_3 + 4a_1^3a_3 + 4a_2^3 \leq 0.$$

Riassumendo, le condizioni sulla scelta di  $\alpha, \beta, \gamma$  per determinare  $A$  in modo che  $\operatorname{Re}(A)$  e  $\operatorname{Im}(A)$  abbiano solo radici reali, sono le seguenti:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}^2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - 4\operatorname{Im}(\alpha\beta\gamma)(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 0 \\ \operatorname{Re}^2(\alpha\beta\gamma) - \frac{1}{27}\operatorname{Re}^2(\alpha + \beta + \gamma)\operatorname{Re}^2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - \\ - \frac{2}{3}\operatorname{Re}(\alpha + \beta + \gamma)\operatorname{Re}(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\operatorname{Re}(\alpha\beta\gamma) + \\ + \frac{4}{27}\operatorname{Re}^3(\alpha + \beta + \gamma)\operatorname{Re}(\alpha\beta\gamma) + \frac{4}{27}\operatorname{Re}^3(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \leq 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Analizzando prima un caso particolare, supponiamo che  $\alpha, \beta, \gamma$  siano immaginari puri,

ovvero  $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ . In questo caso le condizioni si riducono a

$$\begin{cases} \alpha_2\beta_2\gamma_2 \cdot (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 0 \\ \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_2 \geq 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

che possono essere soddisfatte scegliendo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  con parti immaginarie concordi (tutte e tre negative o tutte e tre positive) ed ottenere che

$$F = \operatorname{Re}(A)^2 + \operatorname{Im}(A)^2 = \left(x^3 - (\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_2)xy^2\right)^2 + \left(\alpha_2\beta_2\gamma_2y^3 - (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)x^2y\right)^2. \quad (3.17)$$

Dunque, si ha intanto la seguente

**Proposizione 3.2.2.** *Ogni sestica binaria semidefinita positiva che ammette una radice reale è estrema (se ha tutte le radici reali) oppure ha altezza due (in caso contrario). Se la sestica, invece, ammette esclusivamente radici immaginarie pure, essa ha altezza due ed ammette la decomposizione descritta in (3.17).*

**Esempio 3.2.2.** Sia per esempio

$$F = x^6 + 14x^4y^2 + 39x^2y^4 + 36y^6 = (x^2 + y^2)(x^2 + 4y^2)(x^2 + 9y^2).$$

Scegliamo  $A = (x - iy)(x - 2iy)(x - 3iy)$ ,  $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 2, \gamma_2 = 3$  e dunque:

$$\left(x^3 - 11xy^2\right)^2 + \left(6y^3 - 6x^2y\right)^2 = x^6 + 14x^4y^2 + 39x^2y^4 + 36y^6 = F.$$

Se sceglievamo le tre radici con parti immaginarie tutte negative, ottenevamo la stessa decomposizione per  $F$ .

Resta da analizzare, a questo punto, il caso davvero generico in cui la sestica ha almeno una radice complessa  $\gamma$  con  $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$ . In generale, la sestica che analizziamo avrà sei radici complesse coniugate a coppie, che possiamo rappresentare genericamente nel piano complesso come in Figura 3.5.

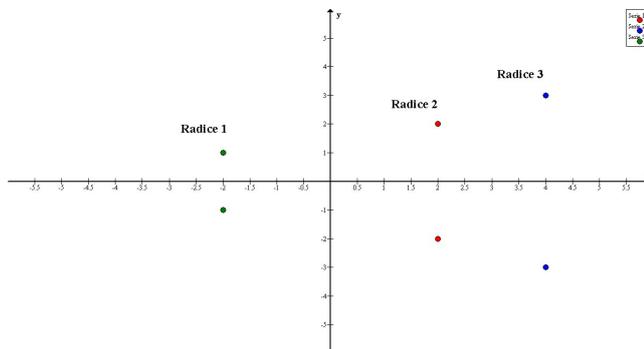


Figura 3.5: Radici della sestica in  $\operatorname{Int}(\mathbf{P}_{2,6})$

Consideriamo la compattificazione del piano complesso  $\mathbb{C}$  nella sfera di Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  e il gruppo  $G$  delle trasformazioni di  $\widehat{\mathbb{C}}$  in sé generato dalle simmetrie rispetto a rette

verticali, ovvero della forma  $\operatorname{Re}(z) = c$  con  $c \in \mathbb{R}$ , dalle inversioni circolari rispetto a circonferenze di centro reale e dalle omotetie  $f(z) = az$  con  $a \in \mathbb{R}$ . Tale gruppo è il sottogruppo del gruppo delle trasformazioni di Möbius formato dalle trasformazioni

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad e \quad h(z) = \frac{\bar{a}z + b}{\bar{c}z + d} \quad (3.18)$$

dove la matrice  $A_g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  è formata da elementi reali  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , con  $ad - bc \neq 0$ .

Il gruppo  $G$  agisce transitivamente sull'insieme delle rette verticali e delle circonferenze di centro reale, in quanto per ogni retta generalizzata  $R$  di questo tipo esiste una trasformazione  $g \in G$  tale che  $g(R)$  è l'asse immaginario  $\operatorname{Re}(z) = 0$ . Infatti: tramite le simmetrie assiali si generano tutte le traslazioni orizzontali e quindi ogni retta verticale è nell'orbita dell'asse immaginario; analogamente, ogni semicirconferenza di centro reale e raggio  $r$  è congruente ad una semicirconferenza che passa per  $(0, 0)$  dello stesso raggio, tramite traslazione; quest'ultima circonferenza ottenuta è mandata nell'asse immaginario tramite l'inversione circolare associata alla circonferenza di raggio  $2r$  e centro in  $(2r, 0)$ . L'azione sul piano, e dunque sulle radici di  $F$ , induce un'azione sulla sestica  $F$  stessa. Tale azione manda polinomi con solo radici reali in funzioni razionali con solo radici reali, mantenendo la decomposizione di  $F$  come somma di estremali e dunque la sua altezza. Infatti, supponiamo di avere la trasformazione  $g$  definita in (3.18) (per le trasformazioni di tipo  $h$  valgono ragionamenti analoghi). Consideriamo la forma lineare  $L = z' - \alpha$  e poniamo  $z' = g(z)$ :

$$z' - \alpha = \frac{1}{cz + d} \left( (az + b) - \alpha(cz + d) \right), \quad (3.19)$$

che si annulla solo in

$$z = \frac{\alpha d - b}{a - \alpha c} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \det A_g \cdot A_g^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se  $\alpha \in \mathbb{R}$ , allora  $\frac{\alpha d - b}{a - \alpha c} \in \mathbb{R}$ . Dunque tali azioni mantengono il numero di radici reali di un polinomio dato, e particolarmente manda polinomi con sole radici reali in funzioni razionali con la stessa proprietà. Se la sestica  $F$  si decompone nella somma di estremali come in

$$F = F_1^2 + \dots + F_t^2$$

dove  $F_t$  sono cubiche con sole radici reali, applicando una opportuna trasformazione  $g \in G$  otterremo l'identità

$$\frac{1}{(cx + dy)^6} \cdot \tilde{F} = \frac{1}{(cx + dy)^6} \left( \tilde{F}_1^2 + \dots + \tilde{F}_t^2 \right)$$

dove  $\tilde{F}$  ha due coppie di radici immaginarie  $\pm i, \pm \omega i$  ed ogni  $\tilde{F}_i$  ha ancora solo radici reali. L'invertibilità dell'operazione appena effettuata ci garantisce quanto detto precedentemente riguardo il mantenimento dell'altezza di  $F$ .

Modulo tale azione possiamo dunque supporre che la sestica abbia due coppie di radici immaginarie pure  $\{\pm i, \pm \omega i\}$  con l'ipotesi  $\omega \geq 1$ , e una complessa generica  $\gamma$  insieme alla

coniugata. Supponiamo dunque che l'insieme delle radici di  $F$  sia  $\{\pm i, \pm \omega i, \gamma_1 \pm i\gamma_2\}$ . Le condizioni, in tal caso, si riducono ai seguenti quattro sistemi di disequazioni:

Partizione con  $\alpha = i, \beta = \omega i, \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ :

$$\begin{cases} (1 + \omega)^2 \gamma_1^2 + 4\omega\gamma_2(1 + \omega + \gamma_2) \geq 0 \\ \omega^2 \gamma_1^2 - \frac{1}{27} \gamma_1^2 (\omega + \gamma_2 + \omega\gamma_2)^2 - \frac{2}{3} \omega \gamma_1^2 (\omega + \gamma_2 + \omega\gamma_2) - \\ - \frac{4}{27} \omega \gamma_1^4 - \frac{4}{27} (\omega + \gamma_2 + \omega\gamma_2)^3 \leq 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Partizione con  $\alpha = i, \beta = -\omega i, \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ :

$$\begin{cases} (1 - \omega)^2 \gamma_1^2 - 4\omega\gamma_2(1 - \omega + \gamma_2) \geq 0 \\ \omega^2 \gamma_1^2 - \frac{1}{27} \gamma_1^2 (\omega - \gamma_2 + \omega\gamma_2)^2 - \frac{2}{3} \omega \gamma_1^2 (\omega - \gamma_2 + \omega\gamma_2) + \\ + \frac{4}{27} \omega \gamma_1^4 + \frac{4}{27} (\omega - \gamma_2 + \omega\gamma_2)^3 \leq 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Partizione con  $\alpha = -i, \beta = \omega i, \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ :

$$\begin{cases} (1 - \omega)^2 \gamma_1^2 - 4\omega\gamma_2(-1 + \omega + \gamma_2) \geq 0 \\ \omega^2 \gamma_1^2 - \frac{1}{27} \gamma_1^2 (\omega + \gamma_2 - \omega\gamma_2)^2 - \frac{2}{3} \omega \gamma_1^2 (\omega + \gamma_2 - \omega\gamma_2) + \\ + \frac{4}{27} \omega \gamma_1^4 + \frac{4}{27} (\omega + \gamma_2 - \omega\gamma_2)^3 \leq 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Partizione con  $\alpha = -i, \beta = -\omega i, \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ :

$$\begin{cases} (1 + \omega)^2 \gamma_1^2 + 4\omega\gamma_2(-1 - \omega + \gamma_2) \geq 0 \\ \omega^2 \gamma_1^2 - \frac{1}{27} \gamma_1^2 (\omega - \gamma_2 - \omega\gamma_2)^2 - \frac{2}{3} \omega \gamma_1^2 (\omega - \gamma_2 - \omega\gamma_2) - \\ - \frac{4}{27} \omega \gamma_1^4 - \frac{4}{27} (\omega - \gamma_2 - \omega\gamma_2)^3 \leq 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Dimostriamo il seguente fatto:

**Teorema 3.2.4.** *Se  $\gamma_2 \geq 0$ , è verificato il primo sistema per ogni  $\omega \geq 0$  e per ogni  $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ . Se invece  $\gamma_2 \leq 0$  allora è verificato il quarto sistema per ogni  $\omega \geq 0$  e per ogni  $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Studiamo per primo il discriminante

$$\Delta = (1 + \omega)^2 \gamma_1^2 + 4\omega\gamma_2(1 + \omega + \gamma_2).$$

Il suo luogo di zeri è la conica piana di matrice

$$M_\omega = \begin{pmatrix} (1 + \omega)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4\omega & 2\omega(1 + \omega) \\ 0 & 2\omega(1 + \omega) & 0 \end{pmatrix}$$

per la quale vale che  $\det(M_\omega) = -4\omega^2(1 + \omega)^4 \leq 0$ . Dunque la conica è non degenera e precisamente un'ellisse con centro di simmetria nel punto  $C_\omega = (0, -8\omega^2(1 + \omega))$  ed assi di simmetria ortogonali agli assi  $\gamma_1 = 0$  e  $\gamma_2 = 0$  (infatti la parte quadratica è già diagonale). Poiché la curva contiene l'origine per ogni scelta di  $\omega$ , allora si conclude

che i vertici dell'ellisse appartengono entrambi all'asse  $\gamma_1 = 0$  e poiché  $C_\omega$  ha ordinata negativa, tutta la curva si trova nel semipiano negativo  $\gamma_2 \leq 0$ . Sostituendo, ad esempio, il punto  $(0, 1)$  alla curva, si ottiene il valore  $4\omega(2 + \omega) \geq 0$ , per cui si conclude che la porzione di piano  $\Delta \geq 0$  è quella esterna all'ellisse  $\Delta = 0$ , e tale regione del piano contiene strettamente, per ogni  $\omega \geq 0$ , il semipiano superiore. In figura 3.6 si riporta graficamente la conica  $\Delta = 0$  per alcuni valori del parametro  $\omega$ .

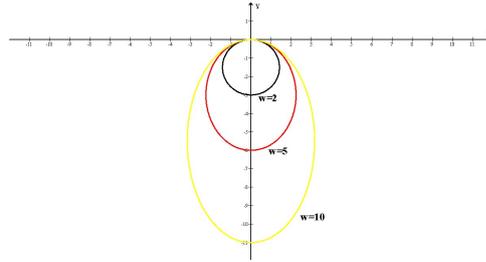


Figura 3.6:  $\Delta = 0$ , primo sistema, per  $\omega = 2, 5, 10$ .

Passiamo poi alla quartica  $S_\omega(\gamma_1, \gamma_2)$  di equazione

$$\omega^2 \gamma_1^2 - \frac{1}{27} \gamma_1^2 (\omega + \gamma_2 + \omega \gamma_2)^2 - \frac{2}{3} \omega \gamma_1^2 (\omega + \gamma_2 + \omega \gamma_2) - \frac{4}{27} \omega \gamma_1^4 - \frac{4}{27} (\omega + \gamma_2 + \omega \gamma_2)^3 = 0.$$

Notiamo, intanto, che l'intersezione con l'asse  $\gamma_1 = 0$  consta di un solo punto, ovvero il punto  $P_\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\omega}{1+\omega} \end{pmatrix}$ , la cui ordinata varia nell'intervallo  $(-1, 0)$ . Notiamo, inoltre, che il grafico è simmetrico rispetto all'asse  $\gamma_1 = 0$ , perché  $\gamma_1$  compare solo con potenze pari, e che per  $\gamma_2 = 0$  l'equazione diventa una biquadratica in  $\gamma_1$  con discriminante nullo, e dunque  $S_\omega(\gamma_1, \gamma_2)$  incontra l'asse nei due punti doppi  $C_\omega^1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\omega} \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $C_\omega^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

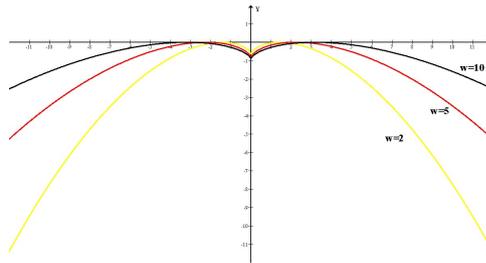


Figura 3.7:  $S_\omega(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ , primo sistema, per  $\omega = 2, 5, 10$ .

Si può vedere, però, facilmente che la porzione di piano corrispondente alle soluzioni di  $S_\omega(\gamma_1, \gamma_2) \leq 0$  contiene il semipiano  $\gamma_2 \geq 0$ . Infatti

$$\begin{aligned} 27 \cdot S_\omega(\gamma_1, \gamma_2) &= -4\omega \gamma_1^4 - 4\omega^3 + 8\omega^2 \gamma_1^2 - D(\omega, \gamma_1, \gamma_2) = \\ &= -4\omega \cdot (\gamma_1^4 + \omega^2 - 2\omega \gamma_1^2) - D(\omega, \gamma_1, \gamma_2) = \\ &= -4\omega \cdot (\gamma_1^2 - \omega)^2 - D(\omega, \gamma_1, \gamma_2) \leq 0, \end{aligned}$$

per  $\gamma_2 \geq 0$ , per ogni  $\gamma_1 \in \mathbb{R}$  (infatti  $\omega \geq 1$ ), perché  $D$  è semidefinito positivo in quanto è somma di termini non negativi (sotto le ipotesi fatte) moltiplicati per potenze pari di  $\gamma_1$ . Dunque si è mostrata la proposizione per il primo sistema, perché anche l'insieme di soluzioni di  $S_\omega(\gamma_1, \gamma_2) \leq 0$  contiene il semipiano superiore. In figura 3.7 si riporta graficamente la curva  $S_\omega(\gamma_1, \gamma_2) = 0$  per alcuni valori del parametro  $\omega$ .

Osserviamo infine che il quarto sistema si ottiene dal primo cambiando segno a  $\gamma_2$ : per questo motivo vale lo stesso risultato con la condizione  $\gamma_2 \leq 0$ .  $\square$

**Esempio 3.2.3.** Sia

$$F = x^6 - 6x^5y + 16x^4y^2 - 24x^3y^3 + 25x^2y^4 - 18xy^5 + 10y^6$$

la sestica di radici  $\{\pm i, 1 \pm i, 2 \pm i\}$ . Scegliamo la partizione con

$$A = (x^2 + y^2)(x - (1 + i)y)(x - (1 - i)y)(x - (2 + i)y)(x - (2 - i)y);$$

dunque si ha che

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(A) = x^3 - 3x^2y - xy^2 + 3y^3 = (x^2 - y^2)(x + 3y) \\ \operatorname{Im}(A) = -3x^2y + 6xy^2 - y^3 = -y\left(x - \frac{3-\sqrt{6}}{3}y\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{6}}{3}y\right). \end{cases}$$

Si ottiene quindi la seguente decomposizione:

$$F = \left(x^3 - 3x^2y - xy^2 + 3y^3\right)^2 + \left(-3x^2y + 6xy^2 - y^3\right)^2.$$

Dunque anche le sestiche binarie non negative hanno altezza 1 o 2, e quindi possiamo concludere quanto segue:

**Teorema 3.2.5.** *Il numero di Carathéodory per  $\mathbf{P}_{2,6}$  è  $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,6}) = 2$ .*

In analogia a 3.2.2 riportiamo infine la seguente

**Osservazione 3.2.5.** Riprendendo l'Osservazione 3.2.1, notiamo che il cono  $\mathbf{P}_{2,6}$  ha dimensione 7, in quanto  $\dim(\mathbf{F}_{2,6}) = \binom{2+6-1}{6} = 7$ , ma proiettivamente possiamo considerare  $\mathbf{P}_{2,6} \subset \mathbb{P}^6$ , quindi di dimensione 6. L'insieme degli estremali ha la stessa dimensione di  $\mathbf{F}_{2,3}$ , ovvero  $\binom{2+3-1}{3} = 4$  cioè proiettivamente 3. Quindi abbiamo decomposto ogni elemento di un cono di dimensione 6 in somma di elementi che appartengono ad un insieme di dimensione 3.

### 3.2.3 Risultati di induzione

Riportiamo in questa sezione alcuni risultati generali sul numero di Carathéodory del cono  $\mathbf{P}_{2,m}$  con  $m$  pari, sfruttando ragionamenti induttivi.

Osserviamo per prima cosa che l'idea di (3.11) può essere estesa al seguente

**Teorema 3.2.6.** *Sia  $m \geq 4$  pari. Se  $F \in \partial\mathbf{P}_{2,m}$  e  $F = (ax - by)^{2t} \cdot G$ , dove  $2t \geq 2$  è la molteplicità di  $ax - by$  nella fattorizzazione di  $F$ , allora*

$$h(F) \leq \mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,m-2t}).$$

*Dimostrazione.* Sia  $F$  come in ipotesi. Allora  $\deg G = m - 2t$  e necessariamente  $G \in \mathbf{P}_{2,m-2t}$ . Quindi  $h(G) \leq l = \mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,m-2t})$  ed in particolare  $G$  ha una espressione come somma di  $l$  quadrati di polinomi con sole radici reali. Quindi

$$F = (ax - by)^{2t} \cdot (G_1^2 + \dots + G_l^2) = \sum_{j=1}^l \left( (ax - by)^t G_j \right)^2, \quad (3.24)$$

da cui la tesi perché  $(ax - by)^t G_j$  ha solo radici reali, per ogni  $j$ .  $\square$

Consegue da ciò il seguente

**Corollario 3.2.1.** *Sia  $m \geq 4$  pari,  $F \in \partial\mathbf{P}_{2,m}$ . Se gli zeri reali di  $F$  formano la varietà  $V(F) = L_1^{2t_1} \cup \dots \cup L_k^{2t_k}$  con  $m = \sum 2t_i + R$ , allora  $h(F) \leq \mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,R})$ .*

Terminiamo con una riflessione su di una limitazione ulteriore che può essere data al numero di Carathéodory nel caso generale di grado  $m$ , che risulta però utile solo in grado basso.

Sia  $F \in \mathbf{P}_{2,m}$ . Poiché  $m$  è pari, allora  $m \equiv 0$ ,  $m \equiv 2$  o  $m \equiv 4 \pmod{6}$ .

- Se  $m \equiv 0 \pmod{6}$ , sia  $m = 6k$ . Allora il polinomio  $F$  si può spezzare nel prodotto di  $k$  sestiche binarie, che per quanto mostrato hanno altezza al più due:

$$F = \prod_{i=1}^k S_i = \prod_{i=1}^k (S_{i,1}^2 + S_{i,2}^2) = \sum_{j=1}^{2^k} R_j^2$$

dove  $R_j$  ha solo radici reali per ogni  $j$ , per cui  $h(F) \leq 2^k = 2^{\frac{m}{6}}$ . Ricordiamo che il Teorema di Carathéodory applicato alle forme binarie fornisce il limite  $\mathfrak{C}(P_{2,m}) \leq m + 1$ , per cui il limite trovato è interessante quando  $2^{\frac{m}{6}} \leq m + 1$  ovvero nei casi  $m = 12, 18, 24$ .

- Se  $m \equiv 2 \pmod{6}$ , sia  $m = 6k + 2$ . Analogamente,  $F$  si spezza nel prodotto di  $k$  sestiche binarie e di una forma quadratica  $H$ , tutte non negative:

$$F = \prod_{i=1}^k S_i \cdot H = \prod_{i=1}^k (S_{i,1}^2 + S_{i,2}^2) \cdot (H_1^2 + H_2^2) = \sum_{j=1}^{2^{k+1}} R_j^2$$

dove  $R_j$  ha solo radici reali per ogni  $j$ , per cui  $h(F) \leq 2^{k+1} = 2^{\frac{m+4}{6}}$ . Come prima il limite si considera quando  $2^{\frac{m+4}{6}} \leq m + 1$ , ovvero nei casi  $m = 8, 14, 20$ .

- Se  $m \equiv 4 \pmod{6}$ , sia  $m = 6k + 4$ . Dunque  $F$  si spezza nel prodotto di  $k$  sestiche per una quartica semidefinite positive. In questo caso il limite  $\mathfrak{C}(P_{2,m}) \leq 2^{\frac{m+2}{6}}$  è utile per  $m = 10, 16, 22$ .

In Tabella 3.4 si riportano i risultati e le nuove limitazioni trovate per il numero di Carathéodory di  $\mathbf{P}_{2,m}$ .

$m$	$\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,m})$
4, 6	$\mathfrak{C} = 2$
8, 10, 12	$\mathfrak{C} \leq 4$
14, 16, 18	$\mathfrak{C} \leq 8$
20, 22, 24	$\mathfrak{C} \leq 16$

Tabella 3.4: Bound per  $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,m})$

### 3.3 Sulle quartiche piane: $\mathbf{P}_{3,4}$

Una quartica piana  $F \in \mathbf{F}_{3,4}$ , come visto nei capitoli precedenti, ha la forma

$$F(x, y, z) = \sum_{i+j+k=4} A_{ijk} x^i y^j z^k. \tag{3.25}$$

Per il teorema di Hilbert, se  $F$  è non negativa su  $\mathbb{R}^3$  allora è somma di quadrati di polinomi omogenei di grado due in  $x, y, z$ . Possiamo assumere anche in questo caso (infatti questo vale in generale nei casi di Hilbert) che è condizione necessaria per l'estremalità dentro  $\mathbf{P}_{3,4} = \Sigma_{3,4}$  quella di essere un quadrato perfetto.

Prendiamo dunque  $F = G^2 \in \mathbf{P}_{3,4}$ . Il polinomio  $G$  sarà una conica di  $\mathbb{RP}^2$  della forma

$$G(x, y, z) = p_{00}x^2 + 2p_{01}xy + 2p_{02}xz + p_{11}y^2 + 2p_{12}yz + p_{22}z^2,$$

di matrice

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{01} & p_{11} & p_{12} \\ p_{02} & p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Il rango di  $P$  è un invariante proiettivo della conica di equazione  $G = 0$ . Ricordando la classificazione delle coniche piane, si ha che la conica ha una forma equivalente ad una delle forme canoniche elencate in Tabella 3.5.

Conica	Rango	Punti
$x^2 + y^2 - z^2$	3	Reali
$x^2 + y^2 + z^2$	3	Complessi
$x^2 - y^2$	2	Reali
$x^2 + y^2$	2	Complessi
$x^2$	1	Reali

Tabella 3.5: Forme canoniche delle coniche piane

dove una conica è a punti reali se e solo se ha solo zeri reali (ad esempio,  $x^2 + y^2$  ha per

zero reale il punto  $[0 : 0 : 1]$ , ma anche zeri complessi).

Vale dunque la seguente caratterizzazione dei punti estremali di  $\mathbf{P}_{3,4}$ :

**Proposizione 3.3.1.**  $F = G^2$  è estrema per il cono  $\mathbf{P}_{3,4}$  se e solo se  $G$  è una conica a punti reali.

*Dimostrazione.* A meno di equivalenza proiettiva, possiamo considerare che  $G$  sia una delle classi di coniche elencate in Tabella 3.5.  $(x^2 + y^2 + z^2)^2$  è una somma di quadrati di coniche a punti reali, mentre  $V(x^2 + y^2 + z^2) = \emptyset$ : non può essere, dunque, estrema. Analogamente per  $(x^2 + y^2)^2$ . Viceversa, sia  $\mathcal{C} = V(G)$  una delle tre coniche a punti reali, dove  $G \in \{x^2 + y^2 - z^2, x^2 - y^2, x^2\}$ . Supponiamo  $G^2 = G_1 + G_2$ , con  $G_i \in \mathbf{P}_{3,4}$ . Allora  $\mathcal{C} \subseteq V(G_i)$  per  $i = 1, 2$ , e dunque anche i  $G_i$  appartengono al bordo di  $\mathbf{P}_{3,4}$  (infatti  $\mathbf{P}_{3,4}$  è convesso, e dunque un elemento del bordo può essere generato solo come somma di altri elementi del bordo). In più, per la semidefinita positività dei  $G_i$ ,  $\mathcal{C}$  è un luogo di punti singolari per  $V(G_i)$ , e dunque  $G^2$  divide ancora ogni  $G_i$ . Allora, poiché  $\deg G^2 = \deg G_i$ , si ha che i  $G_i$  sono multipli di  $G^2$ , ovvero  $F$  è un punto estrema.  $\square$

### 3.3.1 Esempi di decomposizioni estremali

In questa sezione riportiamo alcuni esempi di altezze di quartiche piane.

**Esempio 3.3.1.** Si consideri

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2). \quad (3.27)$$

In un risultato esposto da Reznick in [Re1] (Teorema 9.13), si ha che  $F \in \mathbf{Q}_{3,4}$  e che si verifica la rappresentazione

$$F(x, y, z) = \sum_{k=1}^6 (a_k x + b_k y + c_k z)^4$$

se e soltanto se  $\{\pm(a_k, b_k, c_k)\}$  è l'insieme dei vertici di un icosaedro regolare iscritto in una sfera di  $\mathbb{R}^3$  centrata in zero e di raggio  $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$ .

Poiché una somma di quarte potenze di forme lineari è anche una decomposizione estrema per  $F$ , in quanto il quadrato di una forma lineare è una conica a punti reali, si ha che  $h(F) \leq 6$ . Un'altra decomposizione estrema per  $F$  è la stessa (3.27). Ma si può migliorare la stima notando che

$$F(x, y, 0) = (x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$$

ha altezza due, in quanto, in particolare, elemento di  $\mathbf{P}_{2,4}$ , e scrivendo:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (x^2 + y^2 + z^2)^2 = F(x, y, 0) + z^4 + 2(x^2 + y^2)z^2 = \\ &= (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 + z^4 + (\sqrt{2}xz)^2 + (\sqrt{2}yz)^2. \end{aligned}$$

Questa è una decomposizione come somma di 5 estremali, dunque  $h(F) \leq 5$ .

**Esempio 3.3.2.** Lo stesso ragionamento vale per il fascio a due parametri  $\lambda, \mu \geq 0$

$$\begin{aligned} F_{\lambda, \mu} &= \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^2 + \mu \cdot (x^2 + y^2)^2 = (\lambda + \mu)(x^2 + y^2)^2 + \lambda z^4 + \\ &+ 2\lambda z^2(x^2 + y^2) = (\lambda + \mu)[(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2] + \lambda z^4 + 2\lambda z^2(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

cioè  $h(F_{\lambda, \mu}) \leq 5$  per ogni  $\lambda, \mu$ .

## Capitolo 4

# Prove numeriche

Riportiamo in questo ultimo capitolo alcuni riferimenti a prove numeriche effettuate per studiare i quattro sistemi di disequaglianze 3.20, 3.21, 3.22 e 3.23 che generano le uniche decomposizioni di una data sestica binaria come somma di due quadrati. Con la funzione MATLAB `sest` elencata qui sotto si sono studiate tali rappresentazioni per le regioni del semispazio  $\{\omega, \gamma_1, \gamma_2 \mid \omega \geq 0\}$ :

```
function sest(n,w,x1,x2,y1,y2)
e=0;
f=0;
g=0;
h=0;
for i=1:n
    a=x1+(x2-x1)*rand(1,1);
    b=y1+(y2-y1)*rand(1,1);
    F1=((1+w)^2)*a^2+4*w*b*(1+w+b);
    F2=(w^2)*a^2-(1/27)*a^2*(w+b+w*b)^2-(2/3)*w*(w+b+w*b)*a^2-
        -(4/27)*w*a^4-(4/27)*(w+b+w*b)^3;
    F3=((1-w)^2)*a^2-4*w*b*(1-w+b);
    F4=(w^2)*a^2-(1/27)*a^2*(w-b+w*b)^2-(2/3)*w*(w-b+w*b)*a^2+
        +(4/27)*w*a^4+(4/27)*(w-b+w*b)^3;
    F5=((1-w)^2)*a^2-4*w*b*(-1+w+b);
    F6=(w^2)*a^2-(1/27)*a^2*(w+b-w*b)^2-(2/3)*w*(w+b-w*b)*a^2+
        +(4/27)*w*a^4+(4/27)*(w+b-w*b)^3;
    F7=((1+w)^2)*a^2+4*w*b*(-1-w+b);
    F8=(w^2)*a^2-(1/27)*a^2*(w-b-w*b)^2-(2/3)*w*(w-b-w*b)*a^2-
        -(4/27)*w*a^4-(4/27)*(w-b-w*b)^3;
    s1=sign(F1);
    s2=sign(F2);
    s3=sign(F3);
    s4=sign(F4);
    s5=sign(F5);
    s6=sign(F6);
    s7=sign(F7);
    s8=sign(F8);
    if ((s1 == 1) && (s2 == -1))
        e=e+1;
    end
    if ((s3 == 1) && (s4 == -1))
        f=f+1;
    end
end
```

```

end
if ((s5 == 1) && (s6 == -1))
    g=g+1;
end
if ((s7 == 1) && (s8 == -1))
    h=h+1;
end
end
end
disp([w,x1,x2,y1,y2,e,f,g,h])

```

La funzione ha in ingresso il numero  $n$  di iterazioni del ciclo `for` con il quale si calcolano i quattro sistemi di disequaglianze per  $n$  sestiche che si generano facendo variare *random* le componenti reale e immaginaria  $\gamma_1, \gamma_2$  della radice complessa  $\gamma$ ; si ha in ingresso anche il parametro  $w$  che ha il ruolo di  $\omega$  e gli intervalli  $[x1, x2]$  e  $[y1, y2]$  dove far variare i  $\gamma_i$ . La funzione conta quanti e quali dei quattro sistemi vengono verificati su tutti gli  $n$  tentativi fatti.

Osserviamo che, una volta dimostrato che ogni sestica di  $\mathbf{P}_{2,6}$  ha una decomposizione estemale di altezza due, potrebbe essere in futuro interessante dividere il semispazio  $\{\omega, \gamma_1, \gamma_2 \mid \omega \geq 0\}$  in regioni, all'interno di ognuna delle quali ogni sestica ha lo stesso numero di possibili rappresentazioni di questo tipo.

Si ricorda, infatti, che, come osservato nel Teorema 3.2.1, la scrittura di una generica forma binaria  $F$  come  $F = G^2 + H^2$  è possibile se e solo se  $G$  ed  $H$  sono parte reale e parte immaginaria di una cubica ottenuta da una opportuna partizione delle radici di  $F$ . Per le sestiche generiche abbiamo visto che tali possibili partizioni sono quattro, e dunque si potranno avere fino a quattro possibili rappresentazioni in certe regioni. Ovviamente, per quanto detto, il numero di tali regioni è limitato superiormente dal numero di partizioni delle radici.

Si elenca, infine, nelle tabelle delle pagine seguenti (da Tabella 4.1 a Tabella 4.6) alcuni risultati ottenuti su  $n = 10000$  tentativi con  $w = 3, 30, 3000$  rispettivamente,  $[x1, x2] = [-10^3, 10^3]$  e al variare del segno di  $\gamma_2$ .

y1	y2	sist.1	sist.2	sist.3	sist.4
0	30	10000	0	0	9844
30	60	10000	0	0	9751
60	90	10000	0	0	9649
90	120	10000	0	0	9643
120	150	10000	0	0	9542
150	180	10000	0	0	9502
180	210	10000	0	0	9453
210	240	10000	0	0	9415
240	270	10000	0	0	9381
270	300	10000	0	0	9302

Tabella 4.1:  $\gamma_2 \geq 0$ ,  $\omega = 3$ .

y1	y2	sist.1	sist.2	sist.3	sist.4
0	30	10000	97	243	9593
30	60	10000	522	852	9248
60	90	10000	1113	1602	9013
90	120	10000	1731	2287	8835
120	150	10000	2352	2938	8621
150	180	10000	3025	3611	8597
180	210	10000	3795	4372	8505
210	240	10000	4455	4978	8387
240	270	10000	4961	5550	8199
270	300	10000	5742	6336	8048

Tabella 4.2:  $\gamma_2 \geq 0$ ,  $\omega = 30$ .

y1	y2	sist.1	sist.2	sist.3	sist.4
0	30	10000	906	3512	5855
30	60	10000	2722	9568	2624
60	90	10000	624	9833	524
90	120	10000	0	9791	0
120	150	10000	0	9737	0
150	180	10000	0	9757	0
180	210	10000	0	9726	0
210	240	10000	0	9654	0
240	270	10000	0	9650	0
270	300	10000	0	9644	0

Tabella 4.3:  $\gamma_2 \geq 0$ ,  $\omega = 3000$ .

y1	y2	sist.1	sist.2	sist.3	sist.4
-30	0	9854	0	0	10000
-60	-30	9708	0	0	10000
-90	-60	9628	0	0	10000
-120	-90	9615	0	0	10000
-150	-120	9532	0	0	10000
-180	-150	9472	0	0	10000
-210	-180	9490	0	0	10000
-240	-210	9402	0	0	10000
-270	-240	9391	0	0	10000
-300	-270	9307	0	0	10000

Tabella 4.4:  $\gamma_2 \leq 0$ ,  $\omega = 3$

y1	y2	sist.1	sist.2	sist.3	sist.4
-30	0	9569	265	86	10000
-60	-30	9265	887	519	10000
-90	-60	8994	1624	1115	10000
-120	-90	8864	2278	1736	10000
-150	-120	8691	2922	2326	10000
-180	-150	8580	3735	3170	10000
-210	-180	8436	4233	3612	10000
-240	-210	8309	4978	4360	10000
-270	-240	8192	5692	5092	10000
-300	-270	8086	6285	5695	10000

Tabella 4.5:  $\gamma_2 \leq 0$ ,  $\omega = 30$

y1	y2	sist.1	sist.2	sist.3	sist.4
-30	0	5833	3519	943	10000
-60	-30	2594	9555	2687	10000
-90	-60	511	9835	605	10000
-120	-90	0	9808	0	10000
-150	-120	0	9766	0	10000
-180	-150	0	9743	0	10000
-210	-180	0	9728	0	10000
-240	-210	0	9674	0	10000
-270	-240	0	9646	0	10000
-300	-270	0	9658	0	10000

Tabella 4.6:  $\gamma_2 \leq 0$ ,  $\omega = 3000$

# Elenco delle figure

2.1	Robinson $R(x, y, 1)$ . . . . .	25
2.2	$F(x, y) = (x^2 - y^2)^2$ . . . . .	26
2.3	Motzkin $M_3(x, y, 1)$ . . . . .	27
2.4	Choi-Lam $S(x, y, 1)$ . . . . .	27
3.1	$Q_1 = x^4$ . . . . .	43
3.2	$Q_2 = x^2 y^2$ . . . . .	43
3.3	$Q_3 = x^2(x^2 + y^2)$ . . . . .	43
3.4	$Q_4 = (x^2 + y^2)(x^2 + 4y^2)$ . . . . .	43
3.5	Radici della sestica in $\text{Int}(\mathbf{P}_{2,6})$ . . . . .	52
3.6	$\Delta = 0$ , primo sistema, per $\omega = 2, 5, 10$ . . . . .	55
3.7	$S_\omega(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ , primo sistema, per $\omega = 2, 5, 10$ . . . . .	55

# Elenco delle tabelle

3.1	Limitazione per $\mathfrak{C}$ nei primi casi di Hilbert . . . . .	37
3.2	Varietà degli zeri reali per forme binarie di grado basso . . . . .	40
3.3	Somma di elementi di $\mathbf{P}_{2,4}$ . . . . .	44
3.4	Bound per $\mathfrak{C}(\mathbf{P}_{2,m})$ . . . . .	58
3.5	Forme canoniche delle coniche piane . . . . .	58
4.1	$\gamma_2 \geq 0, \omega = 3$ . . . . .	62
4.2	$\gamma_2 \geq 0, \omega = 30$ . . . . .	63
4.3	$\gamma_2 \geq 0, \omega = 3000$ . . . . .	63
4.4	$\gamma_2 \leq 0, \omega = 3$ . . . . .	63
4.5	$\gamma_2 \leq 0, \omega = 30$ . . . . .	64
4.6	$\gamma_2 \leq 0, \omega = 3000$ . . . . .	64

# Bibliografia

- [B] G. Blekherman. *Nonnegative polynomials and sums of squares* (2010), [arXiv:1010.3465](#).
- [BH] G. Blekherman, J. Hauenstein, J. C. Ottem, K. Ranestad e B. Sturmfels. *Algebraic boundaries of Hilbert's SOS cones* (2011), [arXiv:1107.1846](#).
- [CL] M-D. Choi, T-Y. Lam. *Extremal positive semidefinite forms* (1977), *Mathematische Annalen* vol. 231, n.1, pp. 1-18.
- [CT] J-L. Colliot-Thélène. *The Noether-Lefschetz theorem and sums of 4 squares in the rational function field  $\mathbb{R}(x, y)$*  (1993), *Compositio Mathematica* n. 86, pp. 235-243.
- [F] W. Fenchel. *Convex cones, sets and functions*, (1953), Princeton University, Department of Mathematics.
- [GLS] R. J. Gardner, M. Longinetti e L. Sgheri. *Reconstruction of orientations of a moving protein domain from paramagnetic data* (2005), *Institute of Physics Publishing, Inverse Problems* vol. 21, pp. 879-898.
- [GKZ] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov e A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants* (1994), *Mathematics: Theory & Applications*, Birkhauser.
- [Harr] J. Harris. *Algebraic geometry. A first course* (1992), *Graduate Texts in Mathematics* n. 133, ed. Springer-Verlag.
- [Hart] R. Hartshorne. *Algebraic geometry* (1977), *Graduate Texts in Mathematics* n. 52, ed. Springer-Verlag.
- [N] J. Nie. *Discriminants and nonnegative polynomials* (2010), [arXiv:1002.2230](#).
- [P] C. Pucci. *Dispense del corso di Istituzioni di Analisi Superiore*, Università degli Studi di Firenze.
- [Ra] A. R. Rajwade. *Squares* (1993), *London Mathematical Society Lecture Notes Series* 171, Cambridge University Press.
- [Re1] B. Reznick. *Sums of even powers of real linear forms* (1992), *Memoirs of the American Mathematical Society* vol. 96, n. 463.

- [Re2] B. Reznick. *Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem* (**2000**), Contemporary Mathematics n. 253, American Mathematical Society.
- [ReP] B. Reznick - V. Powers. *Notes towards a constructive proof of Hilbert's theorem on ternary quartics* (**2000**), Contemporary Mathematics n. 272, American Mathematical Society.
- [SSS] R. Sanyal, F. Sottile e B. Sturmfels. *Orbitopes* (**2010**), University College of London, Mathematika n. 57, 2011, pp. 275-314.
- [Sw] R. G. Swan. *Hilbert's theorem on positive ternary quartics*, Quadratic Forms and their Applications, American Mathematical Society, vol. 272 (**2000**).