1 Introduzione

In questa tesi introduciamo il teorema di De Rham, ne vediamo una dimostrazione dettagliata ed esibiamo alcuni esempi.
Per una varietà differenziabile il teorema collega i gruppi delle forme lisce (invariante differenziale) con i gruppi della coomologia simpliciale (invariante topologico). Quindi l'ostruzione all'essere esatta per una forma chiusa è di natura puramente topologica.
Il teorema venne dimostrato in maniera rigorosa da Georges De Rham nel 1931, nonostante che già qualche anno prima Henri Poincaré e Élie Cartan fossero a conoscenza di questo risultato: il vero problema era che a quel tempo mancava loro una teoria della coomologia.
Successivamente esso è stato interpretato come una forma topologica del dualismo onda-corpuscolo della meccanica quantistica, ([1]).

2 Coomologia di De Rham

2.1 Forme differenziali

Sia X una varietà differenziabile di dimensione n; siano $\Lambda^k(X)$ lo spazio vettoriale delle $k-forme$ su X, con $0 \leq k \leq n$ e

$$d : \Lambda^k(X) \to \Lambda^{k+1}(X)$$

l'applicazione lineare *differenziazione esterna*.

Lemma 1. *Sia $\mu \in \Lambda^k(X)$ tale che $\mu = 0$ su un aperto V di X, allora $d\mu = 0$ su V.*

2.2 Gruppi di coomologia di De Rham

Definizione 1. *Sia $\omega \in \Lambda^k(X)$, ω si dice chiusa se $d\omega = 0$; ω si dice esatta se esiste $\tau \in \Lambda^{k-1}(X)$ tale che $d\tau = \omega$.*

Osservazione 1. Per la differenziazione esterna vale la proprietà $d^2 = 0$ da cui si ottiene che ogni $k-$forma esatta è chiusa.

Denotiamo:

$$Z^k(X,d) = \{\omega \in \Lambda^k(X) \ \mid \omega \text{ è } chiusa\}$$
$$B^k(X,d) = \{\omega \in \Lambda^k(X) \ \mid \omega \text{ è } esatta\}.$$

Si verifica facilmente che $Z^k(X,d)$ e $B^k(X,d)$ sono sottospazi vettoriali di $\Lambda^k(X)$ e dall'osservazione 1 segue che:

$$B^k(X,d) \subseteq Z^k(X,d).$$

Definizione 2. *Si dice $k-$esimo gruppo di coomologia di De Rham di X il quoziente:*

$$H^k(X,d) = \frac{Z^k(X,d)}{B^k(X,d)}.$$

Osservazione 2. Come conseguenza del teorema di De Rham otterremo che, se X è compatta, allora $H^k(X,d)$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e tale dimensione si chiama *$k-$esimo numero di Betti* di X.

Lemma di Poincaré. *Sia X un aperto stellato di $\mathbb{R}^n$. Allora, per ogni $k \geq 1$ $H^k(X,d) = 0$, cioè ogni $k-$forma chiusa è anche esatta.*

Definizione 3. *Siano X e Y due varietà differenziabili e sia $f : X \to Y$ un'applicazione differenziabile. f definisce un'applicazione indotta*

$$f^* : \Lambda^k(Y) \to \Lambda^k(X).$$

Osservazione 3. f^* è un'applicazione lineare che commuta con l'applicazione d, in particolare manda $k-$forme chiuse (esatte) su Y in $k-$forme chiuse (esatte) su X e induce un'applicazione lineare

$$\widetilde{f} : H^k(Y,d) \to H^k(X,d).$$

2.3 Esempi

1) $H^1(S^1,d) \cong \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poichè $\dim S^1 = 1$, si ha che $Z^1(S^1,d) = \Lambda^1\left(S^1\right)$; inoltre $B^1(S^1,d) = \left\{d\omega \;\middle|\; \omega \in \Lambda^0\left(S^1\right)\right\}$. Sia θ la coordinata polare su S^1 (è una coordinata locale), risulta che $\frac{\partial}{\partial\theta}$ è un campo di vettori non nullo su S^1 e $d\theta = (\frac{\partial}{\partial\theta})^*$ è una $1-$forma non nulla su S^1. Sia ora $\omega \in \Lambda^1\left(S^1\right)$, localmente $\omega = g(\theta)d\theta$; è facile verificare che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\omega - cd\theta \in B^1(S^1,d)$. Dunque $H^1(S^1,d) = \{c[d\theta] \mid c \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$.

2) Sia X una varietà differenziabile e siano X_1,.....,X_h le sue componenti connesse. Si verifica facilmente che $\dim H^0(X,d) = h$.

3 Omologia simpliciale

3.1 Complessi simpliciali

Definizione 1. *Siano $\{v_0, ..., v_k\}$ $k+1$ punti indipendenti nello spazio affine $\mathbb{A}^n$. Si dice $k-$simplesso (chiuso), e si indica con $[s] = [v_0, ..., v_k]$, l'inviluppo convesso di tali punti; l'intero k rappresenta la dimensione del simplesso.*

Osservazione 1. Risulta che:

$$v \in [s] \Leftrightarrow v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i, \text{ dove } a_i \geq 0 \text{ per ogni } i \in \{0, ..., k\} \text{ e } \sum_{i=0}^{k} a_i = 1;$$

inoltre tale espressione è unica e i coefficienti a_i che compaiono in essa prendono il nome di *coordinate baricentriche* di v.

Definizione 2. *Sia* $[s] = [v_0, ..., v_k]$ *un* $k-$*simplesso chiuso. Si dice* $k-$*simplesso (aperto), e si indica con* $(s) = (v_0, ..., v_k)$*, l'insieme*

$$\{v \in [s] \mid a_i(v) > 0, \text{ per ogni } i \in \{0, ..., k\}\}.$$

Definizione 3. *Sia* $[s] = [v_0, ..., v_k]$ *un* $k-$*simplesso chiuso. I punti* $v_0, ..., v_k$ *sono i vertici di* $[s]$*; inoltre, se* $\{j_0, ..., j_h\}$ *è un sottoinsieme non vuoto di* $\{0, ..., k\}$*, i simplessi chiusi* $[v_{j_0}, ..., v_{j_h}]$ *sono* $facce$ *chiuse di* $[s]$ *e i simplessi aperti* $(v_{j_0}, ..., v_{j_h})$ *sono* $facce$ *aperte di* $[s]$.

Definizione 4. *Un complesso simpliciale* K *è un insieme finito di simplessi aperti di* $\mathbb{R}^n$ *con le seguenti proprietà:*

K1) per ogni $(s) \in K$*, tutte le facce aperte di* $[s]$ *appartengono a* K*;*

K2) per ogni (s_1)*,* $(s_2) \in K$ *tali che* $(s_1) \cap (s_2) \neq \emptyset$ *vale* $(s_1) = (s_2)$.

Inoltre si dice dimensione di K *il massimo delle dimensioni dei simplessi che lo costituiscono.*

Denotiamo:

$$[K] = \underset{(s)\in K}{\cup} (s) = \underset{(s)\in K}{\cup} [s];$$

$[K]$ è uno spazio topologico compatto, poichè unione finita di compatti di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 5. *Siano* K *un complesso simpliciale e* $r \in \mathbb{N}$ *tale che* $r \leq \dim K$*. Si dice* $r-$*scheletro di* K*, e si indica con* K^r*, l'insieme*

$$\{(s) \in K \mid \dim(s) \leq r\}.$$

Definizione 6. *Siano* K *un complesso simpliciale e* v *un suo vertice. Si dice stella di* v *l'insieme*

$$St(v) = \underset{(s)\in K \ t.c. \ v\in[s]}{\cup} (s).$$

Osservazione 2. In base alla precedente definizione si ottiene che:

1) $St(v) \subseteq [K]$ è un aperto;

2) v è l'unico vertice di K in $St(v)$;

3) $\{St(v)\}_{v\in K}$ è un ricoprimento aperto di $[K]$.

3.2 Gruppi di omologia di complessi simpliciali

Sia s un $l-$simplesso di vertici $v_0, ..., v_l$; è ovvio che, se $l \geq 1$, tali vertici individuano due possibili *orientazioni* per s, cioè si ottengono i cosiddetti *simplessi orientati* $\langle v_0, v_1, ..., v_k\rangle$ e $\langle v_1, v_0 ....., v_k\rangle$.

Siano ora K un complesso simpliciale, $\mathcal{G}$ un gruppo abeliano e $l \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq l \leq \dim K$; diamo quindi la seguente:

Definizione 1. *Si dice gruppo delle $l-$catene di K con coefficienti in $\mathcal{G}$, e si indica con $C_l(K,\mathcal{G})$, il gruppo abeliano ottenuto quozientando il gruppo abeliano libero generato dagli $l-$simplessi orientati di K sul sottogruppo generato dagli elementi del tipo $\langle v_0, v_1, ..., v_k\rangle + \langle v_1, v_0 ....., v_k\rangle$. Dunque, se $\beta \in C_l(K,\mathcal{G})$,*

$$\beta = \sum_{l-simplesso\ s\ di\ K} g_s \langle s\rangle ,$$

con $g_s \in \mathcal{G}$, $\langle s\rangle$ $l-$simplesso orientato di K e dove poniamo:

$$-g_s \langle v_0, v_1, ..., v_k\rangle = g_s \langle v_1, v_0, ..., v_k\rangle .$$

Osservazione 1. Se $\mathcal{G} = \mathbb{R}$ o $\mathcal{G} = \mathbb{C}$, $C_l(K,\mathcal{G})$ è uno spazio vettoriale con dimensione pari al numero degli $l-$simplessi di K.

Definizione 2. *Sia $\langle s\rangle = \langle v_0, v_{1,}....., v_{l+1}\rangle$ un $(l+1)-$simplesso orientato. Si dice $frontiera$ di $\langle s\rangle$, e si indica con $\partial\langle s\rangle$, la $l-$catena così definita:*

$$\partial \langle s\rangle = \sum_{j=0}^{l+1} (-1)^j \langle v_0, ..., \widehat{v_j}, ..., v_{l+1}\rangle ,$$

dove con $\widehat{v_j}$ si intende che v_j è stato soppresso. Per completezza, se $\langle s\rangle = \langle v\rangle$, poniamo $\partial\langle s\rangle = 0$.

Definizione 3. *Si dice applicazione di $frontiera$ ∂ l'omomorfismo di gruppi*

$$\partial : C_{l+1}(K,\mathcal{G}) \to C_l(K,\mathcal{G})$$

così definito:

$$\partial \left(\sum_{(l+1)-simplesso\ s\ di\ K} g_s \langle s\rangle \right) = \sum_{(l+1)-simplesso\ s\ di\ K} g_s \partial \langle s\rangle .$$

Per completezza, se $c \in C_0(K,\mathcal{G})$, si pone $\partial c = 0$.

Lemma 1. *L'applicazione di frontiera soddisfa $\partial^2 = 0$.*

Definizione 4. *Sia $c \in C_l(K,\mathcal{G})$, c si dice ciclo se $\partial c = 0$; c si dice $frontiera$ (o bordo) se esiste $\widetilde{c} \in C_{l+1}(K,\mathcal{G})$ tale che $c = \partial\widetilde{c}$.*

Denotiamo:

$$Z_l(K,\mathcal{G}) = \{c \in C_l(K,\mathcal{G}) \mid c \text{ è un ciclo}\}$$

$$B_l(K,\mathcal{G}) = \{c \in C_l(K,\mathcal{G}) \mid c \text{ è un bordo}\}.$$

Osservazione 2. Dal lemma 1 segue che:

$$B_l(K,\mathcal{G}) \subseteq Z_l(K,\mathcal{G}).$$

Definizione 5. *Si dice $l-$esimo gruppo di omologia di K con coefficienti in $\mathcal{G}$ il quoziente:*

$$H_l(K,\mathcal{G}) = \frac{Z_l(K,\mathcal{G})}{B_l(K,\mathcal{G})}.$$

Osservazione 3. Dall'osservazione 1 segue che, se $\mathcal{G} = \mathbb{R}$ o $\mathcal{G} = \mathbb{C}$, allora $H_l(K,\mathcal{G})$ è uno spazio vettoriale.

Osservazione 4. Si potrebbe dimostrare che i gruppi $H_l(K,\mathcal{G})$ sono invarianti topologici, cioè se K ed L sono complessi simpliciali tali che $[K]$ ed $[L]$ sono omeomorfi, allora i corrispondenti gruppi di omologia sono isomorfi.

3.3 Esempi

1) Sia $K = \{(v_0),(v_1)\}$; allora: $H_0(K,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$.

2) Sia $K = \{(v_0),(v_1),(v_0,v_1)\}$; allora: $H_0(K,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ e $H_1(K,\mathbb{R}) = 0$.

3) Sia K l'$1-$scheletro di un $2-$simplesso di vertici v_0,v_1 e v_2;
allora: $H_0(K,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ e $H_1(K,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

4) Sia $K = \{(v_0),(v_1),(v_2),(v_3),(v_0,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_0)\}$;
allora: $H_0(K,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ e $H_1(K,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

5) Sia K il complesso simpliciale costituito dalle facce aperte di $[v_0,v_1,v_2]$;
allora: $H_0(K,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $H_1(K,\mathbb{R}) = 0$ e $H_2(K,\mathbb{R}) = 0$.

6) Sia K il $2-$scheletro di un $3-$simplesso di vertici v_0,v_1,v_2 e v_3;
allora: $H_0(K,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $H_1(K,\mathbb{R}) = 0$ e $H_2(K,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

4 Coomologia simpliciale

4.1 Gruppi di coomologia di complessi simpliciali

Siano K un complesso simpliciale e $l \in \mathbb{N}$ tale che $0 \leq l \leq \dim K$; diamo le seguenti:

Definizione 1. *Si dice $l-$ cocatena un elemento di $C^l(K) = [C_l(K,\mathbb{R})]^*$.*

Definizione 2. *L'operatore di cobordo è l'applicazione*

$$\partial^* : C^l(K) \to C^{l+1}(K)$$

definita su $\varphi \in C^l(K)$ e $c \in C_{l+1}(K,\mathbb{R})$ da:

$$[\partial^*(\varphi)](c) = \varphi(\partial c).$$

Osservazione 1. L'operatore di cobordo soddisfa ${\partial^*}^2 = 0$.

Definizione 3. *Si dice $l-$esimo gruppo di coomologia di K il quoziente:*

$$H^l(K) = \frac{Ker\partial^*}{Im\partial^*} = \frac{Z^l(K)}{B^l(K)}.$$

Osservazione 3. $H^l(K) \cong [H_l(K,\mathbb{R})]^*$.

Siano $\langle s \rangle$ un $l-$simplesso orientato di K e $\varphi_{\langle s \rangle} \in C^l(K)$ così definita:

$$\varphi_{\langle s \rangle} \langle t \rangle = \begin{cases} 1 & se \quad \langle t \rangle = \langle s \rangle \\ -1 & se \quad \langle t \rangle = - \langle s \rangle \\ 0 & se \quad t \neq s \end{cases} .$$

Se $\{\langle s_1 \rangle, ..., \langle s_m \rangle\}$ è una base per $C^l(K)$, dove m è il numero degli $l-$simplessi di K, $\left\{\varphi_{\langle s_1 \rangle}, ..., \varphi_{\langle s_m \rangle}\right\}$ è la corrispondente base duale per $C^l(K)$; per capire come opera ∂^* basta vederlo su $\varphi_{\langle s_j \rangle}$, con j tale che $1 \leq j \leq m$, poichè ∂^* è lineare. Possiamo quindi enunciare il seguente:

Lemma 1.

$$\partial^*(\varphi_{\langle v_0, ..., v_l \rangle}) = \sum_{\substack{v \text{ vertice di } K \\ t.c.\ (v, v_0, ..., v_l) \text{ è un } (l+1)-\text{simplesso di } K}} \varphi_{\langle v, v_0, ..., v_l \rangle}.$$

5 Teorema di De Rham

5.1 Definizioni preliminari

Definizione 1. *Siano X una varietà differenziabile, K un complesso simpliciale e $h : [K] \to X$ un omeomorfismo con la seguente proprietà: per ogni s simplesso di K, l'applicazione $h_{[s]} : [s] \to X$ si può estendere a $h_s : U \to X$, con U intorno di $[s]$ nel piano di giacitura di $[s]$, cosicchè $h_s(U)$ è una sottovarietà differenziabile. Una terna (X,K,h) siffatta è una varietà differenziabilmente triangolata.*

Osservazione 1. Sia (X,K,h) una varietà differenziabilmente triangolata; poichè $[K]$ è compatto e h è un omeomorfismo, risulta che X è compatta. Inoltre vale che, se X è una varietà differenziabile compatta, allora X ammette una triangolazione.

Definizione 2. *Sia K un complesso simpliciale di vertici $v_1, ..., v_m$ e sia $x \in [K]$. La $j-esima$ coordinata baricentrica $b_j(x)$ di x, con $1 \leq j \leq m$, è così definita:*

b1) se $x \notin St(v_j)$, allora $b_j(x) = 0$;

b2) se $x \in St(v_j)$, cioè esiste $(s) \in K$ tale che $v_j \in [s]$ e $x \in (s)$, allora $b_j(x)$ è la coordinata baricentrica di x in $[s]$ relativa a v_j.

Osservazione 2. Risulta che, per ogni $x \in [K]$, $\sum_{j=1}^m b_j(x) = 1$, in particolare $0 \leq b_j(x) \leq 1$.

Definizione 3. *Siano K un complesso simpliciale e s un simplesso di K. Si dice stella di s l'insieme*

$$St(s) = \bigcup_{(t) \in K \ t.c. (s) \text{ è una faccia di } (t)} (t).$$

Osservazione 3. Valgono i seguenti fatti:
1) se $s = v$, allora $St(s) = St(v)$;
2) $St(s) \subseteq [K]$ è un aperto;
3) siano $(s) = (v_{j_0}, ..., v_{j_l})$ e $x \in [K]$, allora:

$$x \in St(s) \text{ se e solo se } b_{j_0}(x) \neq 0, ..., b_{j_l}(x) \neq 0;$$

4) sia $(s) = (v_{j_0}, ..., v_{j_l})$, allora:

$$[K] - St(s) = \{x \in [K] \mid \textit{esiste } i \textit{ tale che } 0 \leq i \leq l \textit{ per cui } b_{j_i}(x) = 0\};$$

5) siano s_1 e s_2 due simplessi di K tale che $s_1 \neq s_2$, allora $s_1 \subseteq [K] - St(s_2)$.

5.2 Dimostrazione del teorema di De Rham

Sia (X, K, h) una varietà differenziabilmente triangolata. Definiamo una successione di applicazioni lineari

$$\int_l : \Lambda^l(X) \to C^l(K),$$

con $0 \leq l \leq \dim X$: se $\omega \in \Lambda^l(X)$, sarà sufficiente vedere come agisce $\int_l(\omega)$ sugli $l-$simplessi orientati $\langle s \rangle$ di K, cioè su una base di $C_l(K, \mathbb{R})$. Consideriamo l'applicazione differenziabile $h_s : U \to X$, l'applicazione indotta h_s^* di h_s definisce una $l-$forma $h_s^*(\omega)$ su U. Pertanto possiamo porre

$$\int_l(\omega)(\langle s \rangle) = \int_{\langle s \rangle} h_s^*(\omega).$$

Osservazione 1. Vale la seguente proprietà, la cui dimostrazione segue dal teorema di Stokes:

$$\partial^* \circ \int_l = \int_{l+1} \circ\, d.$$

Osservazione 2. Dall'osservazione 1 segue che ciascuna $\int_l$ induce un omomorfismo

$$\widetilde{\int_l} : H^l(X, d) \to H^l(K).$$

Lemma 1. *Sia (X, K, h) una varietà differenziabilmente triangolata; allora esiste una successione di applicazioni lineari*

$$\alpha_l : C^l(K) \to \Lambda^l(X),$$

con $0 \leq l \leq \dim X$, tali che $d \circ \alpha_l = \alpha_{l+1} \circ \partial^*$ e $\int_l \circ\, \alpha_l = id_{C^l(K)}$.

Lemma 2. *Sia $\omega \in Z^l(X, d)$. Se esiste $c \in C^{l-1}(K)$ tale che $\int_l(\omega) = \partial^* c$, allora esiste $\tau \in \Lambda^{l-1}(X)$ tale che $\int_{l-1}(\tau) = c$ e $\omega = d\tau$.*

Teorema di De Rham. *Sia (X, K, h) una varietà differenziabilmente triangolata. Allora, per ogni l tale che $0 \leq l \leq \dim X$,*

$$\widetilde{\int_l} : H^l(X, d) \to H^l(K)$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. La suriettività dell'applicazione $\widetilde{\int_l}$ segue dal lemma 1, infatti: sia $z \in Z^l(K)$ tale che $\omega = \alpha_l(z)$; risulta:

$$d\omega = d \circ \alpha_l(z) = \alpha_{l+1} \circ \partial^*(z) = 0,$$

cioè $\omega \in Z^l(X, d)$. Inoltre

$$\int_l (\omega) = \int_l \circ\, \alpha_l(z) = z.$$

Pertanto $\int_l : Z^l(X, d) \to Z^l(K)$ è suriettivo e anche $\widetilde{\int_l}$ lo è.
L'iniettività dell'applicazione $\widetilde{\int_l}$ segue dal lemma 2, infatti: sia $\omega \in Z^l(X, d)$ tale che $\int_l(\omega) \in B^l(K)$, allora $\omega \in B^l(X, d)$.

Dimostrazione lemma 1. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che $[K] = X$ e $h = id_{[K]}$.
Passo 1 Siano $v_1, ..., v_m$ i vertici di K; costruiamo una partizione dell'unità associata al ricoprimento aperto finito di X, $\mathcal{S} = \{St(v_j)\}_{j \in \{1,.....,m\}}$.
Consideriamo gli insiemi

$$F_j = \left\{ x \in X \;\middle|\; b_j(x) \geq \frac{1}{n+1} \right\}, \quad G_j = \left\{ x \in X \;\middle|\; b_j(x) \leq \frac{1}{n+2} \right\}$$

con $j \in \{1, ..., m\}$ e $n = \dim X$. Per F_j e G_j valgono le seguenti proprietà:

1) F_j e G_j sono chiusi di X, poichè immagini inverse di chiusi tramite un'applicazione continua;

2) $F_j \subseteq St(v_j)$;

3) $X - St(v_j) \subseteq G_j$;

4) $F_j \cap G_j = \emptyset$;

5) esiste una funzione differenziabile $f_j \geq 0$ tale che $f_j > 0$ su F_j e $f_j = 0$ su G_j, poichè X è compatto e $F_j \subseteq X$ chiuso, dunque compatto;

6) $\{F_j\}_{j \in \{1,.....,m\}}$ è un ricoprimento di X. Dunque, dalla 5) segue che per ogni $x \in X$ esiste $j \in \{1, ..., m\}$ tale che $f_j(x) \neq 0$ e dalla 4) segue che $\{C_X G_j\}_{j \in \{1,.....,m\}}$ è un ricoprimento aperto e finito di X;

7) $\sum_{j=1}^m f_j(x) \gneqq 0$, per ogni $x \in X$, poichè vale la 6). Pertanto la funzione a valori reali

$$g_j = \frac{f_j}{\sum_{k=1}^m f_k}$$

è ben definita e differenziabile su X. In base alle affermazioni precedenti, la coppia

$$\left\{ \{C_X G_j\}_{j\in\{1,.....,m\}}, \{g_j\}_{j\in\{1,.....,m\}} \right\}$$

è una partizione dell'unità su X; in particolare, poichè per la 3) $C_X G_j \subseteq St(v_j)$ per ogni $j \in \{1, ..., m\}$, la coppia

$$\left\{ \{St(v_j)\}_{j\in\{1,.....,m\}}, \{g_j\}_{j\in\{1,.....,m\}} \right\}$$

è una partizione dell'unità su X.

<u>Passo 2</u> Sia $\langle s\rangle = \langle v_{j_0}, ..., v_{j_l}\rangle$ un $l-$simplesso orientato di K, definiamo le applicazioni lineari

$$\alpha_l : C^l(K) \to \Lambda^l(X)$$

$$\alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle}) = l! \left(\sum_{i=0}^{l} (-1)^i g_{j_i} dg_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge ... \wedge dg_{j_l} \right),$$

dove $\varphi_{\langle s\rangle}$ è un generatore di $C^l(K)$.

Dimostriamo ora che queste funzioni soddisfano le proprietà enunciate nel lemma.

<u>Proprietà 1</u> Calcoliamo il primo membro dell'uguaglianza da verificare, utilizzando le proprietà di d e $\wedge$:

$$\begin{aligned} d \circ \alpha_l(\varphi_{\langle s\rangle}) &= d \left[l! \sum_{i=0}^{l} (-1)^i g_{j_i} dg_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge ... \wedge dg_{j_l} \right] \\ &= l! \left[\sum_{i=0}^{l} (-1)^i (dg_{j_i} \wedge dg_{j_0} \wedge ... \wedge dg_{j_l}) \right] \\ &= (l+1)! dg_{j_0} \wedge ... \wedge dg_{j_l}. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il secondo membro, utilizzando le proprietà di ∂^* (lemma 1, § 4.1):

$$\begin{aligned} \alpha_{l+1} \circ \partial^*(\varphi_{<s>}) &= \alpha_{l+1} \left[\sum_{\substack{v_k \text{ t.c. } v_k \text{ è un vertice di } K \\ \text{e } (v_k, v_{j_0}, ..., v_{j_l}) \text{ è un } (l+1)-\text{simplesso di } K}} \varphi_{\langle v_k, v_{j_0}, ..., v_{j_l}\rangle} \right] \\ &= (l+1)! \sum_{v_k} g_k dg_{j_0} \wedge ... \wedge dg_{j_l} + \\ &\quad -(l+1)! \sum_{v_k} \sum_{i=0}^{l} (-1)^i g_{j_i} dg_{j_k} \wedge dg_{j_0} \wedge ... \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge ... \wedge dg_{j_l}. \end{aligned}$$

Proviamo ora che, se $v_k, v_{j_0}, ..., v_{j_l}$ sono vertici distinti di K ma non sono vertici di un $(l+1)-$simplesso di K, allora

$$g_k dg_{j_0} \wedge ... \wedge dg_{j_l} = 0.$$

Infatti, sia $x \in X$, si hanno due casi:
1) se $x \notin St(v_k)$, allora, per la proprietà 5) dimostrata al passo 1, $g_k(x) = 0$;
2) se $x \in St(v_k)$, allora $b_k(x) \neq 0$. Poichè $(v_k, v_{j_0}, \dots\dots, v_{j_l})$ non è un $(l+1)-$simplesso di K, allora esiste $i \in \{0, \dots\dots, l\}$ tale che $b_{j_i}(x) = 0$. Mediante questo i definiamo l'insieme

$$U = \left\{ y \in X \;\middle|\; b_{j_i}(y) < \frac{1}{n+2} \right\};$$

per U valgono i seguenti fatti:

1) $x \in U$;

2) U è un aperto di X;

3) $g_{j_i} = 0$ su U, poichè $U \subseteq G_{j_i}$; quindi, per il lemma 1 del §2.1, $dg_{j_i} = 0$ su U.
Pertanto esiste $i \in \{0, \dots\dots, l\}$ tale che $dg_{j_i}(x) = 0$.

Dall'affermazione appena dimostrata risulta:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{v_k \text{ t.c. } v_k \text{ è un vertice di } K \\ e\ (v_k, v_{j_0}, \dots\dots, v_{j_l}) \text{ è un } (l+1)-\text{simplesso di } K}} g_k dg_{j_0} \wedge \dots \wedge dg_{j_l} \\ = & \sum_{v_k \text{ vertice di } K \text{ t.c. } k \notin \{j_0, \dots, j_l\}} g_k dg_{j_0} \wedge \dots \wedge dg_{j_l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{v_k \text{ t.c. } v_k \text{ è un vertice di } K \\ e\ (v_k, v_{j_0}, \dots\dots, v_{j_l}) \text{ è un } (l+1)-\text{simplesso di } K}} \left[\sum_{i=0}^{l} (-1)^i g_{j_i} dg_k \wedge dg_{j_0} \wedge \dots \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge \dots \wedge dg_{j_l} \right] \\ = & \sum_{i=0}^{l} (-1)^i g_{j_i} \left[\left(\sum_{v_k \text{ vertice di } K \text{ t.c. } k \neq j_i} dg_k \right) \wedge dg_{j_0} \wedge \dots \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge \dots \wedge dg_{j_l} \right] \\ = & -\sum_{i=0}^{l} g_{j_i} dg_{j_0} \wedge \dots \wedge dg_{j_l}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{l+1} \circ \partial^*(\varphi_{\langle s \rangle}) &= (l+1)! \left(\sum_{v_k \text{ vertice di } K \text{ t.c. } k \notin \{j_0, \dots, j_l\}} g_k dg_{j_0} \wedge \dots \wedge dg_{j_l} \right) + \\ &\quad + (l+1)! \left(\sum_{i=0}^{l} g_{j_i} dg_{j_0} \wedge \dots \wedge dg_{j_l} \right) \\ &= (l+1)! \left(\sum_{k=1}^{m} g_k dg_{j_0} \wedge \dots \wedge dg_{j_l} \right) \\ &= (l+1)! dg_{j_0} \wedge \dots \wedge dg_{j_l} \\ &= d \circ \alpha_l(\varphi_{\langle s \rangle}). \end{aligned}$$

Proprietà 2 Procediamo per induzione su l.
Base dell'induzione: $l = 0$. Siano j, $k \in \{1, ..., m\}$; si ha che:

$$\left[\int_0 \circ \alpha_0 \left(\varphi_{\langle v_j \rangle}\right)\right](\langle v_k \rangle) = \int_0 (g_j)(\langle v_k \rangle) = \int_{\langle v_k \rangle} g_j = g_j(v_k).$$

Se $k \neq j$, allora $g_j(v_k) = 0$, poichè $v_k \notin St(v_j)$ e g_j è identicamente nulla fuori di $St(v_j)$. Inoltre, per ogni $k \in \{1, ..., m\}$, risulta

$$1 = \sum_{j=1}^{m} g_j(v_k) = g_j(v_j).$$

Dunque

$$\left[\int_0 \circ \alpha_0 \left(\varphi_{\langle v_j \rangle}\right)\right](\langle v_k \rangle) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & se\ k = j \\ 0 & se\ k \neq j \end{array} \right. = \varphi_{\langle v_j \rangle} \langle v_k \rangle.$$

Per l'arbitrarietà di j e k, $\int_0 \circ \alpha_0 = id_{C^0(K)}$.
Passo induttivo: supponiamo che la proprietà 2 sia vera per $l - 1$, dobbiamo provarlo anche per l. Siano $\langle s \rangle$ e $\langle t \rangle$ due $l-$simplessi orientati di K; risulta che

$$\left[\int_l \circ \alpha_l \left(\varphi_{\langle s \rangle}\right)\right](\langle t \rangle) = \int_{\langle t \rangle} \alpha_l \left(\varphi_{\langle s \rangle}\right).$$

Ci sono due possibilità:
1) se $t \neq s$, dato che $\alpha_l \left(\varphi_{\langle s \rangle}\right)$ è nulla in un intorno di $X - St(s)$, risulta

$$\int_{\langle t \rangle} \alpha_l \left(\varphi_{\langle s \rangle}\right) = \int_{\langle t \rangle} 0 = 0;$$

2) se $\langle t \rangle = \langle s \rangle$, siano $\langle s \rangle = \langle v_{j_0}, ..., v_{j_l} \rangle$ e $\langle r \rangle = \langle v_{j_1}, ..., v_{j_l} \rangle$. Applicando rispettivamente la proprietà 1 e il teorema di Stokes otteniamo

$$\int_{\langle s \rangle} \alpha_l \left(\partial^* \varphi_{\langle r \rangle}\right) = \int_{\langle s \rangle} d \circ \alpha_{l-1} \left(\varphi_{\langle r \rangle}\right) = \int_{\partial \langle s \rangle} \alpha_{l-1} \left(\varphi_{\langle r \rangle}\right).$$

Osserviamo che $\partial \langle s \rangle = \langle r \rangle$ più una somma a segni alterni di altri $(l-1)-$simplessi orientati di K; quindi, per ipotesi induttiva, risulta

$$\int_{\partial \langle s \rangle} \alpha_{l-1} \left(\varphi_{\langle r \rangle}\right) = \int_{\langle r \rangle} \alpha_{l-1} \left(\varphi_{\langle r \rangle}\right) = 1.$$

Pertanto, per le proprietà di ∂^*,

$$1 = \int_{\langle s \rangle} \alpha_l \left(\partial^* \varphi_{\langle r \rangle}\right) = \int_{\langle s \rangle} \alpha_l \left(\varphi_{\langle s \rangle} + termini\ del\ tipo\ \varphi_{\langle t \rangle},\ con\ t \neq s\right) = \int_{\langle s \rangle} \alpha_l \left(\varphi_{\langle s \rangle}\right).$$

Per l'arbitrarietà di $\langle s \rangle$ e $\langle t \rangle$, $\int_l \circ \alpha_l = id_{C^l(K)}$.

Il lemma 2 è un corollario del seguente lemma:

Lemma 3. *Sia s un $k-$simplesso di $\mathbb{R}^n$. Valgono i seguenti fatti:*

(a_r) siano r e k due interi tali che $r \geq 0$ e $k \geq 1$ e sia ω una $r-$forma chiusa, definita in un intorno di $[s^{k-1}]$; se $k = r+1$, ipotizziamo anche $\int_{\partial\langle s\rangle} \omega = 0$. Allora esiste una $r-$forma τ chiusa e definita in un intorno di $[s]$, tale che $\tau = \omega$ in un intorno di $[s^{k-1}]$;

(b_r) siano r e k due interi tali che $r, k \geq 1$; siano ω una $r-$forma chiusa, definita in un intorno di $[s]$ e τ una $(r-1)-$forma, definita in un intorno di $[s^{k-1}]$ e tale che $d\tau = \omega$ in un intorno di $[s^{k-1}]$; se $k = r$, ipotizziamo anche $\int_{\langle s\rangle} \omega = \int_{\partial\langle s\rangle} \tau$. Allora esiste una $(r-1)-$forma $\widetilde{\tau}$, definita in un intorno di $[s]$, per cui $\tau = \widetilde{\tau}$ in un intorno di $[s^{k-1}]$ e $d\widetilde{\tau} = \omega$ in un intorno di $[s]$.

Osservazione 3. Applicando il teorema di Stokes si verifica facilmente che le ipotesi aggiuntive introdotte in *(a_r)* e *(b_r)* sono condizioni necessarie.

Dimostrazione lemma 3. Procediamo per induzione su r.
Per prima cosa verifichiamo che vale *(a_0)*: se $r = 0$, ω è una funzione differenziabile, definita in un intorno di $[s^{k-1}]$ e $d\omega = 0$; dunque ω è costante sulle componenti connesse del suo dominio. A seconda del valore di k si hanno due possibilità:

1) se $k > 1$, $[s^{k-1}]$ è connesso; quindi esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\omega = c$ in un intorno di $[s^{k-1}]$. Pertanto poniamo $\tau = c$ in un intorno di $[s]$;

2) se $k = 1$, allora $\langle s\rangle = \langle v_0, v_1\rangle$; per la formula fondamentale del calcolo integrale risulta

$$0 = \int_{\partial\langle s\rangle} \omega = \omega(v_1) - \omega(v_0),$$

per cui il valore costante di ω vicino a v_1 è uguale al valore costante di ω vicino a v_0. Quindi esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\omega = c$ in un intorno di $[s^0]$; come prima, poniamo $\tau = c$ in un intorno di $[s]$.
Verifichiamo ora che *(a_{r-1})* implica *(b_r)*: per ipotesi ω è una $r-$forma chiusa, definita in un intorno aperto di $[s]$. A meno di restrizioni, possiamo supporre che questo aperto sia stellato; dunque, per il lemma di Poincaré (§2.2), esiste una $(r-1)-$forma τ_1 definita in un intorno di $[s]$ tale che $d\tau_1 = \omega$ nel medesimo intorno. È facile verificare che la $(r-1)-$forma $\tau_1 - \tau$ soddisfa le ipotesi di *(a_{r-1})*: quindi esiste una $(r-1)-$forma chiusa μ definita in un intorno di $[s]$ e tale che $\mu = \tau_1 - \tau$ in un intorno di $[s^{k-1}]$. Chiamiamo $\widetilde{\tau} = \tau_1 - \mu$: si tratta di una $(r-1)-$forma, definita in un intorno di $[s]$, tale che $\widetilde{\tau} = \tau_1 - \mu = \tau_1 - \tau_1 + \tau = \tau$ in un intorno di $[s^{k-1}]$ e $d\widetilde{\tau} = d\tau_1 - d\mu = \omega - 0 = \omega$ in un intorno di $[s]$.
Infine proviamo che *(b_r)* implica *(a_r)*: siano $\langle s\rangle = \langle v_0, ..., v_k\rangle$ e $\langle t\rangle = \langle v_1, ..., v_k\rangle$; per ipotesi ω è una $r-$forma chiusa e definita in un intorno di $[s^{k-1}]$. A seconda del valore di k si hanno due possibilità:

1) se $k > 1$, sia $F = [s^{k-1}] - (t)$; poichè F è stellato, dal lemma di Poincaré segue che esiste una $(r-1)-$forma μ, definita in un intorno di F contenuto nel

dominio di ω e tale che $d\mu = \omega$ in tale intorno. Inoltre $d\mu = \omega$ in un intorno di $[t^{k-2}]$. Supponiamo ora che $k-1=r$ e sia $c = \partial \langle s \rangle - \langle t \rangle$; risulta

$$\int_{\langle t \rangle} \omega - \int_{\partial \langle t \rangle} \mu = \int_{\langle t \rangle} \omega + \int_{\partial c} \mu = \int_{\langle t \rangle} \omega + \int_{c} d\mu = \int_{\langle t \rangle} \omega + \int_{c} \omega = \int_{\partial \langle s \rangle} \omega = 0.$$

Dunque ω, μ e il $(k-1)$ −simplesso t verificano le ipotesi di *(b_r)*: quindi esiste una $(r-1)$−forma $\widetilde{\mu}$ definita in un intorno di $[t]$, per cui $\widetilde{\mu} = \mu$ in un intorno di $[t^{k-2}]$ e $d\widetilde{\mu} = \omega$ in un intorno di $[t]$. Indichiamo con μ_2 la forma definita in un intorno di $[s^{k-1}]$ che si ottiene incollando μ e $\widetilde{\mu}$ lungo il loro dominio comune: quindi $d\mu_2 = \omega$ in un intorno di $[s^{k-1}]$;
2) se $k=1$, sia U_i, con $i \in \{0,1\}$, un intorno stellato di $\{v_i\}$ contenuto nel dominio di ω. Poichè ω è chiusa, per il lemma di Poincaré esistono $(r-1)$−forme μ_i definite su U_i e tali che $d\mu_i = \omega$ su U_i; restringendo U_0 e U_1, possiamo supporre che $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Come al punto 1), poniamo

$$\mu_2 = \begin{cases} \mu_0 & su\ U_0 \\ \mu_1 & su\ U_1 \end{cases} :$$

si tratta di una $(r-1)$−forma definita in un intorno di $[s^0]$ e per cui $d\mu_2 = \omega$ in tale intorno.
Sia ora f una funzione differenziabile che vale 1 in un piccolo intorno di $[s^{k-1}]$ e 0 fuori del dominio di μ_2: $f\mu_2$ è una $(r-1)$−forma definita in un intorno di $[s]$. È facile verificare che, ponendo $\tau = d(f\mu_2)$, l'affermazione *(a_r)* è dimostrata.

Dimostrazione lemma 2. Sia $n = \dim X$; costruiamo, per induzione, una sequenza di $(l-1)$−forme $\tau_0, \tau_1, \ldots.., \tau_n = \tau$ con le seguenti proprietà:
1) ogni τ_k è definita in un intorno di $[K^k]$;
2) per ogni $k \in \{0, \ldots.., n\}$, $d\tau_k = \omega$ in un intorno di $[K^k]$;
3) per ogni $k \in \{1, \ldots.., n\}$, $\tau_k = \tau_{k-1}$ in un intorno di $[K^{k-1}]$;
4) $\int_{l-1} (\tau_{l-1}) = c$.
Con questa costruzione dimostriamo il lemma 2; infatti: le proprietà 1) e 2) affermano che esiste una $(l-1)$−forma τ tale che $d\tau = \omega$ su X; inoltre, sia $\langle s \rangle$ un $(l-1)$−simplesso orientato di K e sia $k \geq l-1$, dalle proprietà 3) e 4) segue

$$\int_{l-1} (\tau_k) (\langle s \rangle) = \int_{\langle s \rangle} \tau_k = \int_{\langle s \rangle} \tau_{l-1} = \int_{l-1} (\tau_{l-1}) (\langle s \rangle) = c (\langle s \rangle).$$

Base dell'induzione: $k=0$. Consideriamo un ricoprimento di $[K^0]$ costituito da palle a due a due disgiunte; per ipotesi ω è chiusa, dunque, per il lemma di Poincaré, ω è esatta su ogni palla del ricoprimento: in altre parole esiste $\widetilde{\tau_0}$ $(l-1)$−forma, definita sull'unione di tali palle, per cui $d\widetilde{\tau_0} = \omega$ su di esse. Dunque $\widetilde{\tau_0}$ verifica le proprietà 1) e 2). Ora, se $l-1 \neq 0$, poniamo $\tau_0 = \widetilde{\tau_0}$; se invece $l-1=0$, dobbiamo costruire una τ_0 che soddisfi anche 4): sia v_j un vertice di K, risulta

$$\int_0 (\widetilde{\tau_0}) (\langle v_j \rangle) = \int_{\langle v_j \rangle} \widetilde{\tau_0} = \widetilde{\tau_0}(v_j);$$

sia ora $a_j = c(v_j) - \widetilde{\tau_0}(v_j)$, sulla palla intorno a v_j poniamo $\tau_0 = \widetilde{\tau_0} + a_j$. Pertanto le proprietà 1), 2) e 4) sono soddisfatte.
Passo induttivo: per ipotesi abbiamo costruito una τ_{k-1} che soddisfa 1)-4), dobbiamo costruire una τ_k che soddisfi anch'essa 1)-4).
Sia s un $k-$simplesso di K; per ipotesi ω è una $l-$forma chiusa, definita in un intorno di $[s]$ e per ipotesi induttiva τ_{k-1} è una $(l-1)-$forma definita in un intorno di $\left[s^{k-1}\right]$. Inoltre, se $k = l$, vale che

$$\int_{\langle s\rangle} \omega = \int_l (\omega)\left(\langle s\rangle\right) = \partial^* c\left(\langle s\rangle\right) = c\left(\partial\langle s\rangle\right) = \int_{k-1} \left(\tau_{k-1}\right)\left(\partial\langle s\rangle\right) = \int_{\partial\langle s\rangle} \tau_{k-1}.$$

Dunque per la *(b_l)* del lemma 3, esiste una $(l-1)-$forma $\tau_k(s)$ definita in un intorno di $[s]$, tale che $\tau_k(s) = \tau_{k-1}$ in un intorno di $\left[s^{k-1}\right]$ e $d\tau_k(s) = \omega$ in un intorno di $[s]$. Questa costruzione è possibile per qualsiasi $k-$simplesso s di K; pertanto, incollando le varie forme così costruite, si ottiene una $(l-1)-$forma $\widetilde{\tau_k}$ che soddisfa 1), 2) e 3). Ora, se $k \neq l-1$, poniamo $\tau_k = \widetilde{\tau_k}$; se invece $k = l-1$, dobbiamo costruire una τ_k che soddisfi anche 4). Sia $c_1 = c - \int_{l-1}\left(\widetilde{\tau_{l-1}}\right)$; poniamo $\tau_{l-1} = \widetilde{\tau_{l-1}} + \alpha_{l-1}(c_1)$ in un intorno di $\left[K^{l-1}\right]$. È facile verificare che, fissati un intero r tale che $0 \leq r \leq n$ e un $r-$simplesso orientato $\langle s\rangle$ di K, la $r-$forma $\alpha_r\left(\varphi_{\langle s\rangle}\right)$ è identicamente nulla in un intorno di $\left[K^{r-1}\right]$. Dunque

$$d\tau_{l-1} = d\widetilde{\tau_{l-1}} + d\circ\alpha_{l-1}(c_1) = d\widetilde{\tau_{l-1}} + \alpha_l \circ \partial^*(c_1) = d\widetilde{\tau_{l-1}} = \omega$$

in un intorno di $\left[K^{l-1}\right]$, e

$$\tau_{l-1} = \widetilde{\tau_{l-1}} + \alpha_{l-1}(c_1) = \widetilde{\tau_{l-1}} = \widetilde{\tau_{l-2}} = \tau_{l-2}$$

in un intorno di $\left[K^{l-2}\right]$; inoltre

$$\begin{aligned}\int_{l-1}(\tau_{l-1}) &= \int_{l-1}\left(\widetilde{\tau_{l-1}} + \alpha_{l-1}(c_1)\right) \\ &= (c - c_1) + c_1 = c.\end{aligned}$$

Pertanto τ_{l-1} è una $(l-1)-$forma che soddisfa 1)-4).

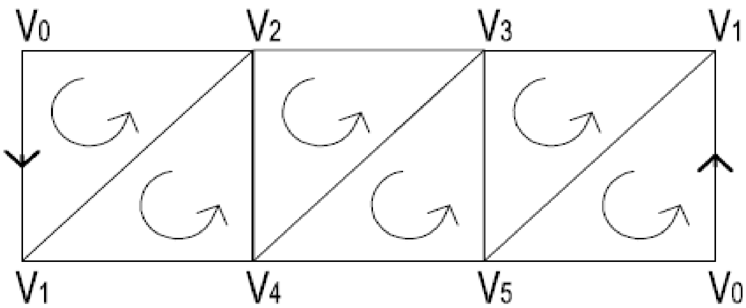
5.3 Esempi

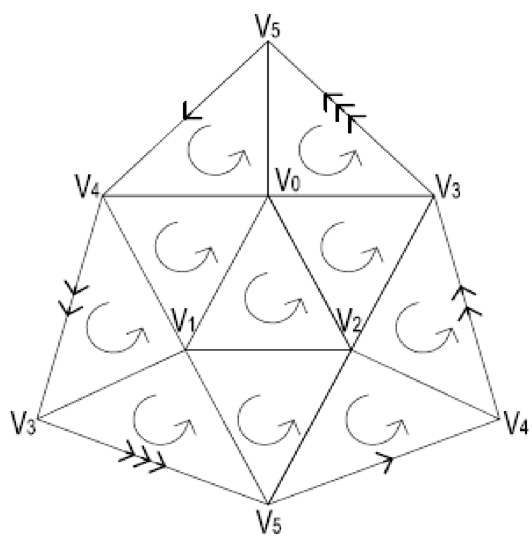
1) Siano $X = S^n$, K l' $n-$scheletro di un $(n+1)-$simplesso e $h : [K] \to S^n$ la proiezione radiale; allora (S^n, K, h) è una varietà differenziabilmente triangolata. Pertanto, per il teorema di De Rham, per ogni l tale che $0 \leq l \leq n$, risulta $H^l(S^n, d) \cong H_l(K, \mathbb{R})$.

2) Sia X il nastro di Möbius; allora: $H^0(X,d) \cong \mathbb{R}$, $H^1(X,d) \cong \mathbb{R}$ e $H^2(X,d) = 0$.

3) Sia $X = \mathbb{R}P^2$; allora: $H^0(X,d) \cong \mathbb{R}$, $H^1(X,d) = 0$ e $H^2(X,d) = 0$.

Osservazione 1. Per dimostrare le affermazioni degli esempi 2), e 3) si utilizzano rispettivamente le triangolazioni delle figure sotto riportate.





Bibliografia

[1] Bott, R. "*George de Rham 1901-1990*" Notices Amer. Math. Soc. 38 (2), 1991, 114-115

[2] Nakahara, M. "*Geometry, Topology and Physics*" Graduate Student Series in Physics, 1990

[3] Singer,I. M. - Thorpe, J. A. "*Lezioni di topologia elementare e di geometria*" Boringhieri, 1980