UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI FIRENZE
FACOLTÁ DI SCIENZE M.F.N

Anno accademico 2006/2007

Tesina per la laurea triennale in Matematica

di Nadia Ricchetti

Frazioni continue e sezione aurea

relatore: Prof. Giorgio Ottaviani

Introduzione

Nel lavoro svolto abbiamo riportato le nozioni di base delle frazioni continue al fine di occuparci dell'approssimazione dei numeri irrazionali. In particolare abbiamo messo in luce che l'irrazionale peggio approssimabile è il numero aureo, ma che trova la sua migliore approssimazione proprio mediante lo sviluppo in frazione continua, grazie al risultato di Hurwitz del quale si trova una dimostrazione nella quarta sezione.

1 Sviluppo in frazione continua di un numero reale

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Determiniamo un algoritmo per sviluppare α in frazione continua. Ponendo $\alpha = a'_1$, definiamo $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$, la parte intera di α. Perciò si ha che

$$\alpha = a_1 + r_1 \ .$$

Se $r_1 \neq 0$, allora il resto r_1 è compreso fra 0 e 1 (esclusi), cioè sarà del tipo $r_1 = \frac{1}{a'_2}$, con $a'_2 > 1$; quindi, definendo $a_2 = \lfloor a'_2 \rfloor$, possiamo scrivere

$$a'_2 = a_2 + r_2 \ .$$

In generale se $r_{i-1} \neq 0$, allora $r_i = \frac{1}{a'_i}$, con $a'_i > 1$; ponendo dunque $a_i = \lfloor a'_i \rfloor$, per $r_i = a'_i - a_i \neq 0$ prenderemo $a'_{i+1} = \frac{1}{a'_i - a_i}$, in modo da scrivere a'_i nella forma

$$a'_i = a_i + \frac{1}{a'_{i+1}} \ .$$

Quindi lo sviluppo di α in frazione continua sarà:

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

che denotiamo anche

$$\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots] = \left[a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, a'_{i+1}\right] , \tag{1}$$

dove gli a_i sono detti **quozienti parziali** e $a'_{i+1} = [a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots]$ è detto **quoziente completo** dello sviluppo di α.

Osservazione 1. *Per ogni $i > 1$ si ha che $a_i \geq 1$ e $\forall i > 0$, $a'_i > a_i$.*

Osservazione 2. *I passi per sviluppare α in frazione continua sono gli stessi di quelli dell'algoritmo euclideo (in particolare lo sviluppo in frazione continua del numero $\frac{m}{n}$ ripercorre esattamente i passi dell'algoritmo euclideo per trovare il MCD(m,n) e i quozienti successivi sono proprio i termini a_i della frazione continua).*

Infatti, possiamo pensare α come

$$\alpha = a_1 \cdot 1 + r_1 \ , \qquad 0 \le r_1 < 1 \ ,$$

dove $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$ è il quoziente della divisione con resto, 1 è il divisore e $r_1 = \frac{1}{a'_2}$ è il resto ($\notin \mathbb{N}$). Al secondo passo dell'algoritmo troviamo

$$1 = a_2 \cdot r_1 + r_2 \ , \qquad 0 \le r_2 < r_1 \ ,$$

dove $a_2 = \left\lfloor a'_2 \right\rfloor$ è il quoziente della divisione con resto, r_1 è il divisore e $r_2 = \frac{1}{a'_3}$ è il resto. E così via [1].

Osservazione 3. *Lo sviluppo in frazione continua sarà finito nel caso in cui α sia razionale, infinito se α è irrazionale.*

Per l'Osservazione 2, infatti, se $\alpha \in \mathbb{Q}$, allora prima o poi troveremo un resto pari a zero; invece, nel caso in cui $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, non troveremo mai un resto che sia zero e quindi l'algoritmo proseguirà indefinitamente.

2 Ridotte di una frazione continua e proprietà

Definizione 1. *Sia $\left[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, a'_{i+1}\right]$ lo sviluppo di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si definisce **ridotta** o **convergente** i-sima ad α la frazione*

$$c_i = \frac{p_i}{q_i} = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i] \ , \qquad \forall i \ge 1. \tag{2}$$

Teorema 1. *I numeratori p_i e i denominatori q_i delle ridotte c_i della frazione continua $\left[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, a'_{i+1}\right]$, soddisfano le uguaglianze*

$$p_i = a_i\, p_{i-1} + p_{i-2} \ , \qquad q_i = a_i\, q_{i-1} + q_{i-2} \qquad (\forall\ i \ge 1), \tag{3}$$

dove abbiamo posto come valori inziali

$$p_{-1} = 0 \ , \ \ p_0 = 1 \ , \ \ q_{-1} = 1 \ , \ \ q_0 = 0 \ .$$

Se p_i e q_i soddisfano la (3), allora $\forall i \ge 0$ vale

$$p_i\, q_{i-1} - p_{i-1}\, q_i = (-1)^i. \tag{4}$$

Inoltre numeratori e denominatori di ciascuna convergente sono ridotti ai minimi termini.

---

[1] A titolo di esempio eseguiamo l'algoritmo per il numero Φ:
$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \cdot 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\ 0 \le \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$; $1 = 1 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\ 0 \le \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$;
$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \left(\sqrt{5}-2\right)$, $\ 0 \le \sqrt{5} - 2 < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\ldots$
Otteniamo lo sviluppo $\Phi = [1, 1, 1, 1, \ldots] = [\bar{1}]$.

Dimostrazione. Accenniamo la dimostrazione della (3) per induzione sull'indice della ridotta (2). Supponiamo che la tesi si verifichi per i primi i=n passi e dimostriamo che essa si verifica anche per i=n+1.
Osserviamo che $[a_1, a_2 \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] = \left[a_1, a_2 \ldots, a_{n-1}, \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]$, quindi si ha che

$$c_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{(a_n\, a_{n+1} + 1)\, p_{n-1} + a_{n+1}\, p_{n-2}}{(a_n\, a_{n+1} + 1)\, q_{n-1} + a_{n+1}\, q_{n-2}} =$$

$$= \frac{a_{n+1}\,(a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}\,(a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1}\, p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}\, q_n + q_{n-1}} \; .$$

Sempre per induzione sull'indice i si dimostra la validità della (4); da ciò consegue che i numeratori e i denominatori di ogni convergente sono ridotti ai minimi termini, in quanto gli unici divisori comuni fra p_i e q_i sono ± 1. $\square$

Osservazione 4. *Possiamo scrivere α anche con la seguente notazione, che segue per induzione usando il Teorema 1:*

$$\alpha = \frac{a'_{i+1}\, p_i + p_{i-1}}{a'_{i+1}\, q_i + q_{i-1}} \; . \tag{5}$$

Corollario 1. *Sia $\frac{p_i}{q_i}$ la ridotta i-sima di α reale. Allora $\forall\, i \geq 1$*

$$p_i = q_i\, \alpha + \frac{\delta}{q_i} \; , \qquad |\delta| < 1. \tag{6}$$

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ con sviluppo (1). Allora, per la (4) e la (5), abbiamo

$$\alpha - \frac{p_i}{q_i} = \frac{(-1)^{i+1}}{q'_{i+1}\, q_i} \; , \quad \text{con} \quad q'_{i+1} = a'_{i+1}\, q_i + q_{i-1}. \tag{7}$$

Poiché $q'_{i+1} > q_{i+1}$, facendo alcuni passaggi algebrici, otteniamo

$$p_i = q_i\, \alpha + \frac{(-1)^i}{q'_{i+1}} = q_i\, \alpha + \frac{(-1)^i\, \delta_i}{q_{i+1}} \quad , \tag{8}$$

con $0 < \delta_i = \frac{q_{i+1}}{q'_{i+1}} < 1$. Giungiamo alla tesi moltiplicando e dividendo l'ultimo membro della (8) per q_i e ponendo $\delta = (-1)^i\, \delta_i\, \frac{q_i}{q_{i+1}}$. $\square$

Con i risultati che seguono cominciamo ad occuparci della stima dei numeri irrazionali usando lo sviluppo in frazioni continue.

Corollario 2. *Se $\alpha = \left[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, a'_{i+1}\right]$ e se $\frac{p_i}{q_i}$ è l'i-sima ridotta, allora*

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{a_{i+1}\, {q_i}^2} \quad , \qquad \forall i \geq 1 \; .$$

In particolare la successione $\frac{p_i}{q_i}$ converge ad α.

Dimostrazione. Per il Teorema 1 e per la (5), si ha che

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| = \frac{1}{q_i\left(a'_{i+1}\, q_i + q_{i-1}\right)} < \frac{1}{a'_{i+1}\, {q_i}^2} < \frac{1}{a_{i+1}\, {q_i}^2}\ .$$

$\square$

Potremmo chiederci, allora, quale sia il numero irrazionale α peggio approssimabile tramite frazioni continue.

Teorema 2. *Sia α irrazionale e siano $\frac{p_i}{q_i}$ e $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ due sue ridotte consecutive. Allora $\forall\, i \geq 2$ vale la relazione*

$$\frac{1}{2\, {q_{i+1}}^2} < \left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{{q_i}^2}\,. \tag{9}$$

Dimostrazione. Il lato destro della (9) si ottiene agevolmente dal Corollario 2, tenendo presente l'Osservazione 1. Per quanto riguarda il sinistro, per la (7), abbiamo che

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| = \frac{1}{q_i\, q'_{i+1}}$$

e, poiché $q_i\, q'_{i+1} < q_i\,(q_{i+1} + q_i) < {q_{i+1}}^2 + {q_i}^2 < 2\,{q_{i+1}}^2$, si ottiene la tesi. $\square$

Ma allora, intuitivamente (confronta anche [5]), il numero peggio approssimabile dai razionali è quello per cui la successione $\left\{\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right\}$ tende a zero più lentamente, ovvero, grazie alla (9), quello per cui la successione $\left\{\frac{1}{q_i}\right\}$ tende a zero più lentamente, cioè $\{q_i\}$ diverge più lentamente. Per la (3) e ricordando la successione per ricorrenza di Fibonacci

$$F_1 = 1 = F_2$$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}\,, \qquad \forall\, i > 2\,, \tag{10}$$

possiamo affermare che, per ogni i, $q_i \geq F_i$. Perciò $q_i \longrightarrow \infty$ per $i \to \infty$ e il numero per cui la successione cresce più lentamente è quello per cui $q_i = F_i$ per ogni i. Ma questo accade se e solo se $a_i = 1$ per ogni i, ovvero se e solo se $\alpha = \Phi = [1, 1, 1, 1, \ldots]$. Poiché ciò che in realtà ci interessa è il comportamento asintotico della successione q_i, possiamo affermare che, invece di un solo numero, esiste una classe di numeri irrazionali che sono i peggiori approssimabili mediante l'algoritmo visto, quella per cui $\forall\, i > \bar{n}$, con $\bar{n} \in \mathbb{N}$, si ha che $a_i = 1$, cioè tutti quelli che da $\bar{n}$ in poi si comportano come Φ.

3 Numeri Equivalenti

Formalizziamo le conclusioni del paragrafo precedente.

Definizione 2. *Due numeri α e β si dicono* ***equivalenti*** *($\alpha \equiv \beta$) se $\exists$ a,b,c,d $\in \mathbb{Z}$ tali che*

$$\alpha = \frac{a\,\beta + b}{c\,\beta + d}\ , \quad \textit{con} \quad a\,d - b\,c = \pm 1.$$

Oppure scriviamo la stessa definizione con la notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \ \ det\mathbf{A} = \pm 1\,. \tag{11}$$

Vediamo innanzitutto alcune proprietà.

Proposizione 1. *$\equiv$ è una relazione d'equivalenza.*

Proposizione 2. *Se $\alpha = \left[a_1, a_2, \ldots, a_i, a'_{i+1}\right]$, allora $\alpha \equiv a'_{i+1}$.*

Proposizione 3. *Siano $\alpha = \left[a_1, a_2, \ldots, a_i, a'_{i+1}\right]$ e $\beta = \left[b_1, b_2, \ldots, b_j, b'_{j+1}\right]$, con $a'_{i+1} = [a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots]$ e $b'_{j+1} = [b_{j+1}, b_{j+2}, \ldots]$.*
Se $a'_{i+1} = b'_{j+1}$, allora $\alpha \equiv \beta$.

Dimostrazione. La Proposizione 1 si dimostra facilmente dalla (11). La Proposizione 2, invece, segue direttamente dalle (4), (5); mentre la 3 segue immediatamente dalle prime due. □

Teorema 3. *Siano x un numero reale equivalente a $\zeta > 1$ e P, Q, R, $S \in \mathbb{Z}$ tali che $Q > S > 0$ e tali che*

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \zeta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\,\zeta + R \\ Q\,\zeta + S \end{pmatrix} \ , \ \textit{con} \quad det\,\mathbf{B} = \pm 1.$$

Allora $\frac{R}{S}$ e $\frac{P}{Q}$ sono due convergenti consecutive alla frazione continua il cui valore è x. Inoltre, se esse sono rispettivamente l'(i-1)-sima e l'i-sima convergente, allora ζ è l'(i+1)-simo quoziente completo.

Dimostrazione. Sintetizziamo i passi della dimostrazione (vedi anche [3]). Possiamo scrivere (vedi l'Osservazione 3) l'espressione $\frac{P}{Q} = [a_1, a_2, \ldots, a_i] = \frac{p_i}{q_i}$, scegliendo[2] i in modo che $P\,S - Q\,R = (-1)^i$.

[2]É possibile effettuare tale scelta per un risultato che non analizziamo in questa sede: 'Se y è un razionale rappresentabile tramite frazione continua con un numero dispari di convergenti, allora è rappresentabile anche con un numero pari (e viceversa).'
Per una dimostrazione confronta [3].

Ma allora vale anche $(P,Q)=1$ e, poiché $Q>0$ per ipotesi, si ha immediatamente che $P=p_i,\ \ Q=q_i$ e che

$$p_i\,S-q_i\,R=(-1)^i=p_i\,q_{i-1}-p_{i-1}\,q_i \quad\Leftrightarrow\quad p_i\,(S-q_{i-1})=q_i\,(R-p_{i-1})\,.$$

Quindi, poiché $(p_i,q_i)=1$, ricaviamo che $q_i\big|\,(S-q_{i-1})$. Ma allo stesso tempo vale anche $|S-q_{i-1}|<q_i$; perciò si ha che $S=q_{i-1},\ R=p_{i-1}$ e $x=\frac{p_i\,\zeta+p_{i-1}}{q_i\,\zeta+q_{i-1}}$ proprio come nella (5). Segue la tesi. □

Inoltre vale la caratterizzazione seguente:

Teorema 4. *Due numeri α e β sono equivalenti se e solo se* $\alpha=[a_1,a_2,\ldots,a_n,g_1,g_2,\ldots]$ *e* $\beta=[b_1,b_2,\ldots,b_m,g_1,g_2,\ldots]$, *cioè se i quozienti di α dopo l'n-simo coincidono con quelli di β dopo l'm-simo.*

Dimostrazione. Se definiamo $\omega=[g_1,g_2,g_3,\ldots]$, proviamo la condizione sufficiente semplicemente utilizzando le tre proprietà appena dimostrate.
Viceversa, se $\alpha\equiv\beta$, vale la (11). A meno di sostituire i coefficienti con i loro opposti, supponiamo

$$c\,\alpha+d>0\,. \tag{12}$$

Sviluppando α con l'algoritmo di frazione continua, otteniamo la (5), che in forma matriciale diviene

$$\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_i & p_{i-1}\\ q_i & q_{i-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'_{i+1}\\1\end{pmatrix}.$$

Per le Proposizioni 1 e 2, quindi, $\beta\equiv a'_{i+1}$, ovvero

$$\begin{pmatrix}\beta\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_i & p_{i-1}\\ q_i & q_{i-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'_{i+1}\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a\,p_i+b\,q_i & a\,p_{i-1}+b\,q_{i-1}\\ c\,p_i+d\,q_i & c\,p_{i-1}+d\,q_{i-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'_{i+1}\\1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}P & R\\ Q & S\end{pmatrix}}_{\mathbf{B}}\begin{pmatrix}a'_{i+1}\\1\end{pmatrix},$$

con $det\,\mathbf{B}=\pm1$. Ci resta da provare che se $\beta=[b_1,b_2,\ldots,b_k,\zeta]$, allora $\zeta=a'_{i+1}$. Per il Corollario 1, abbiamo che

$$p_i=\alpha\,q_i+\frac{\delta}{q_i}\quad,\quad p_{i-1}=\alpha\,q_{i-1}+\frac{\delta'}{q_{i-1}}\quad,\qquad \text{dove } |\delta|<1\ ,\ \left|\delta'\right|<1\,.$$

Da cui:

$$Q=q_i\,(c\,\alpha+d)+\frac{c\,\delta}{q_i}\quad\text{e}\quad S=q_{i-1}\,(c\,\alpha+d)+\frac{c\,\delta'}{q_{i-1}}\,.$$

Ora, per valori di i sufficientemente grandi, sfruttando la (12), $Q > S > 0$. Per tali i, quindi

$$\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da cui, per il Teorema 3 segue che $\frac{P}{Q}$ e $\frac{R}{S}$ sono rispettivamente la k-sima e la(k-1)-sima convergente alla frazione continua il cui valore è β, mentre ζ è il suo (k+1)-simo quoziente completo. Segue la tesi. $\square$

4 Approssimazioni di irrazionali tramite frazioni continue: il teorema di Hurwitz

Problema: dato α irrazionale, qual'è la stima migliore per una sua approssimazione tramite frazioni continue? Risponderemo dimostrando il teorema di Hurwitz e verificando che la stima data da questo teorema è l'unica in grado di approssimare un generico α.

Stimiamo innanzitutto la differenza $\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right|$. Per la (5), si ha

$$\frac{a'_{i+1}p_i + p_{i-1}}{a'_{i+1}q_i + q_{i-1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{(-1)^{i+1}}{q_i^2\left(a'_{i+1} + b_{i+1}\right)} \ ,$$

dove abbiamo utilizzato la (4) e abbiamo posto

$$b_{i+1} := \frac{q_{i-1}}{q_i} \ . \tag{13}$$

(Notiamo che dalla (13), segue $0 < b_{i+1} < 1$.) Passando al modulo, allora, otteniamo

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| = \frac{1}{{q_i}^2\left(a'_{i+1} + b_{i+1}\right)} \ . \tag{14}$$

Definiamo $\lambda_{i+1} := a'_{i+1} + b_{i+1}$. Ci interessa trovare il λ_i migliore in relazione alla classe di equivalenza di α.

Consideriamo innanzitutto i numeri

$$\xi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0, 1, 1, 1, \ldots] = [0, \bar{1}] \tag{15}$$

e

$$\theta = 1 + \sqrt{2} = [2, 2, 2, \ldots] = [\bar{2}] \ . \tag{16}$$

Le due Osservazioni seguenti ci danno la possibilità di formulare un'ipotesi per la stima che cerchiamo.

Con la notazione $a_n \sim b_n$ intenderemo che $\{\frac{a_n}{b_n}\} \longrightarrow 1$.

Osservazione 5. $\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \sim \frac{1}{\sqrt{5}\,{q_i}^2}$ *, per ogni* α *equivalente a* ξ.

Infatti per la (14)

$$\left|\xi - \frac{p_i}{q_i}\right| = \frac{1}{{q_i}^2}\frac{1}{a'_{i+1}+b_{i+1}} \sim \frac{1}{{q_i}^2}\,(1+2\,\xi)^{-1} = \frac{1}{{q_i}^2\sqrt{5}}\,,$$

perché $a'_{i+1} = 1+\xi$, mentre, per i sufficientemente grande,[3] $b_{i+1} = \frac{q_{i-1}}{q_i} \sim \xi$.

Osservazione 6. $\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \sim \frac{1}{2\sqrt{2}\,{q_i}^2}$, *per ogni* α *equivalente a* $\theta = 1+\sqrt{2}$.

Infatti per la (14)

$$\left|\theta - \frac{p_i}{q_i}\right| = \frac{1}{{q_i}^2}\frac{1}{a'_{i+1}+b_{i+1}} \sim \frac{1}{{q_i}^2}\,(2\,\theta-2)^{-1} = \frac{1}{{q_i}^2\sqrt{8}}\,,$$

perché $a'_{i+1} = \theta$, mentre, per i sufficientemente grande, $b_{i+1} = \frac{q_{i-1}}{q_i} \sim (\theta-2)$.

Teorema 5. *Di ogni tre convergenti consecutive ad un irrazionale* α*, almeno una soddisfa la disuguaglianza*

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,{q_i}^2} \qquad , \qquad \forall\, i \geq 2\ .$$

Dimostrazione. Per l'Osservazione 5, ci interessa dimostrare che date c_{n-1}, c_n, c_{n+1} tre convergenti consecutive ad α, per almeno uno fra i=n-1,n,n+1 si ha che $\frac{1}{a'_i+b_i} < \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Perciò supponiamo che valgano entrambe le disuguaglianze

$$a'_{n-1}+b_{n-1} \leq \sqrt{5} \quad , \quad a'_n + b_n \leq \sqrt{5}\ . \tag{17}$$

Dimostriamo che si dovrà avere necessariamente $a'_{n+1}+b_{n+1} > \sqrt{5}$.
Esprimendo a'_{n-1} nella forma

$$a'_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{a'_n} \tag{18}$$

e per la (13), otteniamo

$$\frac{1}{a'_n} = a'_{n-1} - a_{n-1}$$

$$\frac{1}{b_n} = a_{n-1} + b_{n-1}$$

che, sommate membro a membro, danno

$$\frac{1}{a'_n} + \frac{1}{b_n} = a'_{n-1} + b_{n-1} \leq \sqrt{5}\ . \tag{19}$$

[3] Si dimostra per induzione, utilizzando il Teorema 1, che 'se $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, \ldots]$, allora $\frac{q_{i-1}}{q_i} = [0, a_i, a_{i-1}, \ldots, a_2]$'.

Dalle relazioni (17) e (19) vediamo che

$$1 = a'_n \cdot \frac{1}{a'_n} \leq \left(\sqrt{5} - b_n\right) \cdot \left(\sqrt{5} - \frac{1}{b_n}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_n + \frac{1}{b_n} \leq \sqrt{5}\ .$$

Ma, poichè $b_n \in \mathbb{Q}$, nell'ultima disuguaglianza non può valere l'uguale. Perciò abbiamo

$$b_n^2 - \sqrt{5}\, b_n + 1 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - b_n\right)^2 < \frac{1}{4}\ .$$

Da cui concludiamo che

$$b_n > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\ .$$

Supponiamo ora per assurdo che valga anche $a'_{n+1} + b_{n+1} \leq \sqrt{5}$. Facendo passaggi analoghi ai precedenti, otteniamo che

$$b_{n+1} > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

e, di conseguenza, per la (18), si ha

$$a_n = \frac{1}{b_{n+1}} - b_n < \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1\ .$$

Contraddizione, in quanto $a_n \geq 1$ per $n \geq 2$ (vedi Osservazione 1).
Segue la tesi. □

Arriviamo perciò all'importante risultato dimostrato per la prima volta da Hurwitz nel 1891:

Teorema 6. *Ogni irrazionale α ha una infinità di approssimazioni razionali $\frac{p}{q}$ che soddisfano*

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2} \tag{20}$$

Dimostrazione. Poiché $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, allora ha uno sviluppo infinito in frazione continua (Osservazione 3) e il Teorema 5 garantisce perciò che ci siano infinite convergenti che soddisfano la disuguaglianza (20). □

Analogamente:

Teorema 7. *Se α è diverso da $\xi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (o un suo equivalente), allora ammette infinite approssimazioni razionali $\frac{p}{q}$ che soddisfano la disuguaglianza*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2\sqrt{2}\, q^2}\ . \tag{21}$$

Dimostrazione. Al fine di dimostrare l'asserto, in modo analogo al Teorema 5, proviamo che di ogni tre convergenti consecutive ad α non equivalente a ξ, almeno per una vale che la quantità $\lambda_i = a'_i + b_i > 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$.
Supponiamo che valgano

$$a'_{n-1} + b_{n-1} \leq \sqrt{8} \quad , \quad a'_n + b_n \leq \sqrt{8} \; . \tag{22}$$

Dimostriamo che si dovrà avere necessariamente $a'_{n+1} + b_{n+1} > \sqrt{8}$.
Come nella dimostrazione del teorema 5, ponendo

$$a'_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{a'_n} \; , \tag{23}$$

risulta

$$\frac{1}{a'_n} + \frac{1}{b_n} = a'_{n-1} + b_{n-1} \leq \sqrt{8} \, ; \tag{24}$$

dalle relazioni (22) e (24) vediamo che

$$1 = a'_n \cdot \frac{1}{a'_n} \leq \left(\sqrt{8} - b_n\right) \cdot \left(\sqrt{8} - \frac{1}{b_n}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_n + \frac{1}{b_n} \leq \sqrt{8} \; ,$$

e, poichè $b_n \in \mathbb{Q}$, abbiamo

$$b_n^2 - \sqrt{8}\, b_n + 1 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\sqrt{8} - b_n\right)^2 < 1 \; .$$

Da cui concludiamo che

$$b_n > \frac{\sqrt{8}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 \; .$$

Supponiamo ora per assurdo che valga anche $a'_n + b_n \leq \sqrt{8}$. Facendo passaggi analoghi ai precedenti, otteniamo che

$$b_{n+1} > \sqrt{2} - 1$$

e quindi si ha per le (23) e (24)

$$a_n = \frac{1}{b_{n+1}} - b_n < \left(\sqrt{2} + 1\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right) = 2 \; .$$

Contraddizione, perché per ipotesi α non è equivalente a ξ.
Quindi segue che $a'_{n+1} + b_{n+1} > \sqrt{8}$.
Ma allora, per α non equivalente a ξ, esistono infiniti $\frac{p}{q}$ per i quali vale la disuguaglianza (21). □

Vediamo adesso un risultato che fornisce il controesempio per la validità dei teoremi 6 e 7 appena dimostrati.

Teorema 8. *Se $k > \sqrt{5}$ e se $\alpha \equiv \xi$, allora esiste solo un numero finito di razionali $\frac{p}{q}$ tali che*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{k\,q^2}\ .$$

Dimostrazione. Per il Corollario 1,

$$\xi - \frac{p}{q} = \frac{\delta}{q^2}\ , \tag{25}$$

con $|\delta| < 1$. Supponiamo per assurdo che esistano infiniti $\frac{p}{q}$ che soddisfano la (25), dove prendiamo $|\delta| < \frac{1}{k} < \frac{1}{\sqrt{5}}$. Allora

$$\frac{\delta}{q} - \frac{\sqrt{5}}{2}\,q = -p - \frac{1}{2}\,q\ ,$$

ed elevando al quadrato entrambi i membri, si ha che

$$\frac{\delta^2}{q^2} - \sqrt{5}\,\delta = p^2 + p\,q - q^2. \tag{26}$$

Guardando i due membri della (26), ci accorgiamo che il secondo membro è un intero, mentre il primo è minore di 1, infatti

$$\left|\frac{\delta^2}{q^2} - \sqrt{5}\,\delta\right| = |\delta|\left|\frac{\delta}{q^2} - \sqrt{5}\right| < \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k\,q^2} + k\right) = \frac{1}{k^2\,q^2} + 1 \longrightarrow 1,$$

per $q \longrightarrow \infty$. Essendo giunti ad una contraddizione, segue la tesi. □

5 Numero aureo

Utilizzando lo sviluppo in frazione continua, calcoliamo la radice positiva dell'equazione

$$x^2 = x + 1\,,$$

ottenibile volendo dividere un segmento di lunghezza x nella sua proporzione estrema e media:

$$x = 1 + \frac{1}{x}\,, \qquad x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}\,, \qquad \ldots$$

Troviamo, così, lo sviluppo in frazione continua del numero aureo

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [1,1,1,\ldots] = [\bar{1}]\,. \tag{27}$$

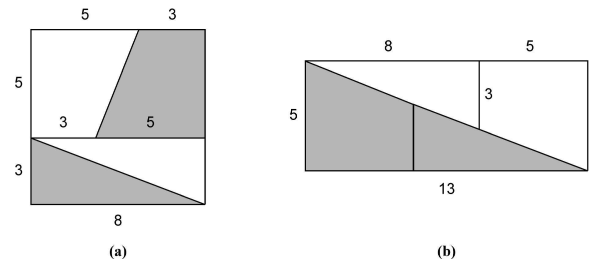

Figura 1: L'area del quadrato è $q_i^2 = 64$ (figura (a)), mentre quella del rettangolo (figura (b)) è $q_{i+1}q_{i-1} = 65$.

Le sue ridotte sono: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \ldots$.
Osserviamo che ogni convergente è il rapporto di due numeri di Fibonacci consecutivi e quindi $p_{i-1} = q_i, \quad \forall\, i > 1$. La (2) diventa così

$$c_i = \frac{q_i}{q_{i-1}} = a_i + \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}\,;$$

mentre la (4) sarà:

$$q_{i+1}\, q_{i-1} - q_i^2 = (-1)^i. \tag{28}$$

Osserviamo che la (28) risolve il paradosso geometrico (vedi figura 1).
I risultati esposti in questa tesina evidenziano che, grazie allo sviluppo in frazione continua, non solo abbiamo potuto vedere che il numero aureo è un irrazionale, ma che si tratta dell'irrazionale (o comunque appartiene alla classe di irrazionali) che si approssima peggio. Infatti, poiché i quozienti parziali di Φ sono $(\forall i)\;\; a_i = 1$, di conseguenza i Teoremi 6, 7 e 8 ci forniscono una prova rigorosa del fatto che non si riesce a stimare molto agevolmente tale numero in quanto, confrontando la (15) con la (27), ci accorgiamo che $\Phi = 1 + \xi$, ovvero i due numeri sono equivalenti.

Riferimenti bibliografici

[1] J.F.Koksma, *Diophantische Approximationen*, in *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer, Berlin 1936, pp.29 e seguenti.

[2] C.D. Olds, *Frazioni continue*, Zanichelli, Bologna 1968.

[3] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, Oxford 1979.

[4] M. Livio, *La sezione aurea*, Rizzoli, Milano 2003.

[5] M. Abate, *Il Girasole di Fibonacci*, testo della conferenza tenuta nel convegno *Matematica e Cultura*, il 25 marzo 2006, in Springer, 2006.

[6] N. Ricchetti, *La Sezione Aurea*, in *Il Paradosso*, Firenze 2006, pp. 4-7.