

## Indice

<b>1</b>	<b>La Geometria sulla Sfera</b>	<b>2</b>
1.1	Alcuni risultati sui triangoli sferici . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Aspetti geometrici della Cartografia</b>	<b>4</b>
2.1	La proiezione stereografica . . . . .	5
2.2	La proiezione di Mercatore . . . . .	8
2.3	La proiezione di Lambert . . . . .	11
2.4	La proiezione di Gall-Peters . . . . .	13
2.5	La proiezione di Sanson-Flamsteed . . . . .	14
2.6	La proiezione centrale . . . . .	15

## Introduzione

*L'obiettivo di questo lavoro è evidenziare i concetti principali della Geometria Sferica, enunciandone proprietà e risultati fondamentali, per arrivare alla sua applicazione nella Cartografia.*

## 1 La Geometria sulla Sfera

La geometria sferica è quella che si realizza in un mondo a due dimensioni costituito dalla superficie  $\mathcal{S}$  di una sfera: i punti sono punti della superficie, le rette i cerchi massimi della sfera. In questo mondo, per due punti diametralmente opposti sulla superficie (es. i poli sulla Terra) passano infinite rette (es. i meridiani); due rette sono sempre incidenti; le rette sono curve limitate e chiuse. Gli archi di cerchi massimi conservano la proprietà, che è anche delle rette nel piano euclideo, ossia di essere le curve di minima lunghezza tra due punti (geodetiche). Possiamo quindi misurare l'angolo tra due cerchi massimi come l'angolo formato dalle tangenti ai due cerchi massimi nel punto di intersezione. Con questa definizione di angolo possiamo costruire triangoli sulla sfera la cui somma degli angoli interni è maggiore di  $\pi$ . Più precisamente ogni triangolo sferico (i cui lati sono archi di cerchio massimo e gli angoli sono quelli individuati dalle semirette tangenti ai lati) ha somma degli angoli interni maggiore di  $\pi$ . Questo si vede semplicemente con alcune considerazioni sull'area dei triangoli sferici.

**Definizione 1.1.** *Definiamo eccesso angolare di un triangolo sferico la quantità  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ , dove  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono gli angoli sferici.*

L'eccesso dunque è sempre positivo, tuttavia non ha lo stesso valore per tutti i triangoli. Come suggerisce la *Figura 1*, l'eccesso angolare di un triangolo

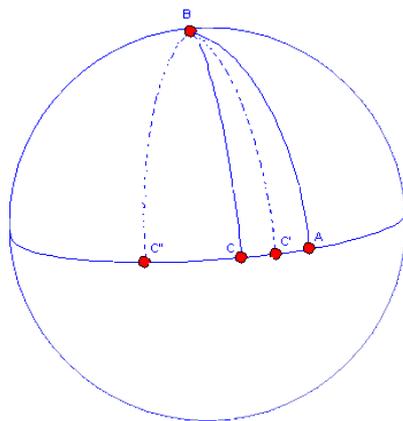


Figura 1: Variazione dell'area proporzionalmente all'eccesso angolare

è strettamente legato alla sua area, anzi, come si può dimostrare facilmente, vale la seguente proposizione:

**Proposizione 1.1.** *L'area di un triangolo sferico con angoli interni  $\alpha, \beta, \gamma$  è data dalla formula*

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

dove  $R$  è il raggio della sfera.

Poichè ogni triangolo sulla sfera ha area positiva, ogni triangolo sulla sfera ha somma degli angoli interni più grande di  $\pi$ . Ricordiamo che per un triangolo nel piano euclideo si ha  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

### 1.1 Alcuni risultati sui triangoli sferici

Consideriamo una sfera  $\mathcal{S}$  di raggio  $R$ . Siano  $A, B, C$  tre punti di  $\mathcal{S}$  che non stanno sullo stesso cerchio massimo. Supponiamo che tra  $A, B$  e  $C$  non ci siano punti antipodali e costruiamo il triangolo sferico di vertici  $A, B, C$ . Scegliendo l'origine delle coordinate nel centro  $O$  della sfera, i tre punti  $A, B, C$  si identificano con tre vettori applicati nell'origine, di lunghezza pari al raggio, che denoteremo ancora con  $A, B$  e  $C$ . Chiamando con  $a, b, c$  le misure dei tre lati opposti rispettivamente a  $A, B, C$ , seguono le formule

$$\cos\left(\frac{a}{R}\right) = \frac{B \cdot C}{R^2}$$

$$\cos\left(\frac{b}{R}\right) = \frac{A \cdot C}{R^2}$$

$$\cos\left(\frac{c}{R}\right) = \frac{A \cdot B}{R^2}$$

Chiamiamo con  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli del triangolo sferico. Consideriamo il vertice  $A$ ; i vettori tangenti ai lati in  $A$  si ottengono togliendo rispettivamente da  $B$  e  $C$  le loro proiezioni ortogonali su  $A$ , perchè il piano tangente alla sfera in ogni suo punto è perpendicolare al vettore che unisce il punto con il centro della sfera. Pertanto i vettori tangenti ai lati in  $A$  sono

$$B - \frac{(B \cdot A)A}{R^2}$$

$$C - \frac{(C \cdot A)A}{R^2}$$

e similmente per i vettori tangenti in  $B$  e  $C$ .

**Lemma 1.1.** *La lunghezza di  $B - \frac{(B \cdot A)A}{R^2}$  è  $R \sin\left(\frac{c}{R}\right)$ .*

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} R^2 \sin\left(\frac{c}{R}\right) \sin\left(\frac{b}{R}\right) \cos(\alpha) &= \left(B - \frac{(B \cdot A)A}{R^2}\right) \cdot \left(C - \frac{(C \cdot A)A}{R^2}\right) = \\ &= B \cdot C - \frac{(B \cdot A)(C \cdot A)}{R^2} = R^2 \left(\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{c}{R}\right) \cos\left(\frac{b}{R}\right)\right) \end{aligned}$$

e formule analoghe per gli altri angoli. Questa può essere pensata come l'analogia sferica della *formula di Carnot*, come si ottiene sviluppando i primi termini di

coseno e seno secondo la formula di Taylor. In particolare se  $\alpha$  è retto otteniamo proprio il *Teorema di Pitagora Sferico*:

$$\cos\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{c}{R}\right) \cos\left(\frac{b}{R}\right).$$

Vale inoltre un altro importante teorema

**Teorema 1.1. (*Teorema dei seni sferico*)**

$$\frac{\sin\left(\frac{a}{R}\right)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin\left(\frac{b}{R}\right)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin\left(\frac{c}{R}\right)}{\sin(\gamma)}$$

*Dimostrazione.* Possiamo supporre  $R=1$  (per similitudine) e che l'ordine dei vertici segua il verso antiorario rispetto al baricentro del triangolo. L'angolo tra  $C - (C \cdot A)A$  e  $A \wedge B$  (che sono entrambi vettori ortogonali a  $A$ , di lunghezza rispettivamente  $\sin(b)$  e  $\sin(c)$ ) è  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  (infatti  $A \wedge B$  è perpendicolare all'altro vettore tangente in  $A$ !). Pertanto il loro prodotto scalare è

$$(A \wedge B) \cdot (C - (C \cdot A)A) = \sin(c) \sin(b) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(c) \sin(b) \sin(\alpha)$$

Ma in questo caso il prodotto scalare è uguale al prodotto misto  $A \wedge B \cdot C$  che è simmetrico rispetto alla permutazione ciclica di  $A, B, C$ . Quindi abbiamo

$$A \wedge B \cdot C = \sin(c) \sin(b) \sin(\alpha)$$

e permutando si ottiene

$$\sin(c) \sin(b) \sin(\alpha) = \sin(c) \sin(a) \sin(\beta)$$

da cui

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)}.$$

Permutando ancora si ottiene l'ultima uguaglianza. □

## 2 Aspetti geometrici della Cartografia

Una carta geografica è una rappresentazione della superficie terrestre o di una sua porzione sopra un piano. Faremo astrazione dall'eccentricità della Terra, che sarà considerata una superficie sferica; si tratta di una posizione di comodo che rende più agevole la discussione, senza alterare le proprietà geometriche fondamentali delle proiezioni da esaminare. Si vuole, quindi, ricercare un'applicazione tra superficie sferica terrestre ed il piano che, per rappresentare *fedelmente* la realtà dovrebbe essere tale da conservare angoli e distanze. Questo però non è possibile, come si riconosce da un semplice esempio: se  $(\beta, \lambda)$  sono le coordinate geografiche di un punto sulla sfera ( $\beta$  latitudine,  $\lambda$  longitudine) e se ammettiamo che esista un'applicazione che conserva angoli e distanze, il triangolo sferico di vertici  $N$ =polo Nord,  $Q = (0, \pi/4)$  e  $R = (0, -\pi/4)$  deve trasformarsi sulla carta in un triangolo piano (a lati rettilinei) che abbia le stesse misure di lati e di angoli. Per quanto riguarda gli angoli questo non si verifica, perchè la somma

degli angoli interni del triangolo  $NQR$  sulla sfera è maggiore di  $\pi$ ; anche per le lunghezze si osserva che un triangolo piano  $N'Q'R'$  che abbia lati ordinatamente uguali a quelli del triangolo sferico  $NQR$  risulta equilatero; il rapporto tra la sua altezza  $N'T'$  e la lunghezza di uno dei suoi lati è pertanto  $\sqrt{3}/2$ , mentre nel triangolo sferico il corrispondente arco di cerchio massimo  $NT$  ha la medesima lunghezza dei lati.

**Osservazione 2.1.** *Quanto detto ora non esclude la possibilità di costruire rappresentazioni che conservano gli angoli (ma alterano le distanze); evidentemente in questo tipo di applicazioni (che si dicono conformi) l'immagine di un triangolo sferico sarà un triangolo piano a lati non rettilinei. Non possono esistere invece applicazioni di una porzione della superficie sferica su un piano che conservano le distanze. Infatti se esistesse un'applicazione isometrica di una porzione di superficie sferica su una porzione di piano, essa dovrebbe conservare, con altre invarianti, la curvatura di Gauss, ma questo è assurdo dal momento che la curvatura di Gauss del piano è 0, mentre quella della sfera vale  $\frac{1}{r^2}$ .*

## 2.1 La proiezione stereografica

La proiezione stereografica si ottiene proiettando i punti della sfera da un suo punto (ad esempio polo Nord) sul piano tangente a questa nel punto diametralmente opposto (il polo Sud); la proiezione trasforma quindi un punto  $P = (x, y, z)$  della sfera, dove

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \cos \lambda & -\pi \leq \lambda \leq \pi \\ y = r \cos \beta \sin \lambda & -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \\ z = r \sin \beta \end{cases} \quad (1)$$

in un punto  $P' = (x', y')$  del piano, dove

$$\begin{cases} x' = \rho \cos \varphi \\ y' = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (2)$$

Come si ricava dalla *Figura 2*, con semplici considerazioni di trigonometria, risulta:

$$\begin{cases} \varphi = \lambda \\ \rho = 2r \tan \alpha \quad \text{con } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

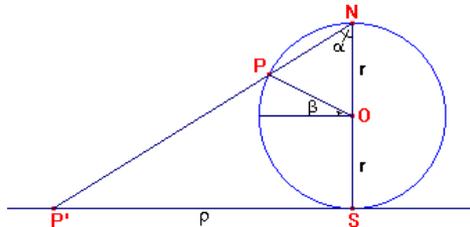


Figura 2: Proiezione Stereografica

Questa applicazione è CONFORME; per dimostrarlo facciamo uso della seguente

**Proprietà 2.1.** *Data una qualunque tangente  $t$  alla sfera in un suo punto  $P$  (diverso dal polo Nord) e indicato con  $PM$  il segmento che ha come estremi il punto  $P$  di tangenza ed il punto  $M$  di intersezione con il piano di proiezione  $\pi$ , la lunghezza di  $PM$  è uguale alla lunghezza del segmento proiettato  $P'M$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che la tangente per  $P$  alla sfera giaccia nel piano  $NSP$ ; in tal caso indichiamo con  $M_0$  il suo punto di intersezione con il piano  $\pi$  (vedi Figura 3).

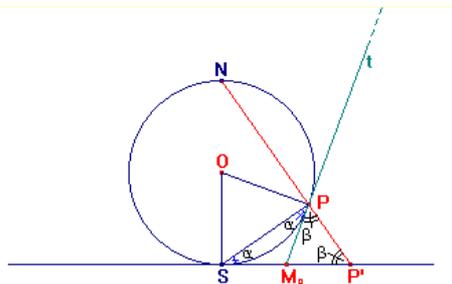


Figura 3: La tangente  $t$  appartiene al piano  $NSP$

Si riconosce che il triangolo  $M_0PP'$  è isoscele con base  $PP'$  e da ciò segue  $PM_0 = P'M_0$ . Vediamo il caso in cui la tangente  $t$  non giace nel piano  $NSP$  (vedi Figura 4).

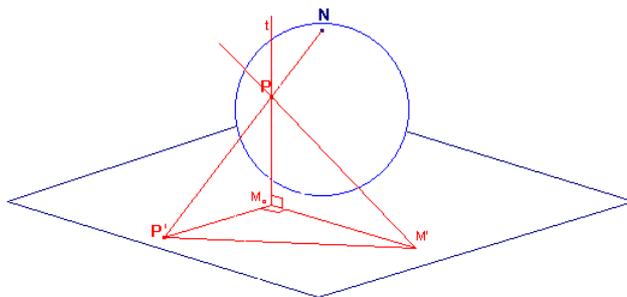


Figura 4: La tangente  $t$  non appartiene al piano  $NSP$

Osserviamo che il piano  $NSP$  è perpendicolare sia al piano di proiezione  $\pi$  che al piano tangente in  $P$  alla sfera, quindi l'intersezione di questi due piani, che è proprio la retta  $MM_0$ , è perpendicolare ad ogni retta di  $NSP$  e in particolare alle rette  $PM_0$  e  $P'M_0$ . I triangoli  $MM_0P$  e  $MM_0P'$  sono allora entrambi rettangoli in  $M_0$ , quindi uguali. Da ciò segue la tesi.  $\square$

Per provare che la proiezione stereografica è conforme, consideriamo un angolo qualsiasi sulla sfera, con vertice  $P$ . Poichè quest'angolo coincide proprio con l'angolo  $\omega$  delle tangenti alle curve che delimitano l'angolo sferico in  $P$ , siano

$X$  e  $Y$  i punti in cui tali tangenti intersecano il piano di proiezione (vedi *Figura 5*). L'immagine dell'angolo  $\omega$  è l'angolo  $\omega'$  e poichè  $PX = P'X$  e  $PY = P'Y$  per la *proprietà* precedente, i triangoli  $PXY$  e  $P'XY$  sono uguali e in particolare  $\omega = \omega'$ .

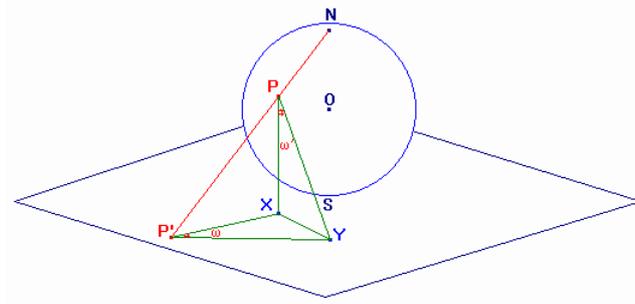


Figura 5: Conformità della proiezione stereografica

Allo stesso risultato si può pervenire anche con alcune considerazioni di geometria differenziale: basta dimostrare che la prima forma fondamentale della sfera e quella dell'immagine sul piano sono proporzionali. Sia  $ds$  l'elemento d'arco sulla sfera. Dalle equazioni (1) si ricava:

$$ds^2 = r^2 d\beta^2 + r^2 \cos^2 \beta d\lambda^2$$

Se  $ds_1$  è l'elemento d'arco corrispondente a  $ds$  sul piano, dalle equazioni (2), tenendo conto che  $\frac{\cos^2 \beta}{\cos^4 \alpha} = 4 \tan^2 \alpha$ , otteniamo:

$$ds_1^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = \frac{r^2}{\cos^4 \left( \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} (d\beta^2 + \cos^2 \beta d\lambda^2)$$

Quindi

$$ds_1^2 = \frac{ds^2}{\cos^4 \left( \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}$$

come asserito.

**Osservazione 2.2.** *I meridiani sono trasformati in rette per l'origine di equazioni  $\frac{y}{x} = \tan \lambda$ , i paralleli sono cerchi concentrici di equazioni  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , mentre il polo Sud è l'origine del sistema ed il polo Nord non ha immagine sul piano (si usa dire che corrisponde all'infinito). Si ricorre usualmente alla proiezione stereografica per le regioni artiche.*

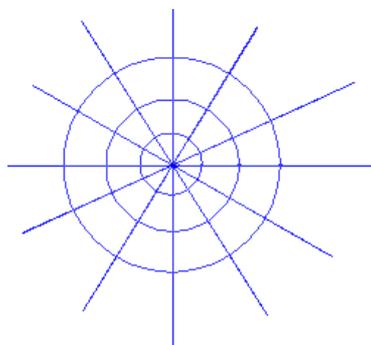


Figura 6: Meridiani e Paralleli ottenuti con la proiezione stereografica

## 2.2 La proiezione di Mercatore

La proiezione di Mercatore è una delle proiezioni che consentono di rappresentare i paralleli e i meridiani mediante un reticolato cartesiano di rette tra loro ortogonali. Fondamentalmente tutte le rappresentazioni di questo tipo si basano sull'osservazione che si può proiettare la superficie terrestre dal suo centro su un cilindro ad essa circoscritto, dopodiché basta tagliare il cilindro lungo una sua generatrice e considerarne lo sviluppo su di un piano. Le equazioni di tale proiezione sono

$$\text{Proiezione cilindrica} \quad \begin{cases} x' = r\lambda \\ y' = r \tan \beta \end{cases} \quad (3)$$

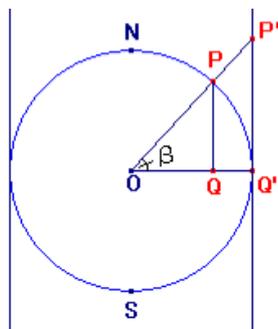


Figura 7: Proiezione di Mercatore

La proiezione così descritta non è però conforme: infatti mentre il parallelo di latitudine  $\beta$  subisce, ovviamente, un ingrandimento di fattore  $\frac{1}{\cos \beta}$ , i meridiani subiscono, alla medesima latitudine, un ingrandimento diverso e precisamente di fattore  $\frac{1}{\cos^2 \beta}$ , come si può facilmente calcolare differenziando la seconda delle (3). Per ottenere una proiezione conforme, *Mercatore* ha proposto una modifica nella scelta dell'ordinata, imponendo precisamente che ad ogni

latitudine  $\beta$  anche i meridiani subissero lo stesso ingrandimento dei paralleli, in modo cioè da soddisfare l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{d\beta} = \frac{r}{\cos \beta}$$

Integrando quest'ultima otteniamo

$$y' = r \int_0^\beta \frac{d\beta}{\cos \beta} = r \operatorname{lg} \left| \frac{1}{\cos \beta} + \tan \beta \right| = r \operatorname{lg} |\tan \alpha|$$

da cui le seguenti equazioni

$$\text{Proiezione di Mercatore} \quad \begin{cases} x' = r\lambda \\ y' = r \operatorname{lg} \left| \frac{1}{\cos \beta} + \tan \beta \right| \end{cases} \quad (4)$$

Possiamo quindi mettere a confronto, con l'aiuto di `Matlab`, la proiezione cilindrica standard con quella modificata da *Mercatore*, notando effettivamente come quest'ultima rappresenti con sufficiente *fedeltà*, e in modo migliore rispetto a quella standard, le zone terrestri fino a latitudini medie.

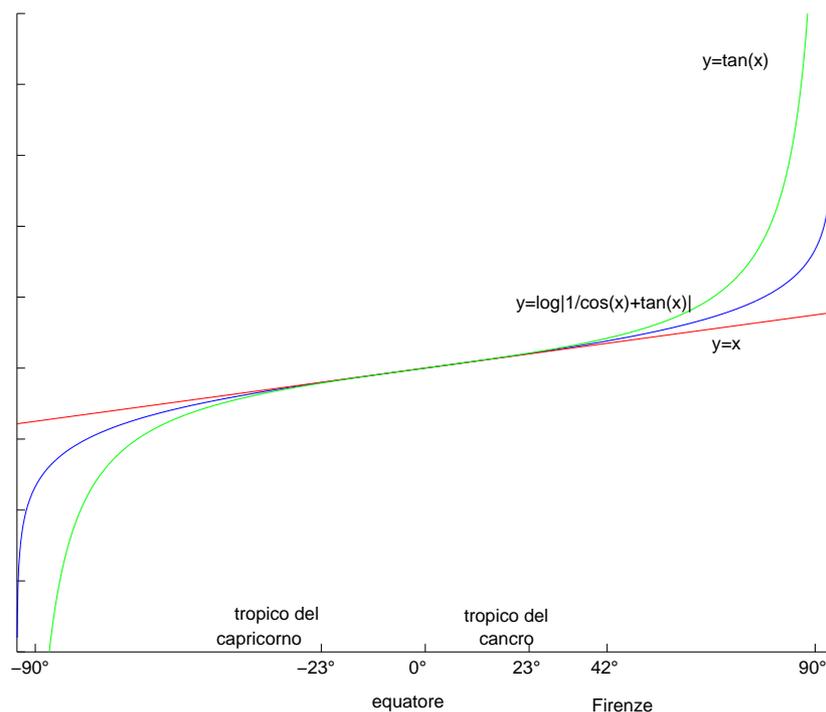


Figura 8: Grafico in `Matlab`

Dalla costruzione risulta direttamente che questa proiezione è **CONFORME**. Lo si può verificare anche con l'aiuto della geometria differenziale; infatti derivando le equazioni (4) otteniamo

$$ds_1^2 = r^2 d\lambda^2 + \frac{r^2 d\beta^2}{\cos^2 \beta}$$

e risulta che

$$ds_1^2 = \frac{ds^2}{\cos^2 \beta}$$

**Osservazione 2.3.** *L'equatore ( $\beta = 0$ ) diventa sulla carta l'asse delle  $x$ ; il meridiano fondamentale ( $\lambda = 0$ ) l'asse della  $y$ ; i meridiani sono rette parallele di equazione  $x = r\lambda$ , le cui distanze sono proporzionali alle differenze di longitudine; quindi a meridiani equidistanti sulla sfera corrispondono rette equidistanti sulla carta. Anche i paralleli sono rette parallele all'asse  $x$ , la cui distanza cresce al crescere di  $\beta$  dall'equatore al polo; il polo Nord ed il polo Sud non hanno immagine sul piano.*

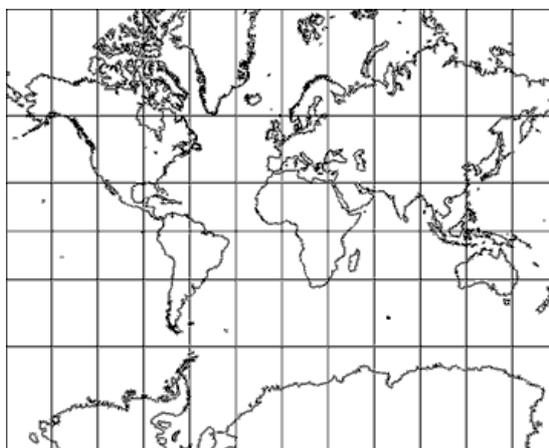


Figura 9: Carta geografica ottenuta con la proiezione di Mercatore

La proiezione di *Mercatore* è inoltre un'applicazione LOSSODROMICA, cioè ha la proprietà di trasformare le lossodromie in rette. Le lossodromie sono quelle curve che formano un angolo costante con i meridiani della sfera; a parte i casi banali, rappresentati dai paralleli e dai meridiani, esse si avvolgono come spirali attorno ai poli; geometricamente sono curve di lunghezza finita, ma illimitate come le spirali logaritmiche, e raggiungono i poli solo dopo un'infinità di giri. Per dimostrare che la proiezione di *Mercatore* trasforma le lossodromie in rette basta osservare che, poichè questa applicazione è conforme, la linea piana corrispondente alla lossodromia deve incontrare sotto angolo costante i meridiani della carta, ma questi sono rette tra loro parallele, e le curve che tagliano un fascio di rette parallele sotto angolo costante sono appunto le rette. In virtù di questa proprietà, la proiezione di *Mercatore* è particolarmente utile per la navigazione marittima: infatti, volendo dirigere la nave da un punto  $P$  ad un punto  $Q$ , basterà segnare sulla carta l'immagine della lossodromia, cioè tracciare la retta che unisce i trasformati dei punti  $P$  e  $Q$ , misurare l'angolo che essa forma con i meridiani (angolo di rotta) e dirigere la nave nella direzione  $PQ$ , mantenendo costantemente fisso l'angolo sulla bussola. Si osservi che però, in questo modo,

si utilizza non il cammino più corto ma quello di direzione costante. Infatti la proiezione di *Mercatore* non conserva le geodetiche: a questo proposito basta osservare che, dati due punti  $P$  e  $Q$  sulla sfera, non appartenenti all'equatore e tali che abbiano, per comodità, la stessa latitudine e longitudini che differiscano di  $180^\circ$ , la lossodromia per  $P$  e  $Q$  è l'arco di parallelo che li unisce, mentre la geodetica per  $P$  e  $Q$  è l'arco di cerchio massimo passante per il polo dell'emisfero a cui appartengono  $P$  e  $Q$ .

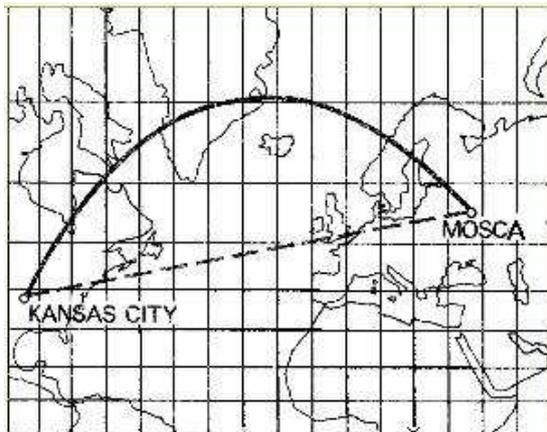


Figura 10: L'arco di cerchio massimo (linea continua) e la lossodromia (linea tratteggiata) tra Kansas City negli USA e Mosca come appaiono sulla proiezione di Mercatore

### 2.3 La proiezione di Lambert

Anche questa proiezione consente di rappresentare i paralleli e i meridiani mediante un reticolato cartesiano di rette tra loro ortogonali. In questo caso però ci si propone di ottenere una proiezione equivalente. Eccone la costruzione: dopo aver circoscritto alla superficie terrestre un cilindro, si considera il piano parallelo a quello equatoriale, passante per un punto qualsiasi  $P$  della sfera, e il semipiano per l'asse polare che contiene il meridiano passante per  $P$ . Questi determinano una retta che interseca il cilindro in un punto  $P'$ , che diremo l'immagine di  $P$ ; allora le equazioni di questa applicazione, come è evidente dalla *Figura 11*, sono:

$$\begin{cases} x' = r\lambda \\ y' = r \sin \beta \end{cases} \quad (5)$$

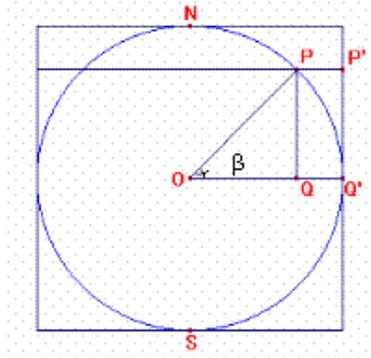


Figura 11: Proiezione di Lambert

Questa applicazione è EQUIVALENTE, cioè conserva le aree: infatti è noto che ogni zona sferica  $RSTU$  è uguale a quella laterale del corrispondente cilindro  $R'S'T'U'$ .

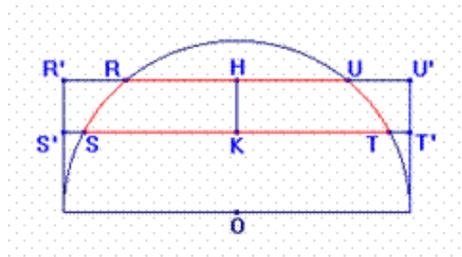


Figura 12: La proiezione di Lambert è equivalente

Volendo utilizzare la geometria differenziale basta ricordare che la formula dell'elemento di area infinitesima è data da

$$dA = \sqrt{EG - F^2} d\beta d\lambda$$

dove con  $E$ ,  $F$  e  $G$  abbiamo indicato i coefficienti della prima forma fondamentale  $ds^2$  sulla sfera. Se  $E_1$ ,  $F_1$  e  $G_1$  sono i corrispondenti coefficienti di  $ds_1^2$  sul piano, dobbiamo verificare che  $EG - F^2 = E_1G_1 - F_1^2$ . Per derivazione dalle (5) si ottiene:

$$ds_1^2 = r^2 d\lambda^2 + r^2 \cos^2 \beta d\beta^2 \quad (6)$$

e ricordando che

$$ds^2 = r^2 d\beta^2 + r^2 \cos^2 \beta d\lambda^2 \quad (7)$$

si ha che

$$EG - F^2 = E_1G_1 - F_1^2 = r^4 \cos^2 \beta.$$

Inoltre, confrontando la (6) e la (7) si osserva subito che quest'applicazione NON è CONFORME:  $ds_1^2$  non è proporzionale a  $ds^2$ .

**Osservazione 2.4.** *Ai meridiani corrispondono rette parallele all'asse  $y$ , che stanno tra loro a distanze proporzionali alle differenze di longitudine; ai paralleli, rette parallele all'asse  $x$ , la cui distanze diminuiscono al crescere di  $\beta$ . La proiezione di Lambert rappresenta quindi con buona fedeltà le regioni equatoriali.*

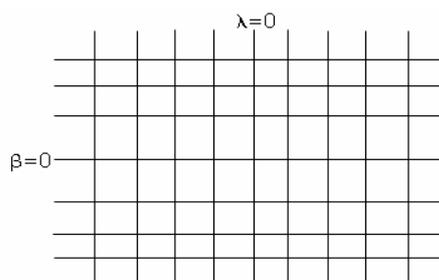


Figura 13: Meridiani e paralleli sulla carta di Lambert

## 2.4 La proiezione di Gall-Peters

Anche questa è una proiezione cilindrica equivalente, che si ottiene modificando quella di Lambert. Vediamone la costruzione: sia  $\beta_s$  un valore di latitudine fissato e sia  $P$  un punto qualsiasi della sfera (vedi *Figura 14*); costruisco il cilindro interno in modo che intersechi la sfera nei punti di latitudine  $\beta_s$ ; ottengo  $Q$  proiettando  $P$  sul cilindro più interno, congiungo  $Q$  con  $O$  e considero  $R$  sul cilindro esterno, a questo punto proiettando sul cilindro interno  $R$  trovo  $P'$ , che diremo l'immagine di  $P$ .

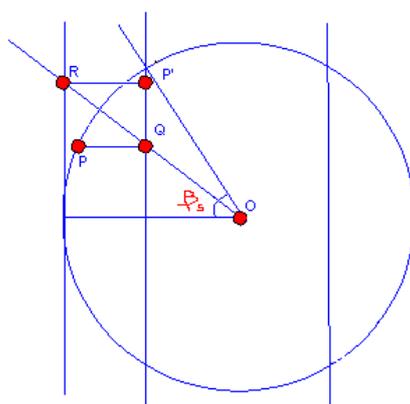


Figura 14: Costruzione della proiezione di Peters

L'equazioni sono:

$$\begin{cases} x' = r\lambda \cos \beta_s \\ y' = r \frac{\sin \beta}{\cos \beta_s} \end{cases} \quad (8)$$

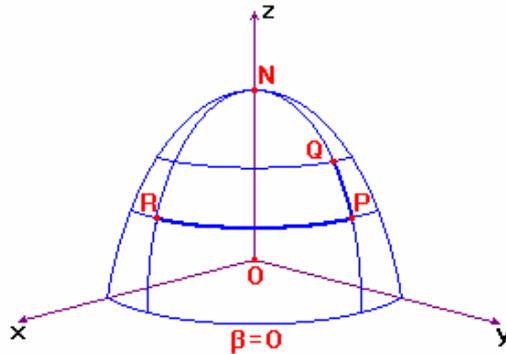
ed è facile verificare che descrivono una proiezione equivalente (basta derivare le (8) e calcolare l'elemento di area infinitesima). Osserviamo che per  $\beta_s = 0$  otteniamo proprio la proiezione di Lambert.

La proiezione di *Gall-Peters* si ottiene ponendo  $\beta_s = 45$ . La proiezione di Gall-Peters consente una riproduzione esatta delle aree effettivamente occupate dalle masse continentali, ma presenta lo svantaggio di un effetto di distorsione verticale molto evidente. Tuttavia ha raggiunto una notevole notorietà nel ventesimo secolo ed è stata spesso contrapposta alla carta *eurocentrica* di Mercatore.

## 2.5 La proiezione di Sanson-Flamsteed

La proiezione di *Sanson-Flamsteed* si può ottenere così:

- i. l'asse  $y$  sia l'immagine del meridiano  $\lambda = 0$  e i poli siano rappresentati al finito su tale asse;
- ii. i paralleli siano trasformati in un fascio di rette parallele e ortogonali all'asse  $y$ , in modo da avere distanze, l'uno dall'altro, uguali alle lunghezze degli archi di meridiano intercettati sulla sfera tra paralleli successivi;
- iii. i meridiani abbiano per immagine delle curve al finito, le cui distanze, lungo le rette parallele all'asse  $x$ , rettifichino gli archi di parallelo corrispondenti.



Da queste proprietà segue che l'ascissa  $x$  del punto immagine  $P'$  varia proporzionalmente all'arco di parallelo e l'ordinata  $y$  varia proporzionalmente all'arco di meridiano; le equazioni di questa proiezione sono quindi:

$$\begin{cases} x' = r\lambda \cos \beta \\ y' = r\beta \end{cases} \quad (9)$$

Questa applicazione è EQUIVALENTE: geometricamente questo segue direttamente dalla costruzione scelta, mentre se ricorriamo agli strumenti della geometria differenziale, otteniamo dalle(8):

$$ds_1^2 = (r^2 + r^2\lambda^2 \sin^2 \beta)d\beta^2 + r^2 \cos^2 \beta d\lambda^2 - 2r^2\lambda \sin \beta \cos \beta d\lambda d\beta \quad (10)$$

da cui ricaviamo

$$EG - F^2 = E_1G_1 - F_1^2 = r^4 \cos^2 \beta.$$

Questa applicazione NON è CONFORME, come si ricava direttamente dalla (9).

**Osservazione 2.5.** *I paralleli sono rette parallele all'asse x di equazioni  $y = r\beta$ ; i meridiani sono curve sinusoidali di equazioni  $x = r\lambda \cos y/r$ .*

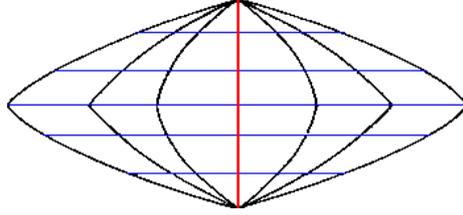


Figura 15: Meridiani e paralleli ottenuti con la proiezione di Sanson-Flamsteed

## 2.6 La proiezione centrale

La proiezione centrale si ottiene proiettando i punti della sfera dal centro sul piano tangente passante per il polo Sud (o per il polo Nord), in modo da trasformare un punto della sfera  $P = (x, y, z)$ , espresso in coordinate geografiche, in un punto  $P' = (x', y')$  del piano dove

$$\begin{cases} x' = \rho \cos \varphi \\ y' = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (11)$$

con  $\varphi = \lambda$  e  $\rho = \frac{r}{\tan \beta}$ , come segue dalla *Figura 16*.

Come è evidente dalle sue equazioni, questa applicazione consente di rappresentare soltanto un emisfero della superficie terrestre; occorre quindi supporre  $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  oppure  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq 0$ . La proiezione centrale è un'applicazione GEODETICA, cioè trasforma le geodetiche in geodetiche; poichè le geodetiche della sfera sono gli archi di cerchio massimo, esse giacciono su piani passanti per il centro, mentre le geodetiche del piano sono rette. Per provare quindi la proprietà geodetica della proiezione centrale, basta osservare che il piano per il centro della sfera che contiene una data geodetica, ovviamente, interseca il piano della proiezione in una retta (vedi *Figura 17*).

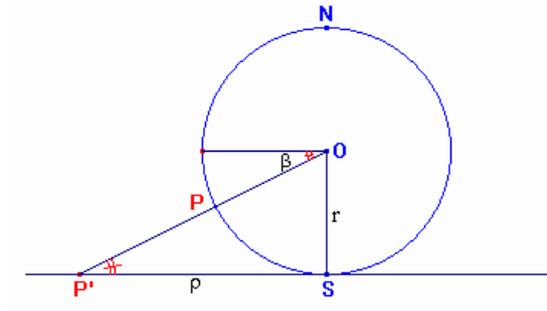


Figura 16: Proiezione centrale

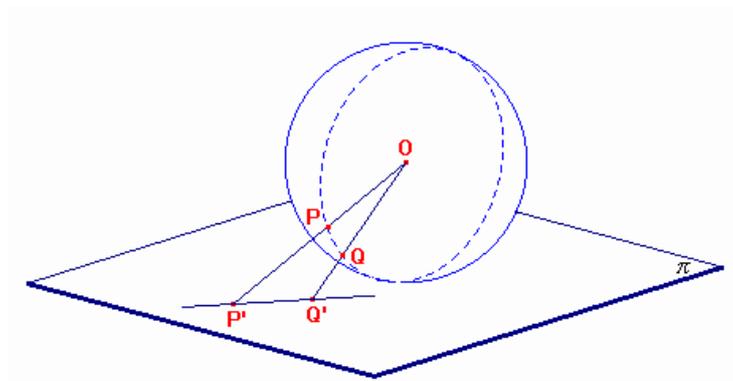


Figura 17: La Proiezione centrale è geodetica

**Osservazione 2.6.** Se supponiamo che  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq 0$ , il polo Sud è rappresentato sulla carta dall'origine delle coordinate, il meridiano  $\lambda = 0$  dall'asse  $x$ ; i paralleli hanno equazione  $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{\tan^2 \beta}$ , mentre i meridiani si trasformano in rette uscenti dall'origine di equazione  $\frac{y}{x} = \tan \lambda$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] E. SERNESI, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri Editore, Torino 2000.
- [2] J. MC CLEARY, *Geometry from a differentiable viewpoint*, Cambridge University Press, New York 1994.
- [3] C. LARDICCI , *Aspetti geometrici della Cartografia*, Archimede 34 (1982), pp 23-42.
- [4] <http://web.unife.it/progetti/matematicainsieme/matcart>.
- [5] <http://geomantica.como.polimi.it/corsi/cartografialaurea>.
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/CylindricalEqual-AreaProjection.html>