

Dalla prospettiva piana alla geometria proiettiva:
Sperimentazione didattica e approfondimenti

Nadia Ricchetti

Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani
22 aprile 2010

Prospettiva piana e geometria proiettiva. Perché?

- ▶ Fascino del legame tra *matematica e realtà*;
- ▶ preferenza per *matematica e storia dell'arte*;
- ▶ circostanze storiche personali.

Intuizioni per il progetto

- ▶ La matematica è uno dei metodi di conoscenza con cui si possono conoscere *certi* aspetti del reale;
- ▶ la matematica è una vera e propria impresa umana;
- ▶ i simboli matematici hanno pertanto un valore anche storico e culturale.

Lezioni

La sperimentazione si è attuata presso la classe IV H del Liceo scientifico Leonardo da Vinci, sotto la supervisione della Prof. Roberta Rigato e del Prof. Cesare Pedolicchio.

Sono stati svolti:

- ▶ test di ingresso;
- ▶ quattro lezioni di due ore;
- ▶ test finale.

Supporto alla didattica

- ▶ Presentazioni power point e animazioni dal CD di *Le geometrie della visione*, di L. Catastini e F. Ghione;
- ▶ dispense fornite ad ogni lezione con esercizi e approfondimenti;
- ▶ riproduzioni di dipinti tardo-medievali e rinascimentali;
- ▶ lavori di gruppo per risolvere esercizi;
- ▶ cubi e immagini stampate per piccoli esperimenti sulla visione;
- ▶ fogli da disegno e squadre per provare i metodi prospettici spiegati.

Obiettivi generali



- ▶ Suscitare nei ragazzi l'interesse per la matematica, materia spesso trascurata perché ritenuta troppo astratta o troppo difficile.
- ▶ Puntare ad un collegamento tra matematica e realtà, attraverso un problema noto storicamente, cioè la prospettiva.
- ▶ Permettere così ai ragazzi di cominciare a vedere la matematica come uno dei metodi di conoscenza del reale.

Obiettivi generali



- ▶ Suscitare nei ragazzi l'interesse per la matematica, materia spesso trascurata perché ritenuta troppo astratta o troppo difficile.
- ▶ Puntare ad un collegamento tra matematica e realtà, attraverso un problema noto storicamente, cioè la prospettiva.
- ▶ Permettere così ai ragazzi di cominciare a vedere la matematica come uno dei metodi di conoscenza del reale.

Obiettivi generali



- ▶ Suscitare nei ragazzi l'interesse per la matematica, materia spesso trascurata perché ritenuta troppo astratta o troppo difficile.
- ▶ Puntare ad un collegamento tra matematica e realtà, attraverso un problema noto storicamente, cioè la prospettiva.
- ▶ Permettere così ai ragazzi di cominciare a vedere la matematica come uno dei metodi di conoscenza del reale.

Obiettivi generali



- ▶ Suscitare nei ragazzi l'interesse per la matematica, materia spesso trascurata perché ritenuta troppo astratta o troppo difficile.
- ▶ Puntare ad un collegamento tra matematica e realtà, attraverso un problema noto storicamente, cioè la prospettiva.
- ▶ Permettere così ai ragazzi di cominciare a vedere la matematica come uno dei metodi di conoscenza del reale.

Prima lezione: geometria della visione



- ▶ Visione degli oggetti attraverso esperimenti a gruppi e osservazioni di immagini: cambiando punto di vista allineamenti e intersezioni si conservano.
- ▶ Introduzione delle nozioni di punto di vista, apparente allineamento, cono visivo.
- ▶ Verifica della corrispondenza tra il modello e le osservazioni intuitive iniziali, tramite alcuni principali risultati dell'Ottica di Euclide.

Prima lezione: geometria della visione



- ▶ Visione degli oggetti attraverso esperimenti a gruppi e osservazioni di immagini: cambiando punto di vista allineamenti e intersezioni si conservano.
- ▶ Introduzione delle nozioni di punto di vista, apparente allineamento, cono visivo.
- ▶ Verifica della corrispondenza tra il modello e le osservazioni intuitive iniziali, tramite alcuni principali risultati dell'Ottica di Euclide.

Prima lezione: geometria della visione



- ▶ Visione degli oggetti attraverso esperimenti a gruppi e osservazioni di immagini: cambiando punto di vista allineamenti e intersezioni si conservano.
- ▶ Introduzione delle nozioni di punto di vista, apparente allineamento, cono visivo.
- ▶ Verifica della corrispondenza tra il modello e le osservazioni intuitive iniziali, tramite alcuni principali risultati dell'Ottica di Euclide.

Prima lezione: geometria della visione



- ▶ Visione degli oggetti attraverso esperimenti a gruppi e osservazioni di immagini: cambiando punto di vista allineamenti e intersezioni si conservano.
- ▶ Introduzione delle nozioni di punto di vista, apparente allineamento, cono visivo.
- ▶ Verifica della corrispondenza tra il modello e le osservazioni intuitive iniziali, tramite alcuni principali risultati dell'Ottica di Euclide.

Seconda lezione: verso la prospettiva



- ▶ Cos'è la prospettiva, a cosa serve, note storiche e proiezione di alcuni dipinti.
- ▶ Introduzione dei termini matematici nella prospettiva piana, fra cui punto di fuga e linea di orizzonte.
- ▶ Il problema di realizzare una pavimentazione in prospettiva. Metodi inesatti.
- ▶ Il modo ottimo di Alberti: provarne la costruzione e capirne il funzionamento.

Seconda lezione: verso la prospettiva



- ▶ Cos'è la prospettiva, a cosa serve, note storiche e proiezione di alcuni dipinti.
- ▶ Introduzione dei termini matematici nella prospettiva piana, fra cui punto di fuga e linea di orizzonte.
- ▶ Il problema di realizzare una pavimentazione in prospettiva. Metodi inesatti.
- ▶ Il modo ottimo di Alberti: provarne la costruzione e capirne il funzionamento.

Seconda lezione: verso la prospettiva



- ▶ Cos'è la prospettiva, a cosa serve, note storiche e proiezione di alcuni dipinti.
- ▶ Introduzione dei termini matematici nella prospettiva piana, fra cui punto di fuga e linea di orizzonte.
- ▶ Il problema di realizzare una pavimentazione in prospettiva. Metodi inesatti.
- ▶ Il modo ottimo di Alberti: provarne la costruzione e capirne il funzionamento.

Seconda lezione: verso la prospettiva



- ▶ Cos'è la prospettiva, a cosa serve, note storiche e proiezione di alcuni dipinti.
- ▶ Introduzione dei termini matematici nella prospettiva piana, fra cui punto di fuga e linea di orizzonte.
- ▶ Il problema di realizzare una pavimentazione in prospettiva. Metodi inesatti.
- ▶ Il modo ottimo di Alberti: provarne la costruzione e capirne il funzionamento.

Seconda lezione: verso la prospettiva



- ▶ Cos'è la prospettiva, a cosa serve, note storiche e proiezione di alcuni dipinti.
- ▶ Introduzione dei termini matematici nella prospettiva piana, fra cui punto di fuga e linea di orizzonte.
- ▶ Il problema di realizzare una pavimentazione in prospettiva. Metodi inesatti.
- ▶ Il modo ottimo di Alberti: provarne la costruzione e capirne il funzionamento.

Terza lezione: Piero della Francesca e il *De prospectiva pingendi*



- ▶ Il metodo di Piero della Francesca. Descrizione. Rappresentare una pavimentazione con esso.
- ▶ Perché funziona il metodo di Piero della Francesca?
- ▶ Prendere spunto dal metodo di Piero della Francesca per un cenno alle proiettività.

Terza lezione: Piero della Francesca e il *De prospectiva pingendi*



- ▶ Il metodo di Piero della Francesca. Descrizione. Rappresentare una pavimentazione con esso.
- ▶ Perché funziona il metodo di Piero della Francesca?
- ▶ Prendere spunto dal metodo di Piero della Francesca per un cenno alle proiettività.

Terza lezione: Piero della Francesca e il *De prospectiva pingendi*



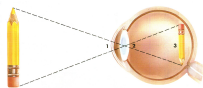
- ▶ Il metodo di Piero della Francesca. Descrizione. Rappresentare una pavimentazione con esso.
- ▶ Perché funziona il metodo di Piero della Francesca?
- ▶ Prendere spunto dal metodo di Piero della Francesca per un cenno alle proiettività.

Terza lezione: Piero della Francesca e il *De prospectiva pingendi*



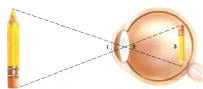
- ▶ Il metodo di Piero della Francesca. Descrizione. Rappresentare una pavimentazione con esso.
- ▶ Perché funziona il metodo di Piero della Francesca?
- ▶ Prendere spunto dal metodo di Piero della Francesca per un cenno alle proiettività.

Quarta lezione: geometria proiettiva



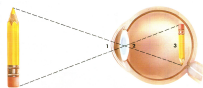
- ▶ presentazione della geometria proiettiva, con esempi di proiezioni (ombre cinesi e principio del foro stenopeico).
- ▶ nozioni di punti all'infinito e piano, retta, segmento, triangolo proiettivi.
- ▶ generalizzazione allo spazio proiettivo. Nozione di triangoli omologhi, teorema di Desargues e suo inverso.
- ▶ Cenni alle proiettività. Da esse si può ottenere una "prospettiva moderna" con la quale, dato un qualsiasi quadrangolo "come prima mattonella", si può costruire correttamente una pavimentazione.

Quarta lezione: geometria proiettiva



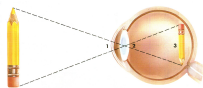
- ▶ presentazione della geometria proiettiva, con esempi di proiezioni (ombre cinesi e principio del foro stenopeico).
- ▶ nozioni di punti all'infinito e piano, retta, segmento, triangolo proiettivi.
- ▶ generalizzazione allo spazio proiettivo. Nozione di triangoli omologhi, teorema di Desargues e suo inverso.
- ▶ Cenni alle proiettività. Da esse si può ottenere una "prospettiva moderna" con la quale, dato un qualsiasi quadrangolo "come prima mattonella", si può costruire correttamente una pavimentazione.

Quarta lezione: geometria proiettiva



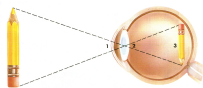
- ▶ presentazione della geometria proiettiva, con esempi di proiezioni (ombre cinesi e principio del foro stenopeico).
- ▶ nozioni di punti all'infinito e piano, retta, segmento, triangolo proiettivi.
- ▶ generalizzazione allo spazio proiettivo. Nozione di triangoli omologhi, teorema di Desargues e suo inverso.
- ▶ Cenni alle proiettività. Da esse si può ottenere una "prospettiva moderna" con la quale, dato un qualsiasi quadrangolo "come prima mattonella", si può costruire correttamente una pavimentazione.

Quarta lezione: geometria proiettiva



- ▶ presentazione della geometria proiettiva, con esempi di proiezioni (ombre cinesi e principio del foro stenopeico).
- ▶ nozioni di punti all'infinito e piano, retta, segmento, triangolo proiettivi.
- ▶ generalizzazione allo spazio proiettivo. Nozione di triangoli omologhi, teorema di Desargues e suo inverso.
- ▶ Cenni alle proiettività. Da esse si può ottenere una "prospettiva moderna" con la quale, dato un qualsiasi quadrangolo "come prima mattonella", si può costruire correttamente una pavimentazione.

Quarta lezione: geometria proiettiva



- ▶ presentazione della geometria proiettiva, con esempi di proiezioni (ombre cinesi e principio del foro stenopeico).
- ▶ nozioni di punti all'infinito e piano, retta, segmento, triangolo proiettivi.
- ▶ generalizzazione allo spazio proiettivo. Nozione di triangoli omologhi, teorema di Desargues e suo inverso.
- ▶ Cenni alle proiettività. Da esse si può ottenere una "prospettiva moderna" con la quale, dato un qualsiasi quadrangolo "come prima mattonella", si può costruire correttamente una pavimentazione.

Commenti finali:

- ▶ Tutti i ragazzi, sotto invito della professoressa, hanno preso appunti durante la lezione, hanno partecipato attivamente per quasi tutto il tempo.
- ▶ I ragazzi seguivano molto bene le lezioni. Nel complesso erano molto preparati e motivati allo studio della matematica: questo ha indubbiamente favorito la riuscita della sperimentazione.
- ▶ I professori sono stati globalmente soddisfatti dell'esperienza.
- ▶ L'esperienza è stata buona anche per me sotto tutti i punti di vista: dopo l'iniziale timore, ho scoperto un gusto nel rapportarmi ai ragazzi ed è stata l'occasione per imparare da qualcuno che già insegna.

Commenti finali:

- ▶ Tutti i ragazzi, sotto invito della professoressa, hanno preso appunti durante la lezione, hanno partecipato attivamente per quasi tutto il tempo.
- ▶ I ragazzi seguivano molto bene le lezioni. Nel complesso erano molto preparati e motivati allo studio della matematica: questo ha indubbiamente favorito la riuscita della sperimentazione.
- ▶ I professori sono stati globalmente soddisfatti dell'esperienza.
- ▶ L'esperienza è stata buona anche per me sotto tutti i punti di vista: dopo l'iniziale timore, ho scoperto un gusto nel rapportarmi ai ragazzi ed è stata l'occasione per imparare da qualcuno che già insegna.

Commenti finali:

- ▶ Tutti i ragazzi, sotto invito della professoressa, hanno preso appunti durante la lezione, hanno partecipato attivamente per quasi tutto il tempo.
- ▶ I ragazzi seguivano molto bene le lezioni. Nel complesso erano molto preparati e motivati allo studio della matematica: questo ha indubbiamente favorito la riuscita della sperimentazione.
- ▶ I professori sono stati globalmente soddisfatti dell'esperienza.
- ▶ L'esperienza è stata buona anche per me sotto tutti i punti di vista: dopo l'iniziale timore, ho scoperto un gusto nel rapportarmi ai ragazzi ed è stata l'occasione per imparare da qualcuno che già insegna.

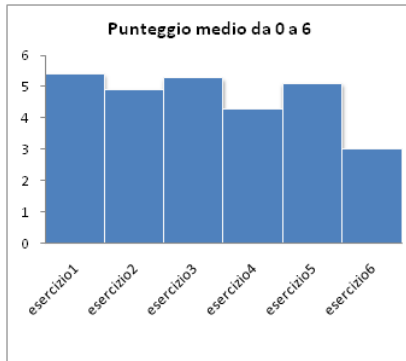
Commenti finali:

- ▶ Tutti i ragazzi, sotto invito della professoressa, hanno preso appunti durante la lezione, hanno partecipato attivamente per quasi tutto il tempo.
- ▶ I ragazzi seguivano molto bene le lezioni. Nel complesso erano molto preparati e motivati allo studio della matematica: questo ha indubbiamente favorito la riuscita della sperimentazione.
- ▶ I professori sono stati globalmente soddisfatti dell'esperienza.
- ▶ L'esperienza è stata buona anche per me sotto tutti i punti di vista: dopo l'iniziale timore, ho scoperto un gusto nel rapportarmi ai ragazzi ed è stata l'occasione per imparare da qualcuno che già insegna.

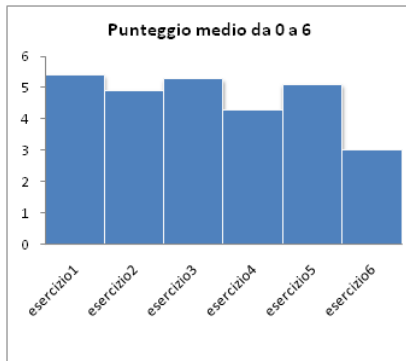
Commenti finali:

- ▶ Tutti i ragazzi, sotto invito della professoressa, hanno preso appunti durante la lezione, hanno partecipato attivamente per quasi tutto il tempo.
- ▶ I ragazzi seguivano molto bene le lezioni. Nel complesso erano molto preparati e motivati allo studio della matematica: questo ha indubbiamente favorito la riuscita della sperimentazione.
- ▶ I professori sono stati globalmente soddisfatti dell'esperienza.
- ▶ L'esperienza è stata buona anche per me sotto tutti i punti di vista: dopo l'iniziale timore, ho scoperto un gusto nel rapportarmi ai ragazzi ed è stata l'occasione per imparare da qualcuno che già insegna.

Esito test di verifica

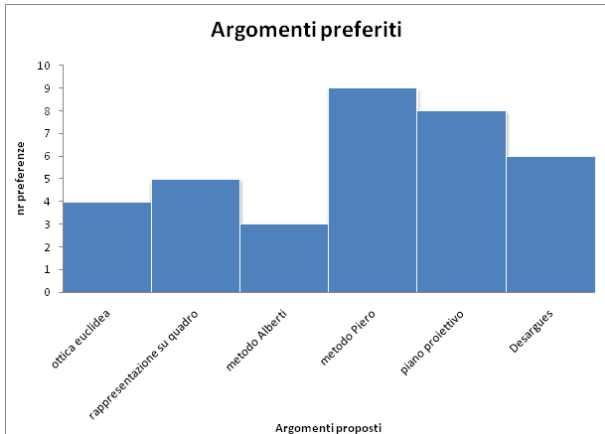


Esito test di verifica



Voto	21	22	23	24	25	26	27	28
Studenti/voto	1	3	5	3	1	2	1	2

Esito valutazione



Top three

► Il metodo di Piero della Francesca

«Perché ci ha fatto capire meglio come si può realizzare una pavimentazione con la prospettiva.»

► Il libro di De Saint-Amand

► Il metodo di Desargues e le sue applicazioni

«Sono sperando che qualcuno si sia interessato a questo libro»

«chi ha molto interessato il campo della geometria ed è stato grande il modo con cui questi argomenti sono stati coperti.»

Top three

- ▶ Il metodo di Piero della Francesca
«Perché ci ha fatto capire meglio come si può realizzare una pavimentazione con la prospettiva.»

Top three

- ▶ Il metodo di Piero della Francesca
«Perché ci ha fatto capire meglio come si può realizzare una pavimentazione con la prospettiva.»
- ▶ Il piano proiettivo
Il trattato di Desargues e le sue applicazioni
«Sono quelle che mi colpivano e mi hanno affascinato»
«Mi ha molto interessato il campo della geometria ed è stato un bel momento per questo argomento non altri copisti.»

Top three

- ▶ Il metodo di Piero della Francesca
«Perché ci ha fatto capire meglio come si può realizzare una pavimentazione con la prospettiva.»
- ▶ Il piano proiettivo
- ▶ Il teorema di Desargues e le sue implicazioni
«Erano cose che non conoscevo e mi hanno affascinato.»
«Mi ha molto interessato il campo della geometria, ed è stato buono il modo con cui questi argomenti sono stati esposti.»

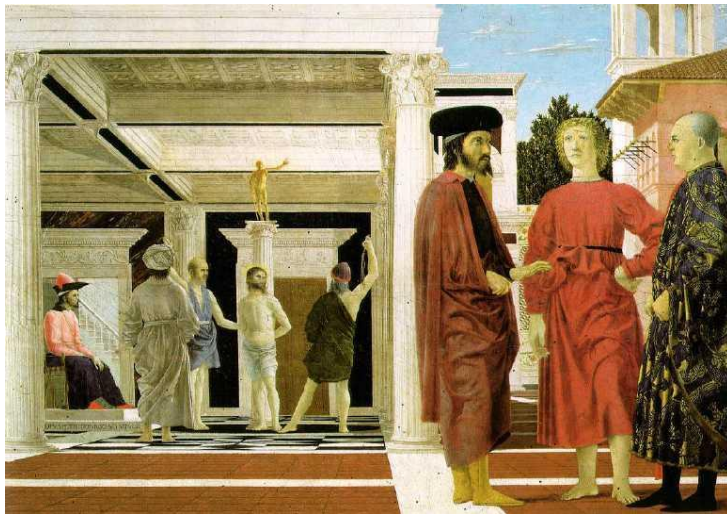
Top three

- ▶ Il metodo di Piero della Francesca
«Perché ci ha fatto capire meglio come si può realizzare una pavimentazione con la prospettiva.»
- ▶ Il piano proiettivo
- ▶ Il teorema di Desargues e le sue implicazioni
«Erano cose che non conoscevo e mi hanno affascinato.»
«Mi ha molto interessato il campo della geometria, ed è stato buono il modo con cui questi argomenti sono stati esposti.»

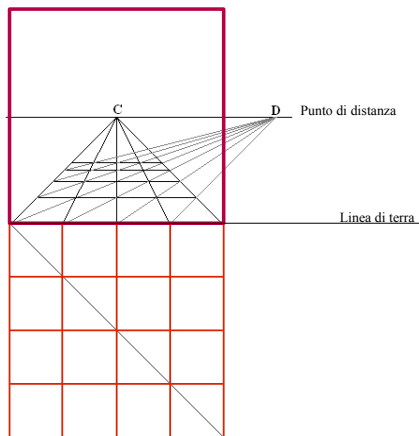
Top three

- ▶ Il metodo di Piero della Francesca
«Perché ci ha fatto capire meglio come si può realizzare una pavimentazione con la prospettiva.»
- ▶ Il piano proiettivo
- ▶ Il teorema di Desargues e le sue implicazioni
«Erano cose che non conoscevo e mi hanno affascinato.»
«Mi ha molto interessato il campo della geometria, ed è stato buono il modo con cui questi argomenti sono stati esposti.»

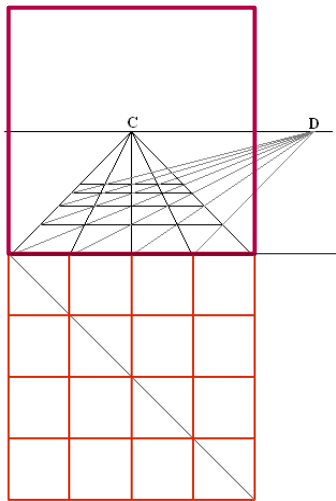
Piero della Francesca



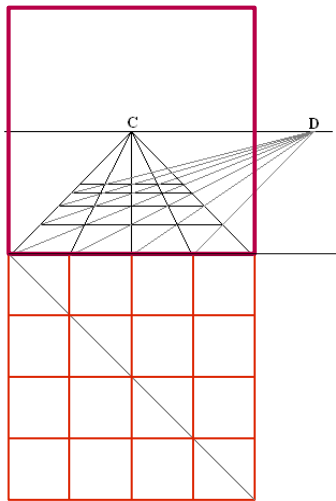
L'idea grafica di Piero è di disegnare le parti di spazio che si vuole rappresentare (quella sul piano reale e quella sul piano degradato) come due quadrati su uno stesso foglio, con un lato (la linea di terra) comune.



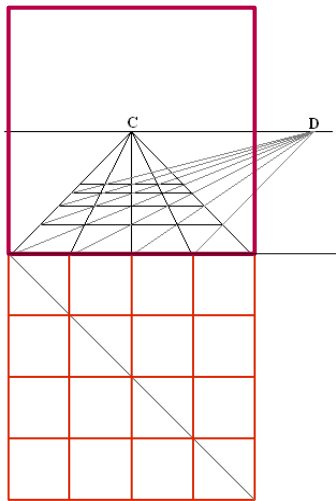
1. *La retta in cui si incontrano i due piani è fissa punto per punto.*
2. *Le rette del piano reale perpendicolari alla linea di terra si rappresentano con segmenti che concorrono in un punto.*
3. *Le linee del piano reale parallele alla linea di terra si rappresentano con linee parallele alla linea di terra.*
4. *Una data linea diagonale si rappresenta con una linea che incontra in D, il punto di distanza, l'orizzonte. La distanza CD (in scala) corrisponde alla distanza dell'occhio dal quadro.*



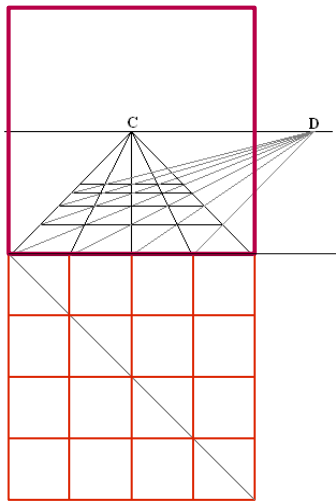
1. *La retta in cui si incontrano i due piani è fissa punto per punto.*
2. *Le rette del piano reale perpendicolari alla linea di terra si rappresentano con segmenti che concorrono in un punto.*
3. *Le linee del piano reale parallele alla linea di terra si rappresentano con linee parallele alla linea di terra.*
4. *Una data linea diagonale si rappresenta con una linea che incontra in D, il punto di distanza, l'orizzonte. La distanza CD (in scala) corrisponde alla distanza dell'occhio dal quadro.*



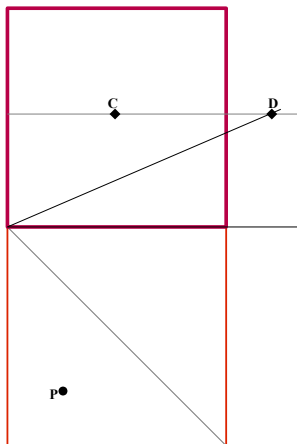
1. *La retta in cui si incontrano i due piani è fissa punto per punto.*
2. *Le rette del piano reale perpendicolari alla linea di terra si rappresentano con segmenti che concorrono in un punto.*
3. *Le linee del piano reale parallele alla linea di terra si rappresentano con linee parallele alla linea di terra.*
4. *Una data linea diagonale si rappresenta con una linea che incontra in D, il punto di distanza, l'orizzonte. La distanza CD (in scala) corrisponde alla distanza dell'occhio dal quadro.*



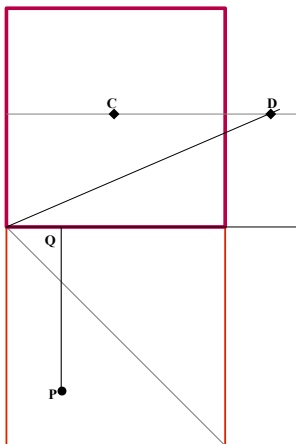
1. La retta in cui si incontrano i due piani è fissa punto per punto.
2. Le rette del piano reale perpendicolari alla linea di terra si rappresentano con segmenti che concorrono in un punto.
3. Le linee del piano reale parallele alla linea di terra si rappresentano con linee parallele alla linea di terra.
4. Una data linea diagonale si rappresenta con una linea che incontra in D , il punto di distanza, l'orizzonte. La distanza CD (in scala) corrisponde alla distanza dell'occhio dal quadro.



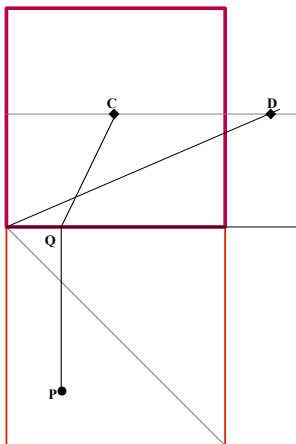
La trasformazione di Piero della Francesca è un'omologia.
Trasformiamo un qualunque punto P del piano reale nel corrispondente P' sul piano del quadro.



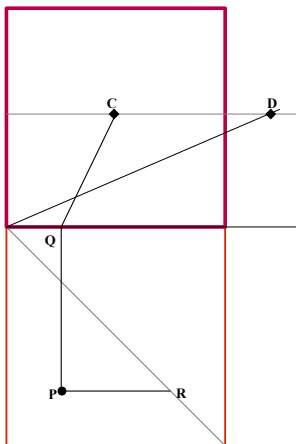
La trasformazione di Piero della Francesca è un'omologia.
Trasformiamo un qualunque punto P del piano reale nel corrispondente P' sul piano del quadro.



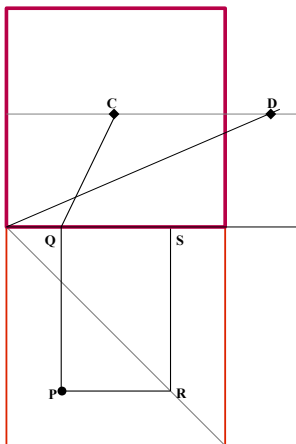
La trasformazione di Piero della Francesca è un'omologia.
Trasformiamo un qualunque punto P del piano reale nel corrispondente P' sul piano del quadro.



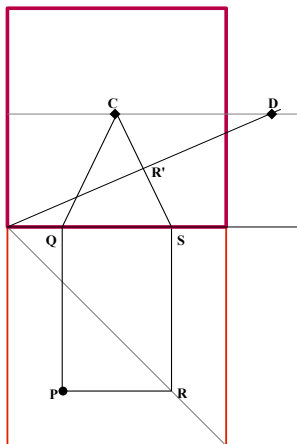
La trasformazione di Piero della Francesca è un'omologia.
Trasformiamo un qualunque punto P del piano reale nel corrispondente P' sul piano del quadro.



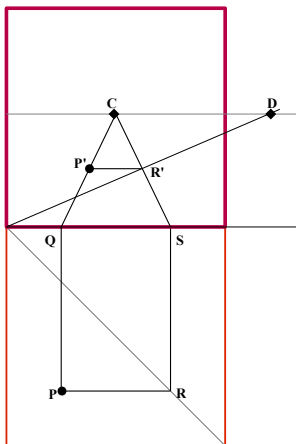
La trasformazione di Piero della Francesca è un'omologia.
Trasformiamo un qualunque punto P del piano reale nel corrispondente P' sul piano del quadro.



La trasformazione di Piero della Francesca è un'omologia.
Trasformiamo un qualunque punto P del piano reale nel corrispondente P' sul piano del quadro.



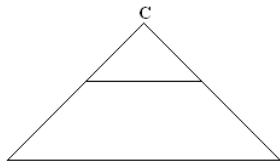
La trasformazione di Piero della Francesca è un'omologia.
Trasformiamo un qualunque punto P del piano reale nel corrispondente P' sul piano del quadro.



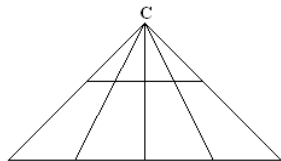
Questa costruzione è molto moderna e mette in relazione la forma del trapezio con la posizione dell'occhio: partendo dal trapezio l'intera proiezione, punto per punto, è determinata senza più ricorrere al centro di proiezione:



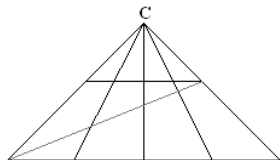
Questa costruzione è molto moderna e mette in relazione la forma del trapezio con la posizione dell'occhio: partendo dal trapezio l'intera proiezione, punto per punto, è determinata senza più ricorrere al centro di proiezione:



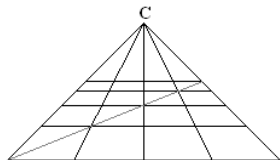
Questa costruzione è molto moderna e mette in relazione la forma del trapezio con la posizione dell'occhio: partendo dal trapezio l'intera proiezione, punto per punto, è determinata senza più ricorrere al centro di proiezione:



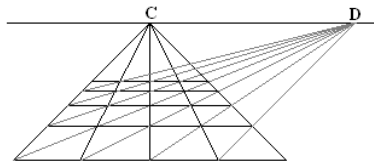
Questa costruzione è molto moderna e mette in relazione la forma del trapezio con la posizione dell'occhio: partendo dal trapezio l'intera proiezione, punto per punto, è determinata senza più ricorrere al centro di proiezione:



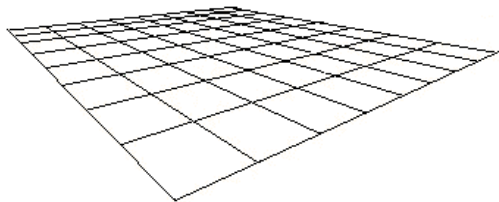
Questa costruzione è molto moderna e mette in relazione la forma del trapezio con la posizione dell'occhio: partendo dal trapezio l'intera proiezione, punto per punto, è determinata senza più ricorrere al centro di proiezione:



Questa costruzione è molto moderna e mette in relazione la forma del trapezio con la posizione dell'occhio: partendo dal trapezio l'intera proiezione, punto per punto, è determinata senza più ricorrere al centro di proiezione:

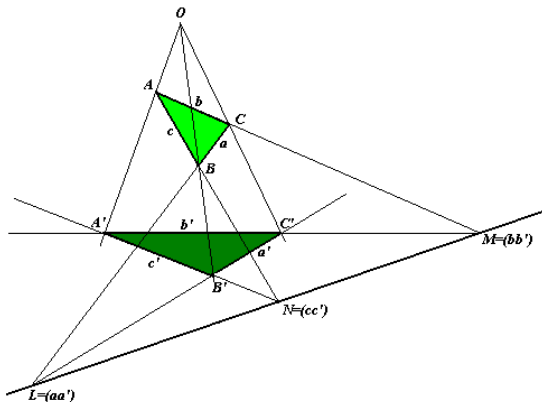


Pavimentazioni realizzate sotto altri punti di vista

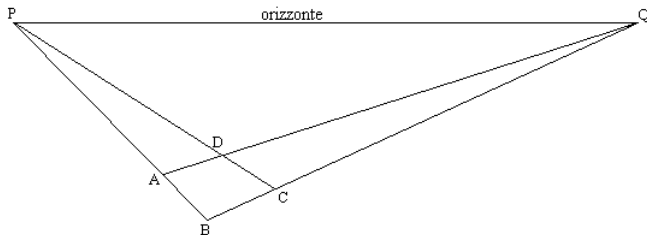


Teorema di Desargues

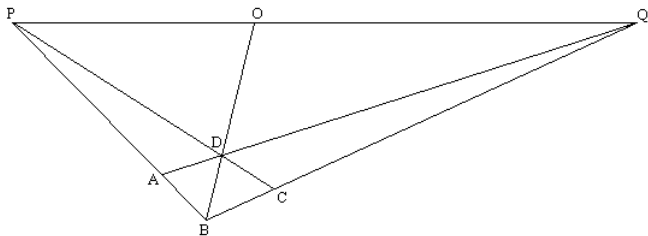
Se due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono omologhi (ossia tali che le rette AA' , BB' , CC' siano convergenti in un punto O) allora i loro lati corrispondenti, se prolungati, si incontrano in punti allineati.



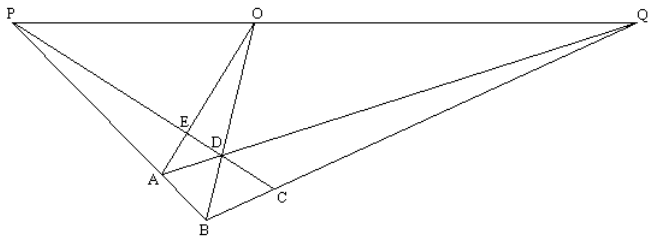
Primi passi per costruire una pavimentazione



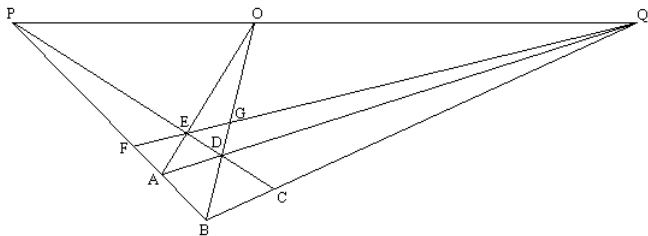
Primi passi per costruire una pavimentazione



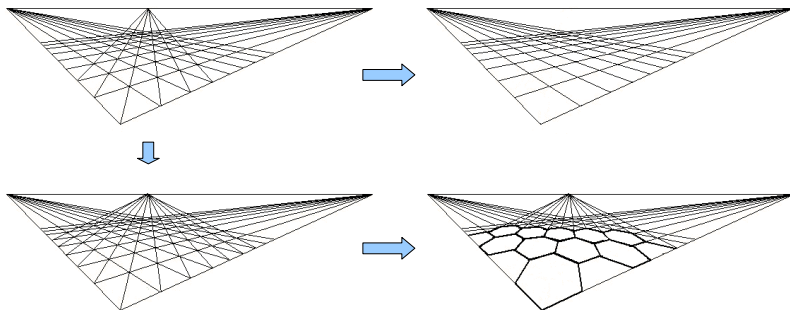
Primi passi per costruire una pavimentazione



Primi passi per costruire una pavimentazione



Non solo pavimentazioni con mattonelle quadrate...



Il metodo seguito per svolgere l'attività didattica soddisfa a molte delle indicazioni sollevate dalla C.I.I.M. per venire incontro alla crisi della matematica (e della geometria), in particolare:

- ▶ *Utilizzare le conoscenze di geometria piana e solida in semplici problemi nell'ambito di altri settori della conoscenza tra le abilità richieste per il secondo biennio della scuola secondaria;*
- ▶ *Un'attività di tipo laboratorio di matematica inteso come «un ambiente di insegnamento-apprendimento che, metaforicamente, può essere paragonato alla bottega rinascimentale, dove si apprendeva facendo e vedendo fare, comunicando con i compagni oltre che per imitazione dell'esperto».*

Il metodo seguito per svolgere l'attività didattica soddisfa a molte delle indicazioni sollevate dalla C.I.I.M. per venire incontro alla crisi della matematica (e della geometria), in particolare:

- ▶ *Utilizzare le conoscenze di geometria piana e solida in semplici problemi nell'ambito di altri settori della conoscenza* tra le abilità richieste per il secondo biennio della scuola secondaria;
- ▶ Un'attività di tipo *laboratorio di matematica* inteso come «un ambiente di insegnamento-apprendimento che, metaforicamente, può essere paragonato alla bottega rinascimentale, dove si apprendeva facendo e vedendo fare, comunicando con i compagni oltre che per imitazione dell'esperto».

Il metodo seguito per svolgere l'attività didattica soddisfa a molte delle indicazioni sollevate dalla C.I.I.M. per venire incontro alla crisi della matematica (e della geometria), in particolare:

- ▶ *Utilizzare le conoscenze di geometria piana e solida in semplici problemi nell'ambito di altri settori della conoscenza* tra le abilità richieste per il secondo biennio della scuola secondaria;
- ▶ Un'attività di tipo *laboratorio di matematica* inteso come «un ambiente di insegnamento-apprendimento che, metaforicamente, può essere paragonato alla bottega rinascimentale, dove si apprendeva facendo e vedendo fare, comunicando con i compagni oltre che per imitazione dell'esperto».

Gli approfondimenti sono stati essenziali per un **gusto maggiore** di tutta l'esperienza e mi hanno fatto capire di più il legame essenziale tra didattica e ricerca:

si può **insegnare** solo ciò che si è disposti ad **imparare** noi per primi, lasciandoci interrogare e portando in fondo il problema che ci troviamo di fronte.

Questo è fondamentale anche per insegnare ad insegnare.