



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di
Scienze Matematiche
Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in
Matematica

Evolute di curve piane e grado della distanza euclidea

Evolutes of plane curves and euclidean distance degree

Relatore

Prof. Giorgio Ottaviani

Candidato

Martina Bassi

Indice

1	Introduzione	2
2	Evolute di curve piane	2
2.1	Richiami sulle curve algebriche piane	2
2.1.1	Rappresentazione parametrica locale	5
2.2	Inviluppo di una famiglia di curve	5
2.2.1	Calcolo dell'evoluta di una curva in forma implicita	6
2.3	Evoluta come luogo dei centri di curvatura	7
3	Grado della distanza euclidea	9
3.0.1	Calcolo del numero di punti critici reali	11
4	Galleria di immagini	13
A	Appendice	24
	Riferimenti bibliografici	27

1 Introduzione

L'obiettivo di questa relazione è lo studio del Grado della Distanza Euclidea di una curva algebrica piana; in particolare, dopo aver caratterizzato il concetto di evoluta di una curva sia come involuppo delle rette normali che come luogo dei centri di curvatura, analizzerò il numero di punti critici reali della funzione distanza al quadrato in ogni regione definita dal complementare dell'evoluta. I vari risultati, ottenuti implementando con il software *Macaulay2* i codici riportati in Appendice, sono ampiamente illustrati all'interno della Galleria di Immagini.

2 Evolute di curve piane

Prima di affrontare il concetto di evoluta è opportuno richiamare la nozione di *curva algebrica piana* ed alcuni concetti annessi, come quello di retta tangente, retta normale e luogo dei punti singolari.

2.1 Richiami sulle curve algebriche piane

Definizione 2.1. Sia $p(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio in due variabili a coefficienti nel campo \mathbb{R} ; si definisce *curva algebrica piana* \mathcal{C} la varietà algebrica associata a $p(x, y)$

$$\mathcal{C} : \mathcal{V}(p(x, y)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y) = 0\}$$

ossia il luogo degli zeri del polinomio.

Osservazione 1. Dato $p(x, y) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha}$, con $\mathbf{x}^{\alpha} = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$, dove gli α_i sono interi non negativi e $a_{\alpha} \in \mathbb{R}$, il **grado totale** *deg* p del polinomio è

$$\text{deg } p = \max_{a_{\alpha} \neq 0} \{|\alpha|\}$$

avendo definito $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ il grado di ciascun termine non nullo.

Si dice che la curva piana \mathcal{C} ha grado n se il polinomio $p(x, y)$ ha grado n ; le curve di *grado 2* sono dette *coniche*, quelle di grado *3* si chiamano *cubiche* etc...

Daremo una definizione algebrica di retta tangente, per cui è fondamentale ricordare il legame tra la molteplicità di intersezione tra retta e curva e quella di radice di un polinomio.

Osservazione 2. Data una curva piana $\mathcal{V}(p(x, y))$ ed un punto $(a, b) \in \mathcal{V}(p)$, una retta L passante per (a, b) in forma parametrica è un'espressione del tipo

$$L : \begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \end{cases} \quad (1)$$

in cui $(l, m) \neq (0, 0)$ è il *vettore direttore* della retta e $t \in \mathbb{R}$ è un parametro; è banale osservare come al variare di (l, m) si ottenga il fascio di rette centrato in (a, b) . Eliminando il parametro t dalla (1) si ricava l'equazione della retta in forma implicita

$$m(x - a) - l(y - b) = 0$$

Definizione 2.2. Sia k un intero positivo e $(a, b) \in \mathbb{C}$; sia L una retta definita come sopra. Allora L interseca \mathcal{C} in (a, b) con molteplicità k se $t = 0$ è una radice di molteplicità k del polinomio $g(t) = p(a + lt, b + mt)$.

Osservazione 3. Notiamo che $g(0) = p(a, b) = 0$ per cui $t = 0$ è *sempre* radice di $g(t) \in \mathbb{R}[t]$. Ricordiamo anche che, in generale, $t = 0$ è una radice di molteplicità k se $g = t^k h$ con $h(0) \neq 0$. La proposizione da cui estrapoleremo la definizione di retta tangente ha bisogno di un risultato preliminare:

Lemma 2.1. *Sia $g \in \mathbb{R}[t]$ un polinomio tale che $g(0) = 0$. Allora $t = 0$ è una radice di g di molteplicità ≥ 2 se e solo se $g'(0) = 0$.*

Una volta definito il *gradiente* di p come il vettore delle sue derivate parziali

$$\nabla p = \left(\frac{\partial}{\partial x} p, \frac{\partial}{\partial y} p \right)$$

possiamo enunciare la seguente

Proposizione 2.2. *Sia $p \in \mathbb{R}[x, y]$ e sia $(a, b) \in \mathcal{V}(p)$.*

(i) *Se $\nabla p(a, b) = (0, 0)$ allora ogni retta per (a, b) interseca $\mathcal{V}(p)$ con molteplicità ≥ 2 ; in tal caso si dice che (a, b) è un **punto singolare** di $\mathcal{V}(p)$.*

(ii) *Se $\nabla p(a, b) \neq (0, 0)$ allora c'è un'unica retta per (a, b) che interseca $\mathcal{V}(p)$ con molteplicità ≥ 2 ; in tal caso si dice che (a, b) è un **punto non singolare** di $\mathcal{V}(p)$ e tale retta è la **retta tangente** a $\mathcal{V}(p)$, di equazione*

$$(x - a) \cdot \frac{\partial}{\partial x} p(a, b) + (y - b) \cdot \frac{\partial}{\partial y} p(a, b) = 0 \quad (2)$$

Dimostrazione. Sia L una retta per (a, b) parametrizzata come nella (1) e consideriamo $g(t) = p(a + lt, b + mt)$. Usando la regola della catena otteniamo

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial x} p(a + lt, b + mt) \cdot l + \frac{\partial}{\partial y} p(a + lt, b + mt) \cdot m$$

da cui

$$g'(0) = \frac{\partial}{\partial x} p(a, b) \cdot l + \frac{\partial}{\partial y} p(a, b) \cdot m$$

Notiamo subito come se $\nabla p(a, b) = (0, 0)$ allora $g'(0)$ è sempre uguale a 0; dal *lemma* 2.1 deriva quindi che ogni retta L interseca $\mathcal{V}(p)$ in (a, b) con molteplicità ≥ 2 ; ricordando la *definizione* 2.2 la parte (i) è così provata.

Supponiamo adesso che $\nabla p(a, b) \neq (0, 0) \Rightarrow g'(0) = 0$ se e solo se

$$\frac{\partial}{\partial x} p(a, b) \cdot l + \frac{\partial}{\partial y} p(a, b) \cdot m = 0 \quad (3)$$

È un'equazione lineare nelle incognite l, m e poiché i loro coefficienti non sono entrambi nulli lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione 1. Questo vuol dire che esiste una coppia $(l_0, m_0) \neq (0, 0)$ tale che (l, m) è soluzione della precedente equazione se e solo se $(l, m) = \lambda(l_0, m_0) \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}$; è immediato osservare pertanto come le infinite soluzioni (l, m) in realtà parametrizzano tutte la stessa retta L di vettore direttore (l_0, m_0) . Questo mostra che c'è un'unica retta che incontra $\mathcal{V}(p)$ in (a, b) con molteplicità ≥ 2 .

Poiché la coppia $(l, m) = (-\frac{\partial}{\partial y} p(a, b), \frac{\partial}{\partial x} p(a, b))$ è soluzione della (3), dall'osservazione (2) segue che l'equazione della retta tangente è come nell'enunciato. \square

Osservazione 4. Riscrivendo la (3) come prodotto scalare $\nabla p(a, b) \cdot (l, m) = 0$ possiamo dare la seguente interpretazione geometrica: se la retta L tangente a $\mathcal{V}(p)$ in (a, b) è parametrizzata dalla (1), ciò vuol dire che *gradiente e retta tangente* sono sempre tra loro ortogonali.

Corollario 2.3. Se $\nabla p(a, b) \neq (0, 0)$ allora c'è una *unica retta normale* a $\mathcal{V}(p)$ in (a, b) che ha equazione

$$(x - a) \cdot \frac{\partial}{\partial y} p(a, b) - (y - b) \cdot \frac{\partial}{\partial x} p(a, b) = 0 \quad (4)$$

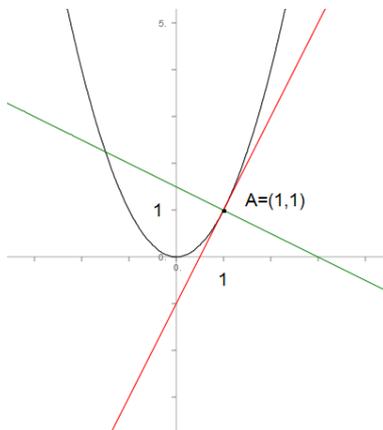


Figura 1: Retta tangente e retta normale

Osservazione 5. Data una curva $\mathcal{V}(p)$, i **punti singolari** sono quei punti $(x, y) \in \mathcal{V}(p)$ che annullano il gradiente, per cui si calcolano risolvendo il seguente sistema:

$$p(x, y) = 0 \wedge \nabla p(x, y) = (0, 0)$$

Una curva $\mathcal{V}(p)$ si dice **liscia** se non ha *punti singolari*.

2.1.1 Rappresentazione parametrica locale

Sia $\mathcal{V}(p)$ la curva piana in forma implicita e (x_0, y_0) un punto non singolare su di essa; localmente la curva ammette una parametrizzazione

$$\varphi(t) : \begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases} \quad (5)$$

ossia esiste un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ con $t_0 \in I$ ed esistono funzioni $a(t), b(t) \in C^\infty$ tali che $(x_0, y_0) = (a(t_0), b(t_0))$ e $p(a(t), b(t)) = 0 \quad \forall t \in I$.

Osservazione 6. La variabile t è detta *parametro*; si parla di parametrizzazione razionale se $a(t), b(t)$ sono funzioni razionali nel campo dei quozienti $\mathbb{R}(t)$, mentre se sono polinomi in $\mathbb{R}[t]$ la parametrizzazione è detta polinomiale.

Definizione 2.3. La curva $\varphi \in C^\infty$ si dice *regolare* in $t_0 \in I$ se in tale punto è definito il vettore tangente $\varphi'(t_0) = (\dot{a}(t_0), \dot{b}(t_0))$, ossia $\varphi'(t_0) \neq (0, 0)$; φ si dice regolare in I se lo è in ogni punto $t_0 \in I$ ed automaticamente il punto $P = \varphi(t_0)$ è un *punto regolare* per la curva; un punto non regolare è detto *singolare*.

Osservazione 7. In un punto regolare $P = \varphi(t_0) = (a(t_0), b(t_0))$ si può dare una rappresentazione della *retta tangente* alla curva come quella retta passante per P proporzionale al vettore $\varphi'(t_0)$, ovvero come il luogo dei punti $X = (x, y)$ tali che $(X - P) = \lambda \cdot \varphi'(t_0)$

$$\begin{cases} x - a(t_0) = \lambda \cdot \dot{a}(t_0) \\ y - b(t_0) = \lambda \cdot \dot{b}(t_0) \end{cases}$$

da cui eliminando il parametro λ possiamo risalire all'equazione della retta tangente in forma cartesiana implicita:

$$(x - a(t_0)) \cdot \dot{b}(t_0) - (y - b(t_0)) \cdot \dot{a}(t_0) = 0 \quad (6)$$

Similmente, la *retta normale* alla curva nel punto P avrà equazione

$$(x - a(t_0)) \cdot \dot{a}(t_0) + (y - b(t_0)) \cdot \dot{b}(t_0) = 0 \quad (7)$$

2.2 Involuppo di una famiglia di curve

La nozione di *inviluppo* è fondamentale per dare una prima definizione del concetto di **evoluta**.

Intuitivamente l'inviluppo di una famiglia di curve è quella singola curva tale che in ogni suo punto è tangente ad una curva della famiglia.

Definizione 2.4. Dato un polinomio $F \in \mathbb{R}[x, y, t]$, fissiamo un numero reale $t \in \mathbb{R}$; allora $\mathcal{V}(F_t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y, t) = 0\}$ e la **famiglia di curve** determinata da F consiste delle varietà $\mathcal{V}(F_t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Osservazione 8. In questa definizione $t \in \mathbb{R}$ è un parametro che ci dice quale curva della famiglia stiamo considerando.

Diamo adesso una caratterizzazione algebrica di inviluppo.

Definizione 2.5. Data una famiglia $\mathcal{V}(F_t)$ di curve in \mathbb{R}^2 , il suo *inviluppo* consiste di tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano alle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Vediamo di spiegare in che modo tale caratterizzazione rispecchia l'idea intuitiva di involuppo esposta precedentemente.

Supponiamo che l'involuppo C sia parametrizzato da

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

La prima condizione che C deve soddisfare è che ogni suo punto appartenga ad una curva della famiglia, pertanto assumeremo che ad ogni istante t il punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ appartenga proprio alla curva $\mathcal{V}(F_t)$, ossia

$$F(f(t), g(t), t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (9)$$

Questo ci assicura che C incontra tutte le curve della famiglia.

La seconda condizione è che all'istante t l'involuppo C sia tangente alla curva $\mathcal{V}(F_t)$ in $P = (f(t), g(t))$; ricordando che (\dot{f}, \dot{g}) è il vettore tangente a C nel punto P e che $\nabla F_t = \left(\frac{\partial}{\partial x} F_t, \frac{\partial}{\partial y} F_t \right)$ è il vettore ortogonale a $\mathcal{V}(F_t)$ in P , algebricamente la condizione di tangenza tra le due curve C e $\mathcal{V}(F_t)$ si esprime imponendo che $(\dot{f}, \dot{g}) \perp \nabla F_t$ in P , ossia che $\nabla F_t \cdot (\dot{f}, \dot{g}) = 0$; equivalentemente:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(f(t), g(t), t) \cdot \dot{f} + \frac{\partial}{\partial y} F(f(t), g(t), t) \cdot \dot{g} = 0 \quad (10)$$

Abbiamo così mostrato che l'involuppo è determinato dalle condizioni (9) e (10). Infine, differenziando la (9) rispetto a t e sottraendogli la (10) si trova

$$\frac{\partial}{\partial t} F(f(t), g(t), t) = 0 \quad (11)$$

La (9) e la (11) mostrano quindi come i punti $(x, y) = (f(t), g(t))$ dell'involuppo C effettivamente soddisfino la caratterizzazione data nella definizione 2.5.

Concludiamo questa sezione ricordando che per ricavare l'equazione dell'involuppo è necessario *eliminare il parametro t dalla (8)*.

Definizione 2.6. Si definisce **evoluta** di una curva *l'involuppo delle sue rette normali*.

Osservazione 9. Nel caso di una curva parametrizzata come in (5), se con $F(x, y, t) = (x - a(t)) \cdot \dot{a}(t) + (y - b(t)) \cdot \dot{b}(t)$ indichiamo la famiglia di rette normali, allora la sua *evoluta* si ottiene eliminando il parametro t dal sistema in (8).

2.2.1 Calcolo dell'evoluta di una curva in forma implicita

Se la curva è data in forma implicita da $p(x, y) = 0$, la caratterizzazione algebrica di involuppo risulta leggermente modificata per tenere di conto dei due parametri x_0, y_0 necessari a localizzare il punto sulla curva. In tal caso, definita

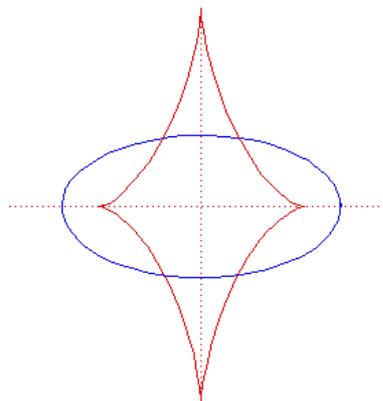
$\varphi(x, y, x_0, y_0) = (x - x_0) \cdot \frac{\partial}{\partial y} p(x_0, y_0) - (y - y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x} p(x_0, y_0) = 0$ la famiglia delle rette normali alla curva al variare del punto $P = (x_0, y_0)$, l'equazione *dell'evoluta* si ricava eliminando proprio x_0, y_0 dal seguente sistema di tre equazioni

$$\begin{cases} p(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x, y, x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial y_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_0} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

in cui:

- la prima equazione ci assicura che il punto $P = (x_0, y_0)$ stia sulla curva;
- la terza equazione deriva da $\frac{\partial}{\partial x_0} \varphi(x, y, x_0, y_0) = 0$ in cui si tiene di conto del fatto che x_0, y_0 sono legati dal soddisfare la prima equazione e che pertanto $\frac{\partial y_0}{\partial x_0} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial x_0}}{\frac{\partial p}{\partial y_0}}$.

```
S=QQ[s,t,x,y,MonomialOrder=>Lex]
p=s^2+4*t^2-4
g=(x-s)*(diff(t,p))-(y-t)*(diff(s,p))
h=diff(t,p)*diff(s,g)-diff(s,p)*diff(t,g)
eliminate({s,t}, ideal(p,g,h))
```



Questo semplice codice implementato con il software *Macaulay2* restituisce l'equazione dell'*astroide*, l'evolva dell'ellisse:

$$64x^6 + 48x^4y^2 - 432x^4 + 12x^2y^4 + 756x^2y^2 + 972x^2 + y^6 - 27y^4 + 243y^2 - 729.$$

2.3 Evoluta come luogo dei centri di curvatura

Dopo aver richiamato le nozioni di curvatura e cerchio osculatore ad una curva piana regolare daremo un'altra definizione di evoluta e mostreremo l'equivalenza delle due caratterizzazioni.

Sia $\varphi \in \mathbf{C}^\infty$ la rappresentazione parametrica di una curva piana regolare; la quantità $\|\varphi'(t)\|$ è la *velocità* di φ nel punto $P = \varphi(t)$.

Definizione 2.7. Data φ come sopra e $t_0 \in I$ si definisce *lunghezza d'arco* la funzione $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\varphi'(u)\| du$$

Osservazione 10. Si può dimostrare che attraverso la lunghezza d'arco $s(t)$ è sempre possibile riparametrizzare una curva regolare φ in modo che abbia velocità $\|\varphi'(s)\|$ costante uguale a 1; in tal caso la curva si dirà a *velocità unitaria*.

Data una curva piana regolare a velocità unitaria, in ogni punto $P = \varphi(s)$ è definita la base mobile di Frenet $\{\tau, n\}$, dove $\tau = \varphi'$ è il versore tangente a φ ed n è il versore normale a φ . Dall'identità $\tau \cdot \tau = 1$ segue che, derivando ambo i membri, $\tau \cdot \tau' = 0$ e dunque che τ' è un multiplo di n : $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che $\tau' = k \cdot n$; derivando entrambi i membri della relazione $\tau \cdot n = 0$ invece otteniamo $\tau \cdot n' = -\tau' \cdot n = -k$, mentre dall'identità $n \cdot n = 1$ segue, come in precedenza, che $n \cdot n' = 0$ e dunque che $n' = -k \cdot \tau$.

Definizione 2.8. Si definisce *curvatura* della curva piana regolare a velocità unitaria φ la funzione $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \tau' = k \cdot n \\ n' = -k \cdot \tau \end{cases} \quad (13)$$

Proposizione 2.4. La curvatura di una curva piana regolare con rappresentazione parametrica come in (5) è data da

$$k(t) = \left| \frac{x''y' - y''x'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

Osservazione 11. Se $k(t) \neq 0$ allora $r(t) = \left| \frac{1}{k(t)} \right|$ è il raggio di curvatura di φ in P mentre il punto $c(t) = \varphi(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot n$ è il centro di curvatura di φ in P .

Definizione 2.9. Si definisce *cerchio osculatore* a φ nel punto $P = \varphi(t)$ la circonferenza di centro $c(t)$ e raggio $r(t)$.

Proposizione 2.5. Il luogo dei centri di curvatura $c(s)$ associati ad una curva piana regolare φ di velocità unitaria rappresenta l'*evoluta* di φ .

Dimostrazione. Abbiamo già visto che il luogo dei centri di curvatura è definito come $c(s) = \varphi(s) + \frac{1}{k(s)} \cdot n$; differenziando ambo i membri e ricordando la (13) si ottiene

$$c'(s) = -\frac{k'(s)}{k(s)^2} \cdot n$$

ossia il vettore tangente a $c(s)$ è proporzionale ad n e che dunque la retta tangente a $c(s)$ individua una direzione ortogonale a τ . La dimostrazione si conclude facendo vedere che tale retta passa proprio per il punto $\varphi(s)$ ossia che esiste $\mu(s)$ tale che $\varphi(s) = c(s) + \mu(s) \cdot c'(s)$; ricavando $n = -\frac{k(s)^2}{k'(s)} \cdot c'(s)$ dall'equazione sopra e sostituendolo in $c(s) = \varphi(s) + \frac{1}{k(s)} \cdot n$ troviamo che $\varphi(s) = c(s) + \frac{k(s)}{k'(s)} \cdot c'(s)$. \square

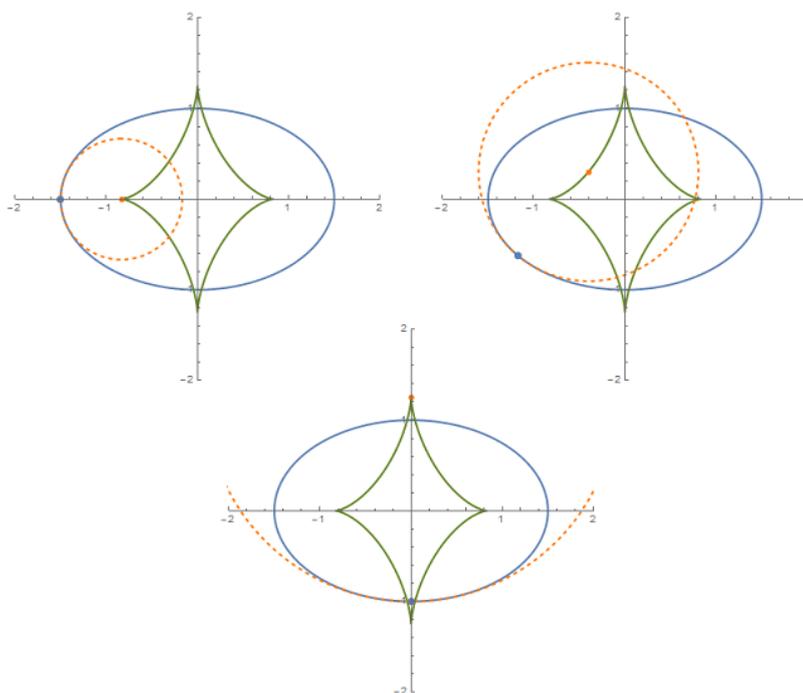


Figura 2: Evoluta dell'ellisse come luogo dei centri di curvatura

Osservazione 12. Dalla Figura 2 è evidente come i quattro punti singolari dell'astroide siano i centri di curvatura corrispondenti ai quattro vertici dell'ellisse; in particolare modo i due vertici sull'asse maggiore sono punti di massimo per la curvatura (dunque punti di minimo per il raggio) mentre i due vertici sull'asse minore sono punti di minimo per la curvatura (quindi punti di massimo per il raggio).

3 Grado della distanza euclidea

Problema: data una curva piana ed un punto P_1 fissato, quante sono le rette normali alla curva passanti per P_1 ?

Definizione 3.1. Data una curva con rappresentazione parametrica e un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ fissato, la funzione *distanza al quadrato* di P_1 da un punto $P(t) = (a(t), b(t))$ qualsiasi della curva è una funzione nell'unica variabile t :

$$F(t) = (x_1 - a(t))^2 + (y_1 - b(t))^2$$

Definizione 3.2. Un punto critico di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$ è un punto del dominio in cui la derivata si annulla oppure non è definita.

Osservazione 13. In generale i punti critici di una funzione $\varphi(t)$ sono gli stessi della funzione $g(t) = \sqrt{\varphi(t)}$:

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi'(t)}{2 \cdot \sqrt{\varphi(t)}} = 0 \Leftrightarrow \varphi'(t) = 0$$

Proposizione 3.1. $P(t)$ non singolare è un punto critico della funzione $F(t) \Leftrightarrow$ il vettore $P_1 - P(t)$ è perpendicolare al vettore tangente alla curva in $P(t)$.

Dimostrazione. $P(t)$ è un punto critico della funzione $F(t) \Leftrightarrow F'(t) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - a(t)) \cdot \dot{a}(t) + (y_1 - b(t)) \cdot \dot{b}(t) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - a(t), y_1 - b(t)) \cdot (\dot{a}(t), \dot{b}(t)) = 0$ da cui, per quanto visto nell'osservazione (4), segue la tesi. \square

Soluzione del problema: dalla proposizione segue che il numero di rette normali alla curva passanti per P_1 è dato dal numero di punti critici reali della funzione $F(t)$.

Osservazione 14. Il numero di punti critici reali può cambiare ma è invariante in ogni componente connessa del complementare dell'evoluta, mentre il numero di punti critici complessi è costante su un aperto denso (si veda [7]).

Definizione 3.3. Si definisce **grado della distanza euclidea (EDdegree)** il numero di punti critici complessi di $F(t)$ per P_1 generico.

È importante ribadire che l'evoluta divide il piano \mathbb{R}^2 in regioni connesse, in ciascuna delle quali il numero dei punti critici reali è costante e sempre \leq EDdegree.

Illustriamo qualitativamente quanto esposto prendendo ad esempio l'ellisse, il cui EDdegree è uguale a 4. L'astroide divide il piano in 2 regioni, una interna e una esterna all'evoluta.

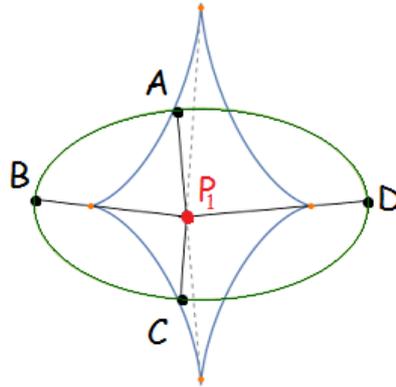


Figura 3: Numero di punti critici reali per un punto P_1 interno all'astroide.

Come possiamo vedere dalla Figura 3, preso un punto P_1 interno all'astroide, è possibile disegnare 4 rette normali all'ellisse passanti per P_1 , in accordo col fatto che tutti e 4 i punti critici della funzione $F(t)$ sono reali.

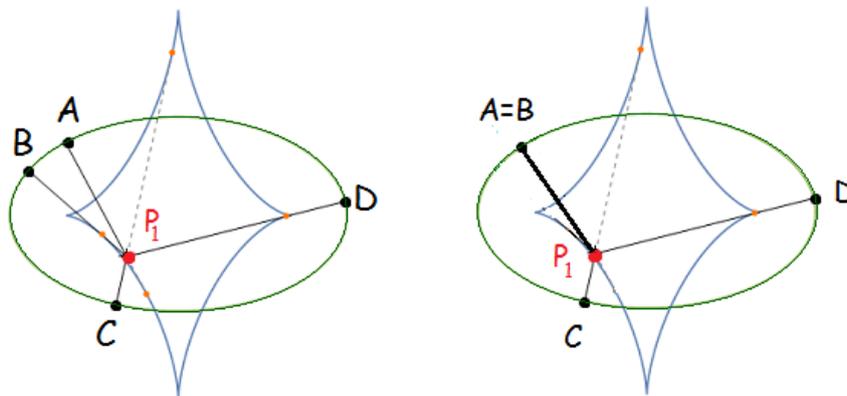


Figura 4: Numero di punti critici reali per un punto P_1 sull'astroide.

Nella Figura 4, invece, vediamo che se il punto P_1 giace proprio sull'astroide ma non è una cuspidale, 2 di questi 4 punti critici reali vanno a coincidere dando così origine ad un punto critico reale di molteplicità 2; ciò vuol dire che dal punto P_1 si possono condurre 3 rette normali all'ellisse. Si noti altresì come la normale in A all'ellisse sia tangente all'evolva in P_1 . Ne deriva quindi che *l'evolva è il luogo in cui si ha molteplicità nei punti critici*.

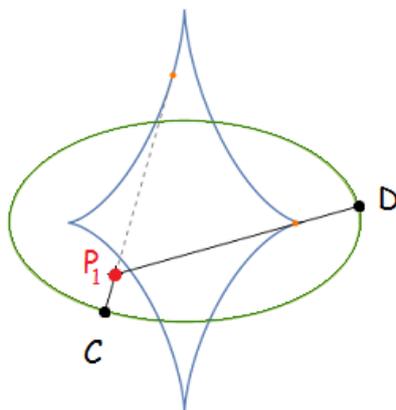


Figura 5: Numero di punti critici reali per un punto P_1 esterno all'astroide.

La Figura 5 mostra che se il punto P_1 è esterno all'astroide, il numero delle normali all'ellisse che si possono condurre da P_1 si riduce a 2; questo perché i due punti critici reali coincidenti sono diventati due punti complessi coniugati.

3.0.1 Calcolo del numero di punti critici reali

Il numero di punti critici reali è pari al numero di radici reali del polinomio $F'(t) = (x_1 - a(t)) \cdot \dot{a}(t) + (y_1 - b(t)) \cdot \dot{b}(t) \in \mathbb{R}[t]$ dove $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ è un punto fissato. Come riportato nelle note del corso (si veda [4, p.8,11]) possiamo valutare il numero di soluzioni reali di un polinomio in una sola variabile a coefficienti reali

- in aritmetica approssimata: costruendo la matrice compagna di $F'(t)$ e ricavando direttamente gli autovalori;
- in aritmetica esatta: costruendo la matrice Bezoutiante di $F'(t)$ e applicando il *Teorema di Sylvester*.

Teorema 3.2 (Teorema di Sylvester). *Sia B la matrice Bezoutiante di f , cioè la matrice della forma di Killing associata ad un polinomio f .*

- (i) *f ha n radici reali e distinte se e solo se B è definita positiva.*
- (ii) *Il rango di B è il numero di radici (reali o complesse) distinte di f .*
- (iii) *il numero di radici reali (distinte) di f è uguale al numero di autovalori positivi di B meno il numero di autovalori negativi di B .*

Prendiamo ad esempio la seguente parametrizzazione dell'ellisse:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

ed il punto $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ interno all'astroide. Utilizziamo il software *Macaulay2* per ricavarci l'equazione di $F'(t)$ e dunque conoscere da subito l'EDdegree; il seguente frammento di codice

```

R=QQ[t]
x=1/2
y=1/2
num1=2*(1-t^2)
den1=(1+t^2)
num2=2*t
den2=(1+t^2)
xpunto=(diff(t,num1)*den1)-(num1*(diff(t,den1)))
ypunto=(diff(t,num2)*den2)-(num2*(diff(t,den2)))
I=ideal((den1*xpunto)*x+(den2*ypunto)*y-(num1*xpunto)-(num2*ypunto))

```

dà in output $I=\text{ideal}(-t^4 - 16t^3 + 8t + 1)$; $F'(t)$ ha dunque grado 4 per cui 4 è l'**EDdegree** dell'ellisse. Costruiamo adesso la matrice compagna di $F'(t)$:

```

bb=sub(basis (R/I),R)
d=numcols bb
comp=sub(contract(transpose bb,(bb_(0,0))*t%I),t=>0_QQ)
for i from 1 to (d-1) do comp=comp|sub(contract(transpose bb,
bb_(0,i))*t%I),t=>0_QQ)
comp
sol=eigenvalues comp

```

L'ultimo comando restituisce gli autovalori della matrice compagna, ossia le radici del polinomio $F'(t)$: $t_1 = 0.74677$; $t_2 = -0.129287$; $t_3 = -0.648609$; $t_4 = -15.9689$.

Osserviamo che, in accordo con quanto già sapevamo, essi sono tutti reali.

Possiamo giungere allo stesso risultato anche in aritmetica esatta, attraverso opportune considerazioni sulla segnatura della matrice Bezoutiante:

```

b=mutableMatrix(R,d,d)
for i from 0 to d-1 do for j from 0 to d-1 do b_(i,j)=trace(comp^(i+j))
Bez=matrix b
r=rank Bez
pc=det(Bez-t*id_(R^{d:0}))

```

Il rango risulta uguale a 4, per cui tutte e 4 le radici di $F'(t)$ sono distinte; la regola dei segni di Cartesio applicata al polinomio caratteristico

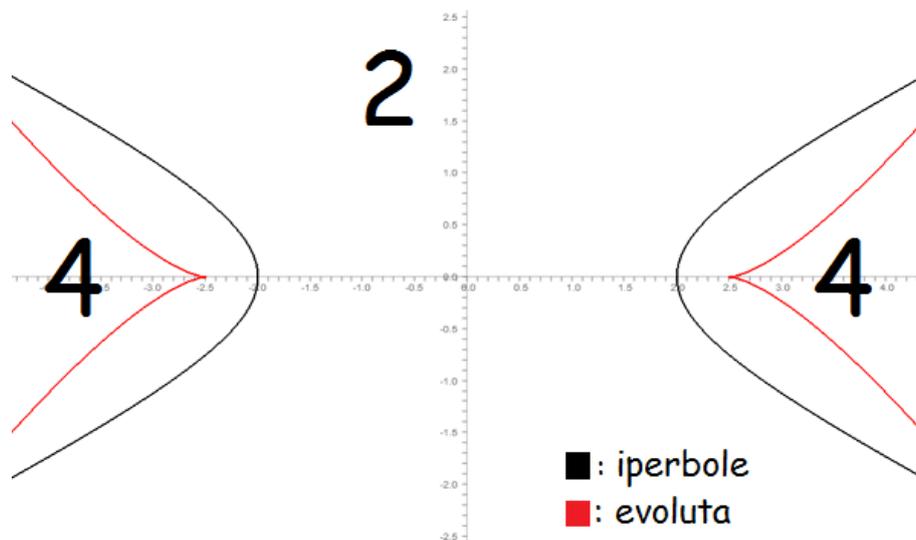
$pc_{Bez} = t^4 - 16647624t^3 + 74803072t^2 - 65644928t + 6631168$ ci restituisce la segnatura (4,0); il Teorema di Sylvester ci garantisce allora che tutte e 4 le radici del polinomio $F'(t)$ sono reali.

Se avessimo preso un punto esterno all'astroide, ad esempio $P_1 = (2, 2)$ avremmo ottenuto $I=\text{ideal}(-4t^4 - 28t^3 - 4t + 4)$; questa volta le radici reali del polinomio $F'(t)$ sarebbero state soltanto 2: il comando *eigenvalues comp* ci avrebbe infatti restituito $t_1 = 0.425981$; $t_2 = -7.02316$, oltre ad una coppia di complessi coniugati. Tale risultato sarebbe stato confermato anche dal Teorema di Sylvester, dal momento che il polinomio caratteristico della Bezoutiante $pc_{Bez} = t^4 - 122490t^3 + 332149t^2 + 138772t - 67532$ avrebbe presentato una segnatura di tipo (3,1).

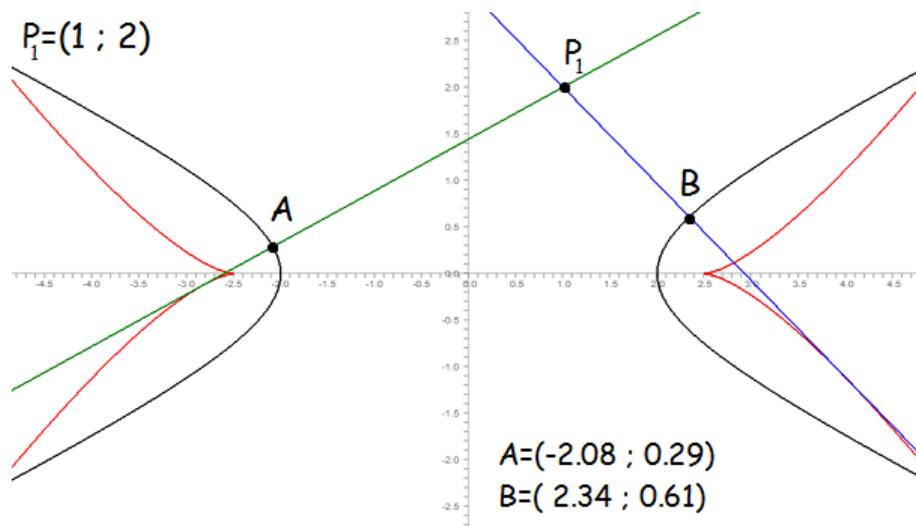
4 Galleria di immagini

In quest'ultima sezione racchiudiamo una serie di esempi visivi di curve algebriche piane: per ciascuna si evidenzia sia l'evoluta che il numero di rette normali reali alla curva che possono essere condotte da un punto P_1 che si trovi all'interno di una delle componenti connesse del complementare dell'evoluta. In un secondo momento provvederemo a disegnare tali rette normali: implementando con il software *Macaulay2* i codici riportati in Appendice è possibile, di fatto, ricavarsi i punti critici $P(t)$ di $F(t)$.

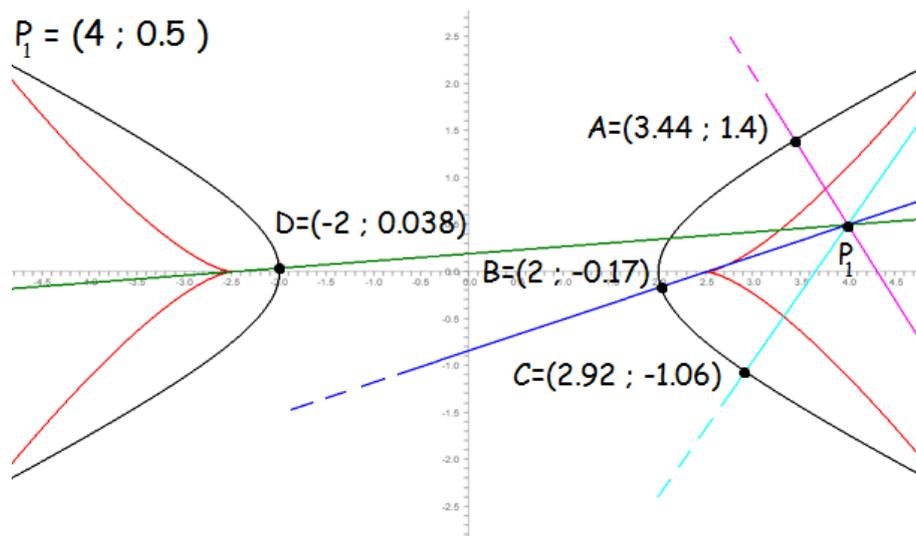
Iperbole



Iperbole e sua evoluta: essa è di grado 6 e ha equazione
 $64x^6 - 48x^4y^2 - 1200x^4 + 12x^2y^4 - 2100x^2y^2 + 7500x^2 - y^6 - 75y^4 - 1875y^2 - 15625$.
L'EDdegree dell'iperbole è 4; nel disegno è riportato il numero di rette normali reali che possono essere tracciate in ciascuna componente connessa.

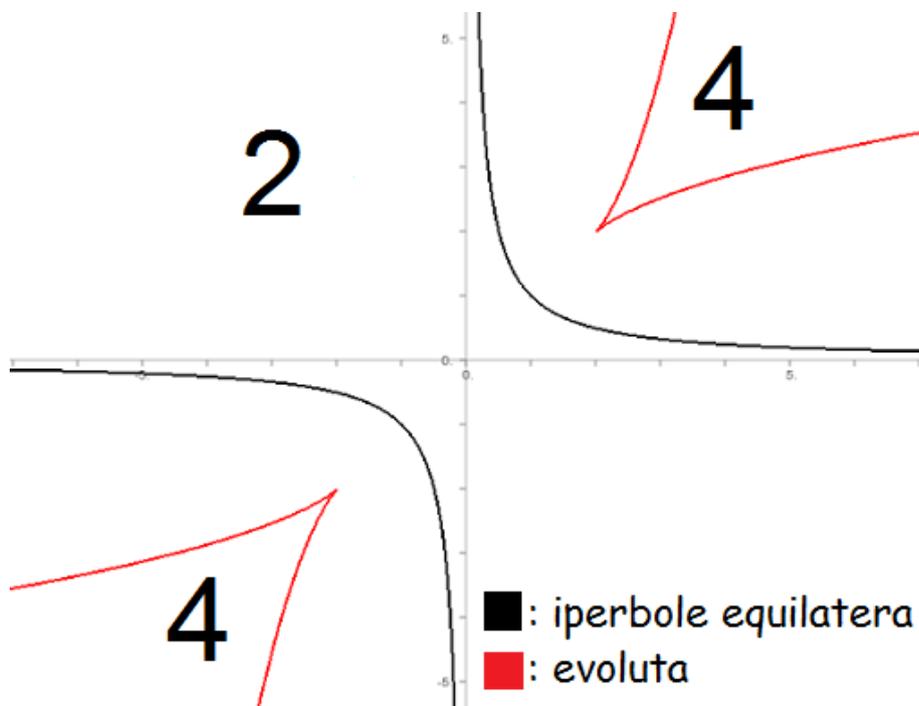


Dal punto $P_1 = (1; 2)$ si possono disegnare 2 rette normali all'iperbole.

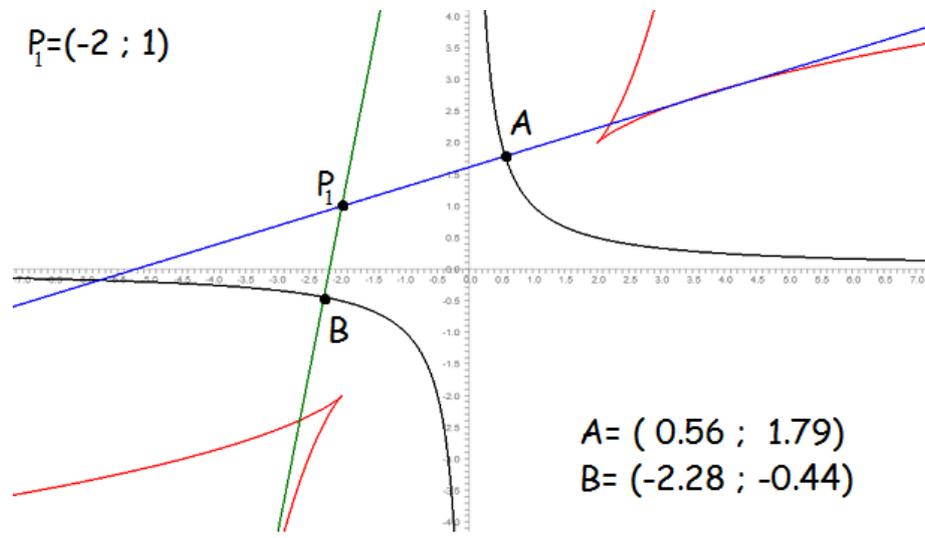


Dal punto $P_1 = (4; 0.5)$ si possono tracciare 4 rette normali all'iperbole.

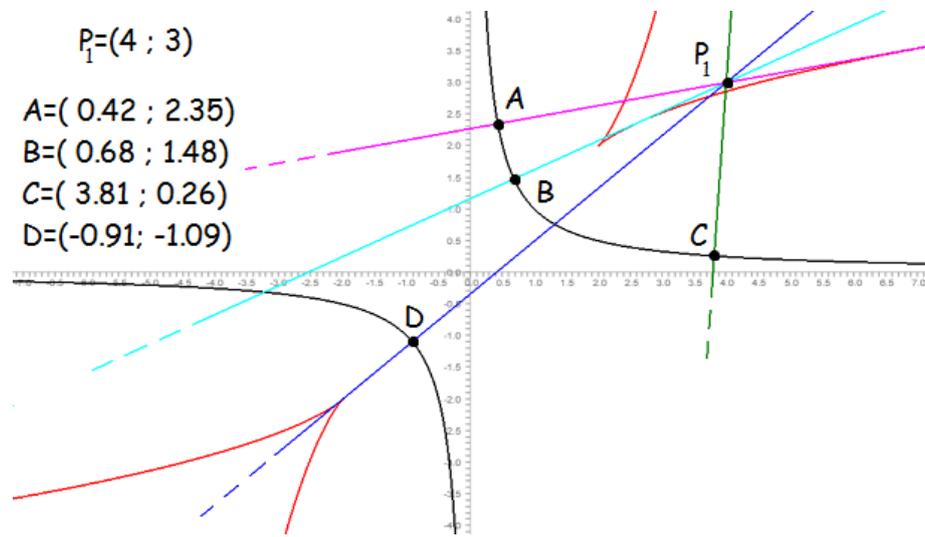
Iperbole equilatera



L'EDdegree dell'iperbole equilatera di equazione $xy = 1$ è 4.
 A differenza del caso precedente l'evolva dell'iperbole equilatera non ha grado 6 ma 4:
 $27x^4 - 4x^3y^3 - 6x^2y^2 - 192xy + 27y^4 + 256$.

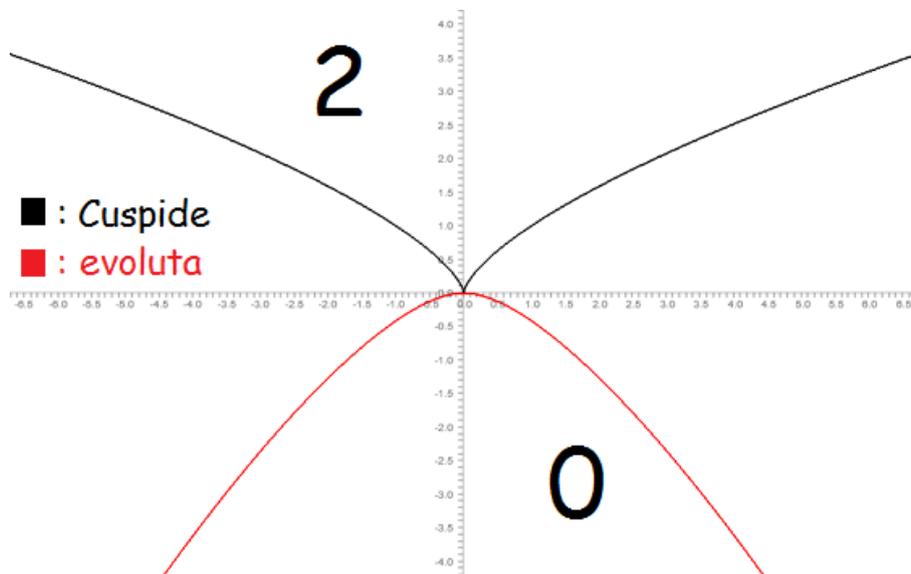


Dal punto $P_1 = (-2; 1)$ si possono tracciare 2 rette normali all'iperbole equilatera.

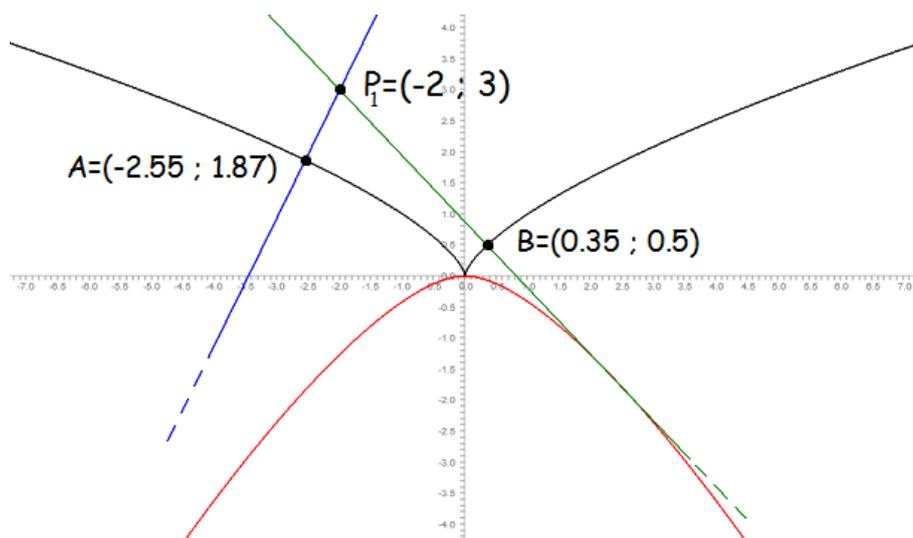


Dal punto $P_1 = (4; 3)$ si possono tracciare 4 rette normali reali all'iperbole equilatera.

Cuspide

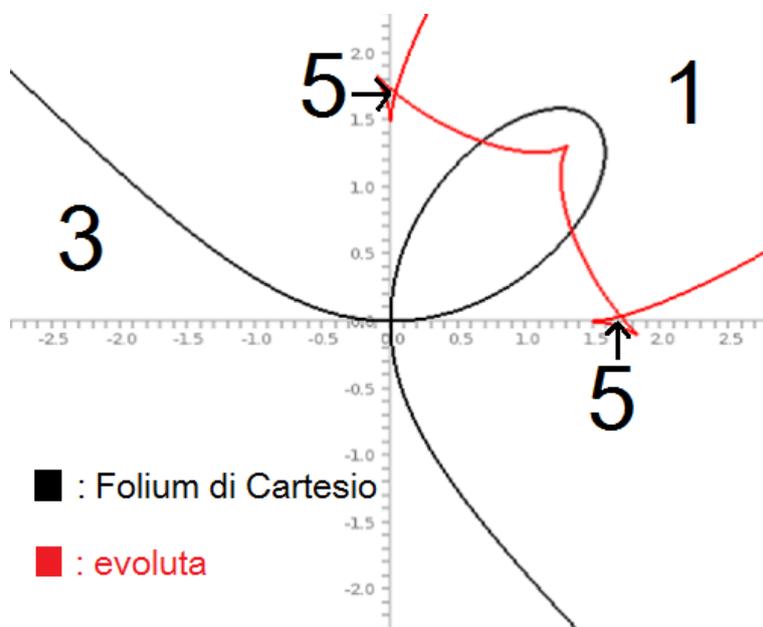


L'EDdegree della Cuspide di equazione $x^2 - y^3 = 0$ è 4.
 L'evoluta ha anch'essa grado 4: $6561x^4 + 15552x^2y + 18432y^3 + 288x^2 + 6144y^2 + 512y$.



Dal punto $P_1 = (-2; 3)$ si possono disegnare 2 rette normali alla cuspide.

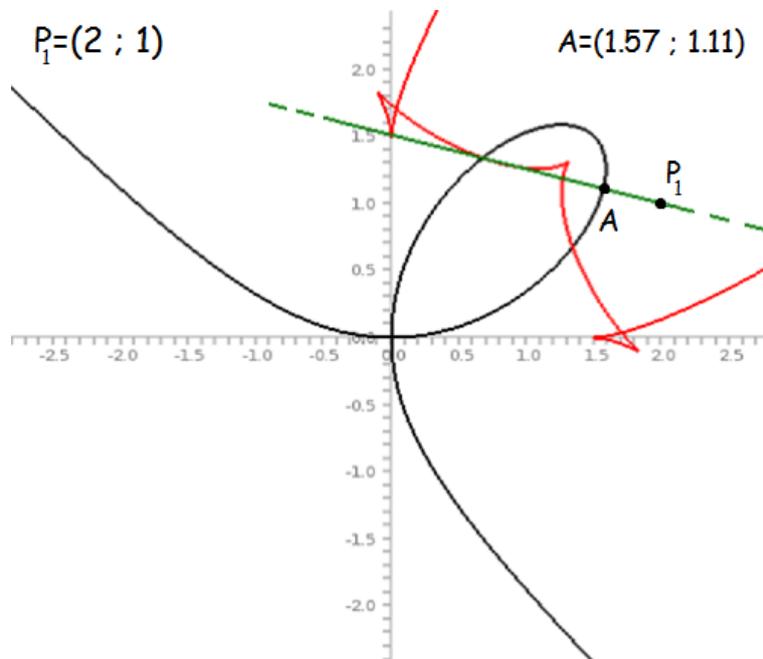
Folium di Cartesio



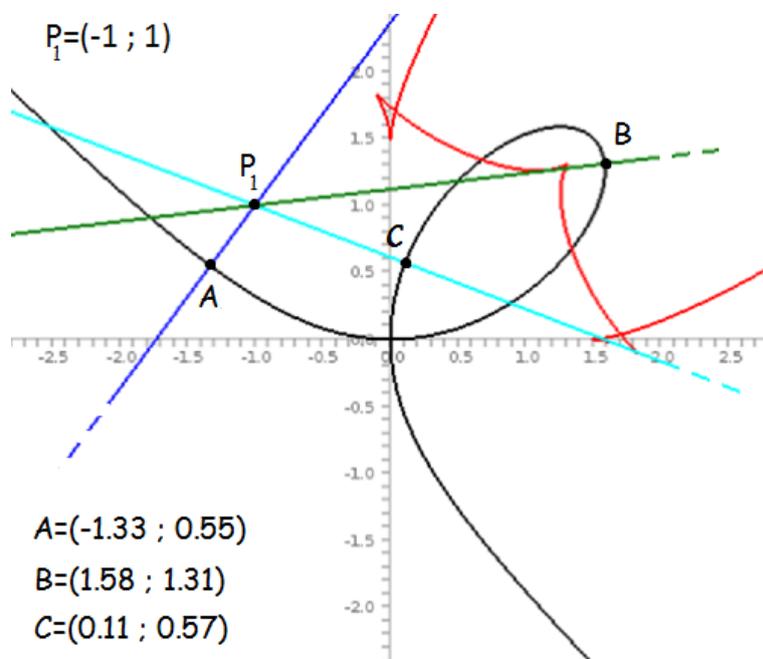
L'EDdegree del Folium di Cartesio di equazione $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ è 7.

L'evoluta ha grado 12:

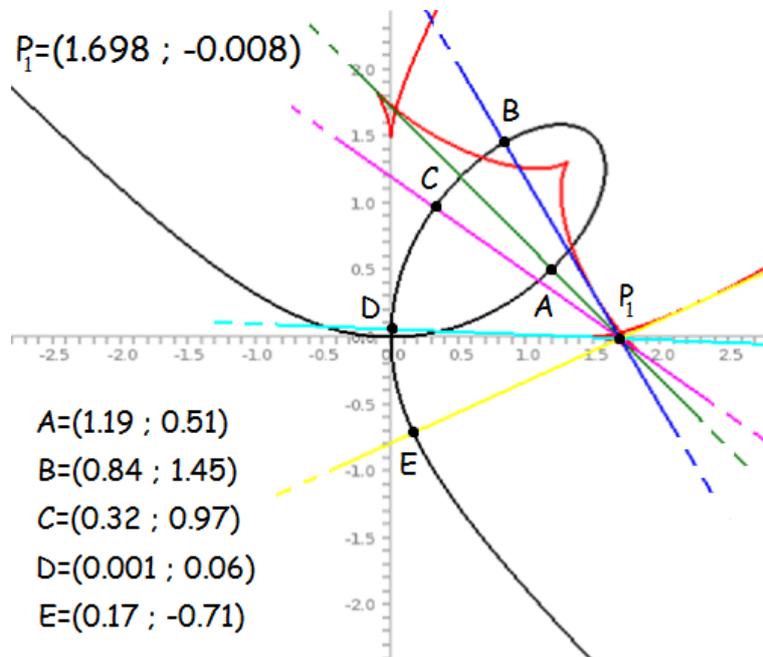
$$\begin{aligned}
 &16x^{12} - 64x^9y^3 + 96x^6y^6 - 64x^3y^9 + 16y^{12} - 96x^{11} + 96x^9y^2 + 288x^8y^3 - 288x^6y^5 - 288x^5y^6 + \\
 &288x^3y^8 + 96x^2y^9 - 96y^{11} + 408x^{10} + 192x^9y + 336x^8y^2 - 624x^7y^3 + 24x^6y^4 - 672x^5y^5 + 24x^4y^6 - \\
 &624x^3y^7 + 336x^2y^8 + 192xy^9 + 408y^{10} - 1560x^9 - 3696x^8y - 8808x^7y^2 - 6632x^6y^3 - 12072x^5y^4 - \\
 &12072x^4y^5 - 6632x^3y^6 - 8808x^2y^7 - 3696xy^8 - 1560y^9 + 4497x^8 + 15648x^7y + 34764x^6y^2 + \\
 &42768x^5y^3 + 62694x^4y^4 + 42768x^3y^5 + 34764x^2y^6 + 15648xy^7 + 4497y^8 - 6528x^7 - 23100x^6y - \\
 &68748x^5y^2 - 70968x^4y^3 - 70968x^3y^4 - 68748x^2y^5 - 23100xy^6 - 6528y^7 - 1156x^6 + 264x^5y + \\
 &50412x^4y^2 + 16368x^3y^3 + 50412x^2y^4 + 264xy^5 - 1156y^6 + 12084x^5 + 42036x^4y + 10392x^3y^2 + \\
 &10392x^2y^3 + 42036xy^4 + 12084y^5 - 3054x^4 - 65952x^3y - 31332x^2y^2 - 65952xy^3 - 3054y^4 - \\
 &11060x^3 + 46056x^2y + 46056xy^2 - 11060y^3 + 8784x^2 - 1440xy + 8784y^2 - 10584x - 10584y + 9261.
 \end{aligned}$$



Dal punto $P_1 = (2; 1)$ si può disegnare **un'unica** retta normale al folium.

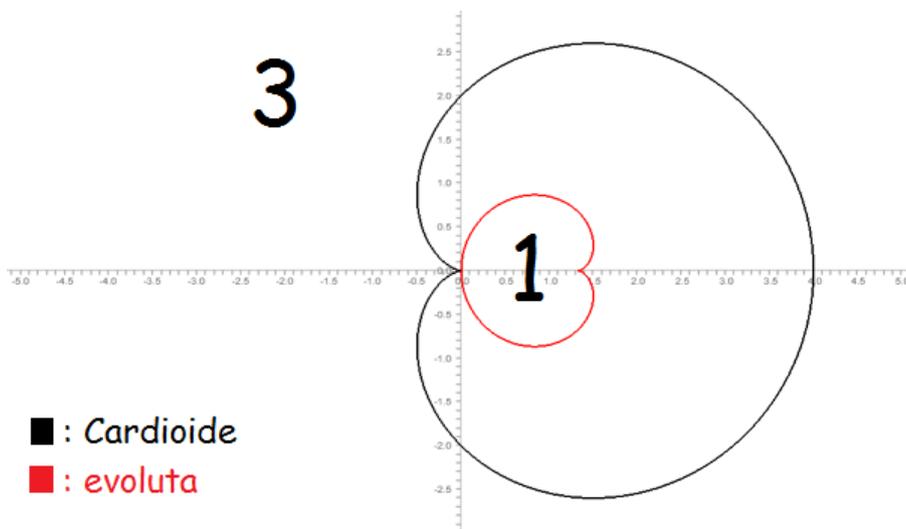


Dal punto $P_1 = (-1; 1)$ si possono disegnare **3** rette normali al folium.



Dal punto $P_1 = (\frac{1698}{1000}; \frac{-8}{1000})$ si possono disegnare 5 rette normali al folium.

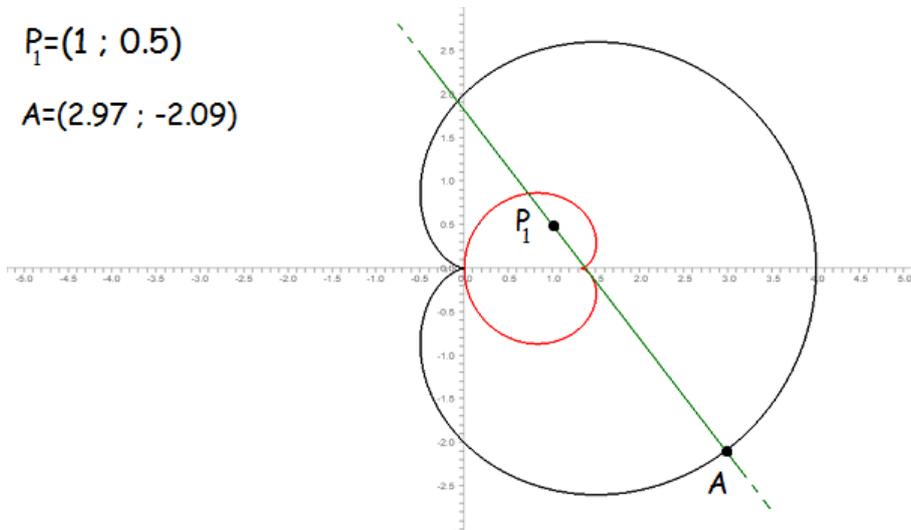
Cardioide



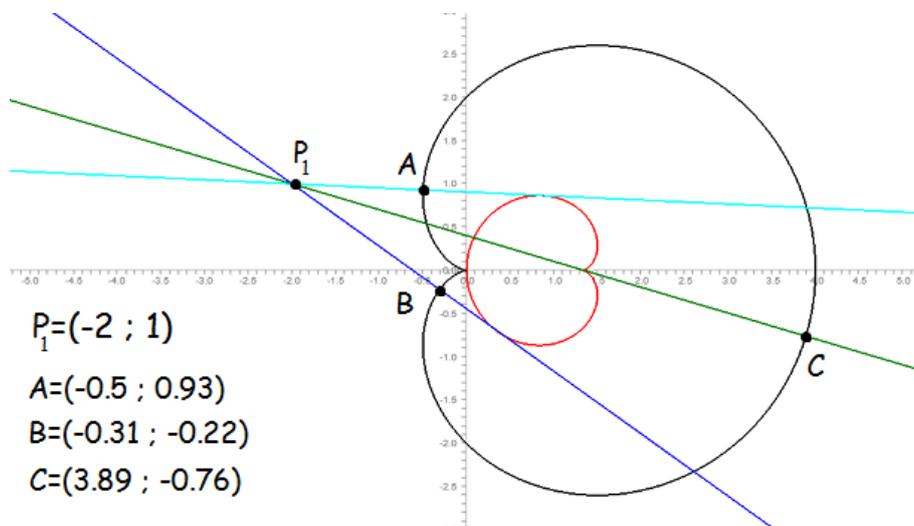
L'EDdegree della Cardioide di equazione $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ è 3.
 Osserviamo come l'evoluta della cardioide sia ancora una cardioide, sebbene ribaltata;
 essa ha equazione $27x^4 + 54x^2y^2 + 27y^4 - 108x^3 - 108xy^2 + 144x^2 + 36y^2 - 64x$.

$$P_1 = (1 ; 0.5)$$

$$A = (2.97 ; -2.09)$$

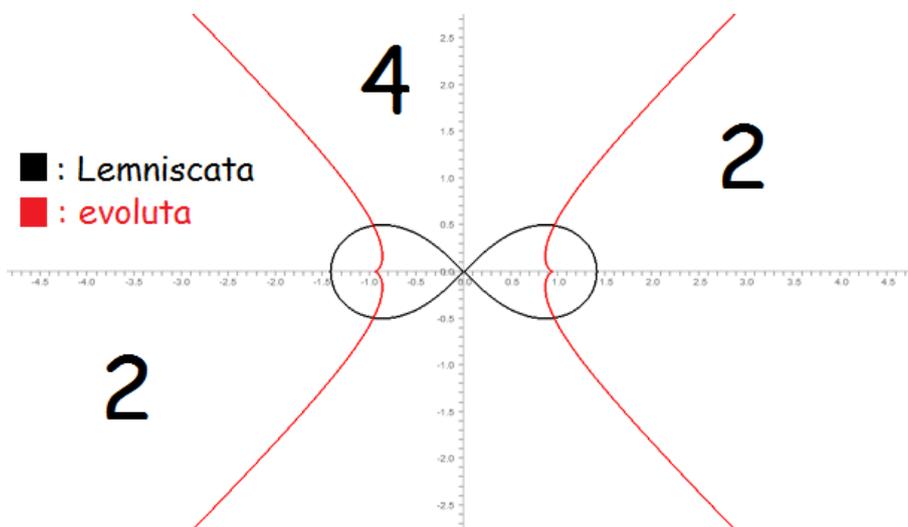


Dal punto $P_1 = (1; \frac{1}{2})$ si può disegnare **un'unica** retta normale alla cardioide.



Dal punto $P_1 = (-2; 1)$ si possono disegnare **3** rette normali alla cardioide.

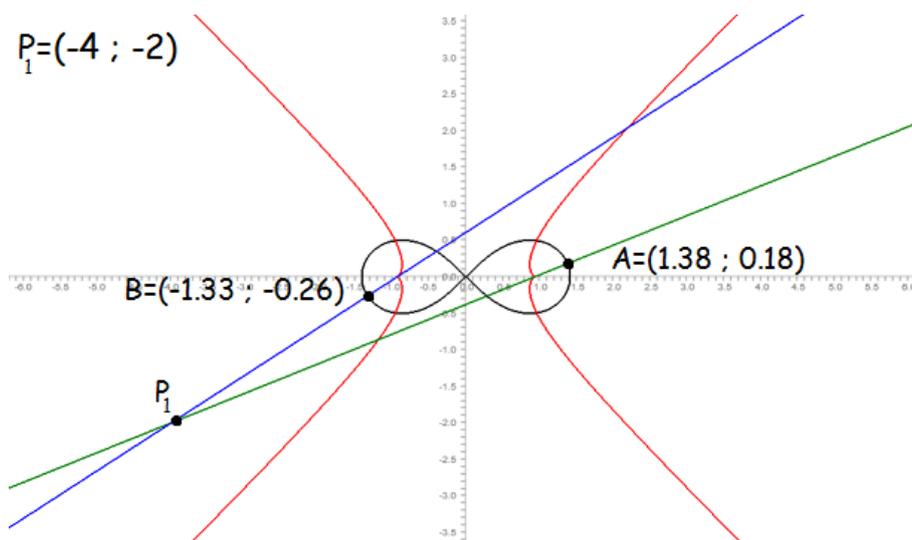
Lemniscata



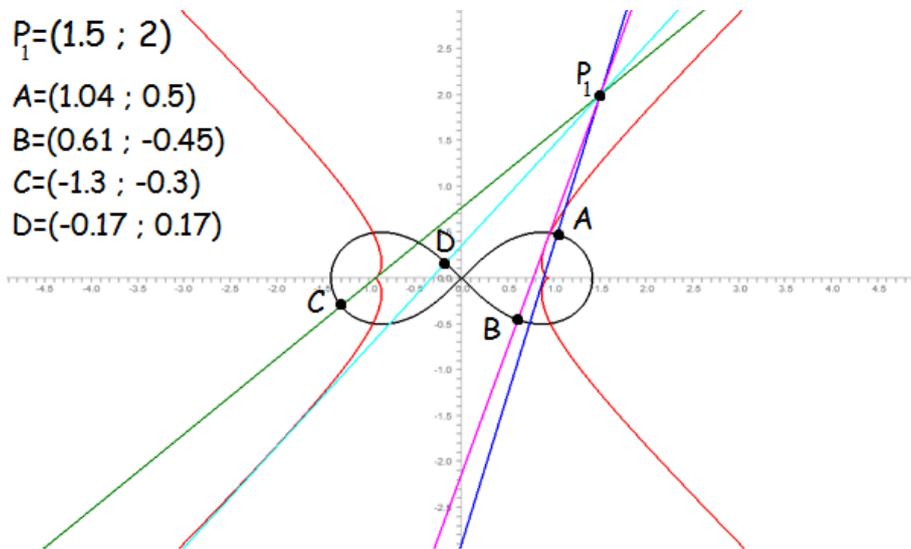
L'EDegree della Lemniscata di equazione $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ è 6.

La sua evoluta ha equazione

$$729x^6 + 729x^4y^2 - 729x^2y^4 - 729y^6 - 1944x^4 + 1944x^2y^2 - 1944y^4 + 1728x^2 - 1728y^2 - 512.$$

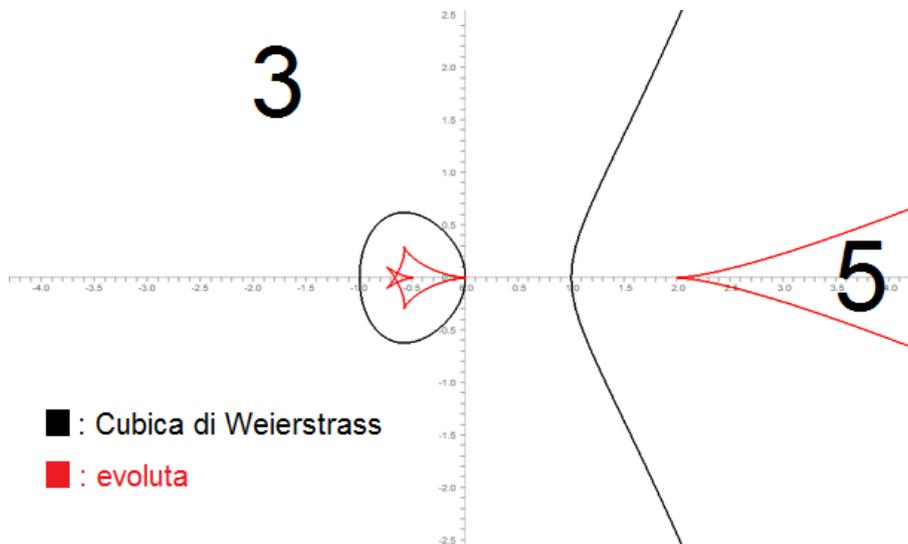


Dal punto $P_1 = (-4; -2)$ si possono disegnare 2 rette normali alla lemniscata.



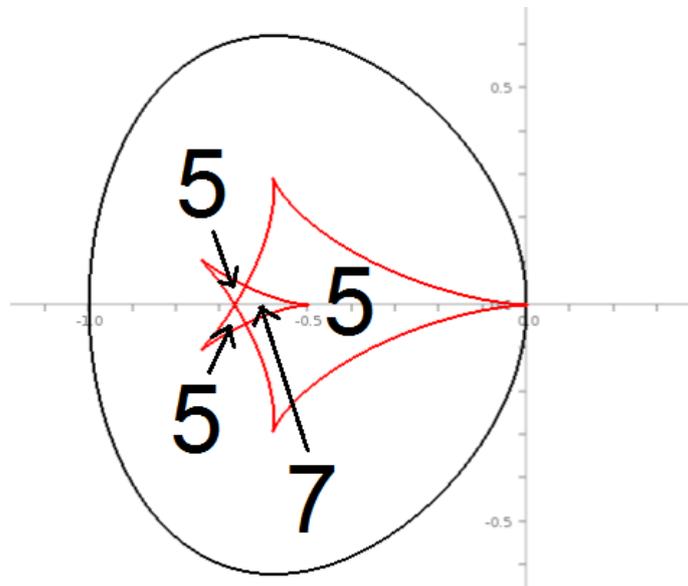
Dal punto $P_1 = (\frac{3}{2}; 2)$ si possono disegnare 4 rette normali alla lemniscata.

Cubica in forma di Weierstrass



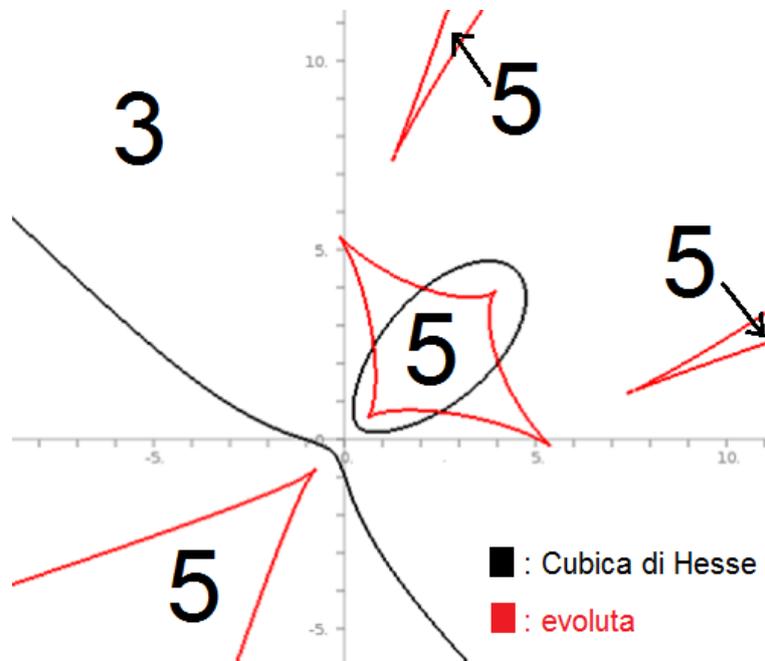
L'EDdegree della Cubica di Weierstrass di equazione $y^2 - x(x^2 - 1) = 0$ è 7.

L'evoluta ha grado 12: $18432x^{11} - 58368x^{10} + 15552x^9y^2 - 33280x^9 + 6561x^8y^4 - 519840x^8y^2 + 158976x^8 - 384264x^7y^4 - 1250496x^7y^2 + 99840x^7 - 2980260x^6y^4 + 511680x^6y^2 - 129024x^6 - 437400x^5y^6 - 6009480x^5y^4 + 1764288x^5y^2 - 159744x^5 - 118098x^4y^8 - 2976912x^4y^6 - 5052762x^4y^4 - 210336x^4y^2 - 61440x^4 - 970056x^3y^8 - 4842288x^3y^6 - 205464x^3y^4 - 1891008x^3y^2 - 8192x^3 - 3603852x^2y^8 - 2773440x^2y^6 - 773604x^2y^4 - 1433472x^2y^2 - 892296xy^{10} - 129816xy^8 - 2527800xy^6 - 2293080xy^4 - 463104xy^2 - 177147y^{12} - 322704y^{10} - 1100034y^8 - 718544y^6 - 860031y^4 - 55296y^2.$



Ingrandendo possiamo notare come questa componente dell'evoluta sia composta da quattro "riccioli", in ciascuno dei quali il numero di normali reali è costante ed è uguale a 5 o 7.

Cubica in forma di Hesse



L'EDdegree della Cubica in forma di Hesse di equazione $x^3 + y^3 - 9xy + 1$ è 9.

L'evoluta è di grado 18.

A Appendice

Riportiamo in Appendice i codici che, implementati con il software *Macaulay2*, sono serviti per costruire gli esempi racchiusi all'interno della *Galleria di Immagini*. Si tratta essenzialmente di due script: uno per la determinazione dell'evoluta di una curva algebrica piana e uno per il calcolo dei punti critici reali della funzione *distanza al quadrato* di un punto dalla curva. Poiché non tutte le curve trattate sono lisce, in un secondo momento offriremo anche una versione opportunamente modificata per tenere conto delle singolarità.

Evoluta di una curva liscia

```
KK=QQ
S=KK[s,t,x,y,MonomialOrder=>Lex]
p=s^2-4*t^2-4      -- Iperbole
p=s*t-1           -- Iperbole equilatera
p=t^2-s*(s^2-1)   -- Cubica di Weierstrass
p=s^3+t^3-9*s*t+1 -- Cubica di Hesse

g=(x-s)*(-diff(t,p))+(y-t)*(diff(s,p))
h=diff(t,p)*diff(s,g)-diff(s,p)*diff(t,g)
eliminate({s,t}, ideal(p,g,h))
toString oo
```

Evoluta di una curva con punti singolari

```
KK=QQ
S=KK[s,t,x,y]
p=s^2-t^3          --Cuspide
p=(s^2+t^2-2*s)^2-4*(s^2+t^2) --Cardioide
p=s^3+t^3-3*s*t   --Folium
p=(s^2+t^2)^2-2*(s^2-t^2) --Lemniscata

g=(x-s)*(-diff(t,p))+(y-t)*diff(s,p)
h=diff(t,p)*diff(s,g)-diff(s,p)*diff(t,g)
sing=ideal(p,diff(s,p),diff(t,p))
toString (gens eliminate({s,t}, saturate(ideal(p,g,h),sing)))(0,0)
```

Il comando **saturate(I,J)** permette di saturare l'ideale *ideal* (p,g,h) rispetto all'ideale *sing* costituito dai punti singolari della curva $p(s,t)$ ossia, detto in modo non rigoroso, di togliere dalla varietà definita dall'ideale quei punti (appartenenti alla curva p e che annullano il gradiente) in cui non esisterebbe la retta normale.

EDdegree di curve lisce e localizzazione delle soluzioni

```
R=QQ[x,y]
p=x^2-4*y^2-4      -- Iperbole
p=x*y-1           -- Iperbole equilatera
p=y^2-x*(x^2-1)   -- Cubica di Weierstrass
p=x^3+y^3-9*x*y+1 -- Cubica di Hesse

s=random QQ
t=random QQ
g=(s-x)*(diff(y,p))-(t-y)*(diff(x,p))
I=ideal(p,g)
bb=sub(basis (R/I),R)
d=numcols basis(R/I)

compx=sub(contract(transpose bb,(bb_(0,0))*x%I),{x=>0_QQ,y=>0_QQ})
for i from 1 to (numcols bb -1) do
compx=compx|sub(contract(transpose bb,(bb_(0,i))*x%I),{x=>0_QQ,y=>0_QQ})
compx

compy=sub(contract(transpose bb,(bb_(0,0))*y%I),{x=>0_QQ,y=>0_QQ})
for i from 1 to (numcols bb-1) do
compy=compy|sub(contract(transpose bb,(bb_(0,i))*y%I),{x=>0_QQ,y=>0_QQ})
compy

b=mutableMatrix(R,d,d)
for i from 0 to d-1 do for j from 0 to d-1 do
b_(i,j)=trace(compx^((matrix exponents(bb_(0,i)*bb_(0,j)))_(0,0))*
compy^((matrix exponents(bb_(0,i)*bb_(0,j)))_(0,1)))
Bez=matrix b

r=rank Bez
pc=det(Bez-x*id_(R^{d:0}))

eig0 = ((eigenvectors transpose compx)_1)_0
((eig0_0)^-1)*eig0

eig1 = ((eigenvectors transpose compx)_1)_1
((eig1_0)^-1)*eig1

eig2 = ((eigenvectors transpose compx)_1)_2
((eig2_0)^-1)*eig2

eig3 = ((eigenvectors transpose compx)_1)_3
((eig3_0)^-1)*eig3

eig4 = ((eigenvectors transpose compx)_1)_4
((eig4_0)^-1)*eig4

eig5 = ((eigenvectors transpose compx)_1)_5
((eig5_0)^-1)*eig5
```

```
eig6 = ((eigenvectors transpose compx)_1)_6
((eig6_0)^-1)*eig6
```

```
eig7 = ((eigenvectors transpose compx)_1)_7
((eig7_0)^-1)*eig7
```

```
eig8 = ((eigenvectors transpose compx)_1)_8
((eig8_0)^-1)*eig8
```

Dato l'ideale I , abbiamo costruito le due matrici compagne M_x e M_y utilizzate al passo successivo per determinare la Bezoutiante, ossia la matrice associata alla forma traccia di Killing. I comandi relativi alle assegnazioni $eig0, \dots, eig8$ permettono di ricavare le coordinate (approssimate) delle soluzioni. L'idea è quella di normalizzare ciascun autovettore della matrice compagna trasposta M_x^t , ossia rendere uguale a 1 il primo elemento; in tal modo si ottengono i monomi della base valutati nelle radici. Per ciascun autovettore si avrà che una delle sue coordinate corrisponderà all'ascissa della soluzione cercata e un'altra all'ordinata.

Nel caso si abbia a che fare con curve che presentano punti singolari è sufficiente modificare solo la prima parte di codice, lasciando inalterata la restante:

```
S=QQ[s,t,x,y]
p=x^2-y^3 -- Cuspide
p=(x^2+y^2-2*x)^2-4*(x^2+y^2) -- Cardioide
p=x^3+y^3-3*x*y -- Folium
p=(x^2+y^2)^2-2*(x^2-y^2) -- Lemniscata

g=(s-x)*(diff(y,p))-(t-y)*(diff(x,p))
sing=ideal(p,diff(x,p),diff(y,p))
h0=sub((gens saturate(ideal(p,g),sing)),{s=>random QQ,t=>random QQ})

R=QQ[x,y]
I=ideal sub(h0,R)
bb=sub(basis(R/I),R)
d=numcols bb
...
```

Riferimenti bibliografici

- [1] D.Cox, J.Little, D.O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*. Springer, New York, 2007
- [2] D.Cox, J.Little, D.O'Shea, *Using Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 185, Springer, New York, 1998.
- [3] J.McCleary, *Geometry from a Differentiable Viewpoint*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994
- [4] G.Ottaviani, *Soluzioni di equazioni polinomiali zero dimensional*. Note reperibili online, versione 27.5.2014
- [5] E.Sernesi, *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, Torino, 1994.
- [6] J.Draisma, E.Horobeț, G. Ottaviani, B.Sturmfels, R.Thomas, *The Euclidean Distance Degree of an Algebraic Variety*. Foundations of Computational Mathematics, 16 (2016), no. 1, pagine 99 – 149.
- [7] R.R.Thomas, *Euclidean Distance Degree*. SIAM NEWS, October, 2014