Università degli studi di Firenze

Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
C.d.L. in Matematica

Anno Accademico 2012-2013
Relazione finale di Laurea Triennale

Algebra di Clifford e gruppo Spin sui reali

Clifford Algebra and Spin group on real numbers

Candidato:
Giacomo Mariottini

Relatore:
Prof. Giorgio Maria Ottaviani

Indice

Capitolo 1

Algebra tensoriale

1.1 Prodotto tensoriale

Definizione Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, definiamo **prodotto tensoriale** di V e W lo spazio $\mathfrak{Bil}(V^* \times W^*) = V \otimes W$, dunque il prodotto tensoriale di due spazi vettoriali è l'insieme delle funzioni bilineari da $V^* \times W^*$ a $\mathbb{K}$. Considerando l'applicazione

$$\begin{array}{rccccl} \otimes : & V \times W & \to & V \otimes W & & \\ & (x,y) & \mapsto & \otimes(x,y) = & x \otimes y : & V^* \times W^* \;\; \to \;\; \mathbb{K} \\ & & & & & (v^*, w^*) \;\; \mapsto \;\; x \otimes y(v^*, w^*) = v^*(x)w^*(y) \end{array}$$

otteniamo che $\otimes$ associa ad una coppia (x, y) di $V \times W$ una funzione da $V^* \times W^*$ in $\mathbb{K}$ la quale è bilineare. Inoltre, gli elementi della forma $x \otimes y$ vengono detti **elementi semplici** di $V \otimes W$.

Proposizione Dette $\mathfrak{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ e $\mathfrak{D} = \{w_1 \dots w_m\}$ basi di V e W rispettivamente, si ha che $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D} = \{v_i \otimes w_j \ : \ 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m\}$ è base di $V \otimes W$, da cui $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$.

dimostrazione Sia $\mathfrak{B}^* = \{v_1^* \dots v_n^*\}$ base di V^* duale di $\mathfrak{B}$ e analogamente $\mathfrak{D}^* = \{w_1^* \dots w_m^*\}$. Sia $f \in V \otimes W$ e definiamo $a_{ij} = f(v_i^*, w_j^*)$.
Sia $g = \sum_{h=1..n,k=1..m} a_{hk} v_h \otimes w_k$ otteniamo che:

$$g(v_i^*, w_j^*) = \sum_{h=1..n,k=1..m} a_{hk} v_h \otimes w_k(v_i^*, w_j^*) = \sum_{h=1..n,k=1..m} a_{hk} v_i^*(v_h) w_j^*(w_k) =$$

$$= \sum_{h=1..n,k=1..m} a_{hk} \delta_{ih} \delta_{jk} = a_{ij}.$$

Dunque, otteniamo che $f(v_i^*, w_j^*) = g(v_i^*, w_j^*) \ \forall \ i, j$ che implica $f = g$ in $V \otimes W$. Quindi $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D}$ è un sistema di generatori per $V \otimes W$.
Guardiamo ora l'indipendenza: poniamo

$$0 = \sum_{h=1..n,k=1..m} \lambda_{hk} v_h \otimes w_k$$

e valutiamo l'uguaglianza per (v_h^*, w_k^*), da cui

$$0 = \sum_{h=1..n,k=1..m} \lambda_{hk} v_h^*(v_h) w_k^*(w_k) = \lambda_{hk}$$ dunque $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{D}$ è base di $V \otimes W$.

$\square$

Da questa osservazione segue che ogni elemento di $V \otimes W$ si può esprimere come combinazione lineare di elementi semplici.

Proposizione (Proprietà universale del prodotto tensoriale) Siano U, V, W spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Sia $\phi : V \times W \to U$ un'applicazione bilineare.
Allora $\exists! \ \hat{\phi} : V \otimes W \to U$ tale che $\phi = \hat{\phi} \circ \otimes$

dimostrazione Poiché ogni elemento di $V \otimes W$ è combinazione lineare di elementi semplici, basta definire $\hat{\phi}$ sugli elementi semplici ed estenderla poi per linearità.
Definendo $\hat{\phi}(v \otimes w) = \phi(v, w)$ otteniamo la tesi.
□

Osservazione Valgono le seguenti proprietà:

(a) $V \otimes W \simeq W \otimes V$ mediante $v \otimes w \mapsto w \otimes v$

(b) $(V \otimes W) \otimes U \simeq V \otimes (W \otimes U)$ mediante $(v \otimes w) \otimes u \mapsto v \otimes (w \otimes u)$

(c) $V \otimes \mathbb{K} \simeq V$ mediante $v \otimes \lambda \mapsto \lambda v$

Grazie al secondo punto possiamo parlare di prodotto tensoriale di più di due spazi vettoriali.

Proposizione Siano $V_1 \dots V_m$ spazi vettoriali, ciascun V_h di dimensione n_h sul campo $\mathbb{K}$ e base $\mathfrak{B}_h = \left\{v_1^h \dots v_{n_h}^h\right\}$. Allora $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ è isomorfo alle funzioni m-multilineari che vanno da $V_1^* \times \ldots \times V_m^*$ a $\mathbb{K}$ ed una sua base è data da $\mathfrak{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{B}_m = \left\{v_{j_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_{j_m}^m \ : \ 1 \leq j_h \leq n_h \ , \ 1 \leq h \leq m\right\}$.

Definizione Dato V spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ definiamo:

(a) $T^r(V) = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{per} \quad r = 0 \\ \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ volte}} & \text{per} \quad r \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$ e i suoi elementi sono detti **tensori controvarianti di grado r su V** ;

(b) $T_s(V) = T^s(V^*)$ e i suoi elementi sono detti **tensori covarianti di grado s su V**;

(c) $T_s^r(V) = T^r(V) \otimes T_s(V)$ e i suoi elementi si dicono **tensori di tipo (r, s) su V**;

(d) $T(V) = \bigoplus_{r \geq 0} T^r(V)$ è uno spazio vettoriale detto **algebra tensoriale su V**.

Dati $a, b \in T(V)$, se $a \in T^p(V)$ e $b \in T^q(V)$ possiamo definire il prodotto all'interno di $T(V)$ nel modo seguente: siano
$a = \sum v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p}$ e $b = \sum v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_q}$ definiamo

$$a \otimes b = \sum v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_q}$$

Otteniamo che $T(V)$ munito di questo prodotto è uno spazio vettoriale che ammette anche una struttura di anello associativo. Abbiamo inoltre che $\otimes$ verifica $\alpha(a \otimes b) = (\alpha a) \otimes b = a \otimes (\alpha b)\ \forall\ \alpha \in \mathbb{K}\ ,\ a, b \in T(V)$, dunque $T(V)$ è uno spazio vettoriale che ammette una struttura di anello associativo mediante un'operazione $\otimes$ la quale si comporta come sopra con il prodotto per uno scalare, e quindi è un'**algebra**.
Un elemento $a \in T(V)$ è somma di prodotti tensoriali di elementi di V.

1.2 Algebra esterna

Definizione Sia $r \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in \Sigma(r)$ permutazione di cardinalità r. Definiamo $L_\sigma \in \mathrm{Aut}(T^r(V))$ come

$$\begin{array}{rccc} L_\sigma : & T^r(V) & \longrightarrow & T^r(V) \\ & v_1 \otimes \cdots \otimes v_r & \longmapsto & v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)} \end{array}$$

Osservazione Si ha che $\forall \sigma, \tau \in \Sigma(r)\ L_\sigma \circ L_\tau = L_{\sigma\tau}$. Inoltre, detto

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \Sigma(r) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(T^r(V)) \\ & \sigma & \longmapsto & L_\sigma \end{array}$$

θ definisce una rappresentazione di gruppo di $\Sigma(r)$ in $T^r(V)$.

Definizione Dato $r \in \mathbb{N}$ definiamo su ogni $T^r(V)$ delle applicazioni lineari $A_r : T^r(V) \to T^r(V)$ definite sugli elementi semplici come:

$$A_r(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}$$

Definiamo $A : T(V) \to T(V)$ l'**alternatore** come

$$A = \bigoplus_{r \geq 0} A_r$$

dove quindi per definizione abbiamo che $A|_{T^r(V)} = A_r$.

Proposizione (Proprietà dell'alternatore) Si ha che

(a) $\forall\, r \in \mathbb{N}_0$, $\forall\, \sigma \in \Sigma(r)$, $\forall\, t \in T^r(V)$ si ha $A_r(L_\sigma(t)) = \text{sgn}(\sigma) \cdot A_r(t) = L_\sigma(A_r(t))$, quindi $A(L_\sigma(t)) = \text{sgn}(\sigma) \cdot A(t) = L_\sigma(A(t))$

(b) $A^2 = A$

dimostrazione

(a) siano $r \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in \Sigma(r)$ e $t = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \ \in T^r(V)$. Ricordando che la segnatura è un morfismo e che $(\text{sgn}(\tau))^2 = 1$ si ha
$A_r(L_\tau(t)) = A_r(L_\tau(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \text{sgn}(\sigma) L_\sigma(L_\tau(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)) =$
$= \frac{1}{r!} \text{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau) L_{\sigma\tau}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) =$
$= \frac{1}{r!} \text{sgn}(\tau) \sum_{\sigma\tau \in \Sigma(r)} \text{sgn}(\sigma\tau) L_{\sigma\tau}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)) = \text{sgn}(\tau) \cdot A_r(t).$
Si procede in maniera analoga per l'altra uguaglianza. Per linearità l'uguaglianza è verificata anche da A, ovvero
$A(L_\sigma(t)) = \text{sgn}(\sigma) A(t) = L_\sigma(A(t))$

(b) Dimostriamo l'uguaglianza per un r, essendo A lineare la dimostriamo su un elemento semplice di $T^r(V)$:
$A^2(t) = A^2(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = A\left(\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \text{sgn}(\sigma) L_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)\right) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \text{sgn}(\sigma) A(L_\sigma(v_1 \otimes$
$\cdots \otimes v_r)) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = \frac{1}{r!} r! A(t) =$
$= A(t)$

□

Proposizione Detto $\mathfrak{I}$ ideale bilatero di $T(V)$ generato dagli elementi della forma $v \otimes v$, $v \in V$, abbiamo che $\ker(A) = \mathfrak{I}$

dimostrazione Prendiamo $t \in V$, allora $t \otimes v \otimes v \in \mathfrak{I}$, ricordando che in $\Sigma(3)$ abbiamo $\text{sgn}(\text{id}) = \text{sgn}(123) = \text{sgn}(231) = 1$ e $\text{sgn}(12) = \text{sgn}(23) = \text{sgn}(31) = -1$ si ha che:
$A(t \otimes v \otimes v) = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes v_{\sigma(3)} =$
$\frac{1}{3!}((t \otimes v \otimes v) - (v \otimes t \otimes v) - (v \otimes v \otimes t) - (t \otimes v \otimes v) + (v \otimes t \otimes v) + (v \otimes v \otimes t)) =$
$= 0$
Nel caso in cui sia $t = t_1 \otimes \ldots \otimes t_k$ si ottiene lo stesso risultato prendendo delle permutazioni in $k + 2$.

Dunque $\mathfrak{I} \subseteq \ker(A)$.
Consideriamo ora l'algebra quoziente $T(V)/\mathfrak{I}$, denotando il prodotto con $\cdot$. Sia $\pi : T(V) \to T(V)/\mathfrak{I}$ la proiezione canonica.
Vogliamo far vedere che anche π ha la proprietà dell'alternatore, cominciamo a vedere cosa succede per due elementi di V:
$\pi((v+w)\otimes(v+w)) = \pi((v\otimes v)+(v\otimes w)+(w\otimes v)+(w\otimes w)) = \pi(v)\pi(w)+\pi(w)\pi(v)$
dunque $\forall\ v,w \in V$ $\pi(v)\pi(w) = -\pi(w)\pi(v)$.
Siano ora $v_1 \dots v_r \in V$ e $\sigma \in \Sigma(r)$, allora $\pi(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}) = \pi(v_{\sigma(1)}) \cdots \pi(v_{\sigma(r)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \pi(v_1)\cdots\pi(v_r) = \mathrm{sgn}(\sigma)\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)$.
Abbiamo quindi

$$\pi(A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)) = \pi\left(\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\Sigma(r)} \mathrm{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}\right) =$$

$$= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\Sigma(r)} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma)\pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = \frac{1}{r!} r! \cdot \pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) =$$

$= \pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)$.
Questo ci dice che se $v \in \ker(A)$, allora $\pi(v) = 0_{T(V)/\mathfrak{I}}$, dunque
$\ker(A) \subseteq \ker(\pi) = \mathfrak{I}$, per cui otteniamo $\ker(A) = \mathfrak{I}$.
$\square$
Per definizione di ideale bilatero, abbiamo che
$\forall\ w \in T(V)$ e $\forall v \in \ker(A)$ $v \otimes w$ e $w \otimes v \in \ker(A)$.

Corollario Direttamente dal teorema di omomorfismo, otteniamo che

$$\pi : \mathrm{Im}(A) \longrightarrow T(V)/\mathfrak{I}$$

è isomorfismo di spazi vettoriali. Inoltre si ha $A(T^r(V)) = 0\ \forall r > n$

dimostrazione Detta $\mathfrak{B}$ base di V, $T^r(\mathfrak{B})$ è base di $T^r(V)$. Ma $T^r(\mathfrak{B})$ è prodotto tensoriale di elementi della base di V non tutti distinti, poiché $r > n$. Dunque, abbiamo che $A(T^r(\mathfrak{B})) = 0$ dunque $A(T^r(V)) = 0$.
$\square$

Definizione $\Lambda^r(V) = A(T^r(V))$ viene detta
***r*-esima potenza esterna di** V, e porremo

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r(V)$$

Abbiamo che $\Lambda(V) = \mathrm{Im}(A)$.
All'interno di $\Lambda(V)$ è possibile introdurre un'operazione binaria detta **prodotto esterno** definita come:

$$\begin{array}{rccl} \wedge : & \Lambda(V)\times\Lambda(V) & \longrightarrow & \Lambda(V) \\ & (\alpha,\beta) & \longmapsto & \alpha\wedge\beta = A(s\otimes t) \end{array}$$

dove $A(s) = \alpha$ e $A(t) = \beta$.
La definizione dell'operazione è ben posta, munito di questa operazione, $\Lambda(V)$ è uno spazio vettoriale che ammette una struttura di anello associativo, ovvero un'algebra associativa, ed è infatti detta **algebra esterna su** V. Abbiamo poi che $\pi : \Lambda(V) \to T(V)/\mathfrak{I}$ è isomorfismo di algebre.
Inoltre, dato che in $T(V)/\mathfrak{I}$ vale $\pi(v)\pi(w) = -\pi(w)\pi(v)\ \forall\ v,w \in V$ ed essendo $T(V)/\mathfrak{I} \simeq \Lambda(V)$ si avrà che $v \wedge w = -w \wedge v\ \forall\ v,w \in \Lambda^1(V)$.
Dunque abbiamo che $v \wedge v = 0\ \forall\ v \in \Lambda^1(V)$.

Proposizione Siano $a \in \Lambda^p(V)$ e $b \in \Lambda^q(V)$ allora
$a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a$

dimostrazione Sia $a = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ e $b = w_1 \wedge \ldots \wedge w_q$, utilizzando l'associatività del prodotto $\wedge$ otteniamo:
$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge \ldots \wedge w_q) = v_1 \wedge \ldots \wedge (v_p \wedge w_1) \wedge \ldots \wedge w_q =$
$= -v_1 \wedge \ldots \wedge (w_1 \wedge v_p) \wedge \ldots \wedge w_q = (-1)^p w_1 \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_q =$
$= (-1)^{pq} w_1 \wedge \ldots \wedge w_q \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = (-1)^{pq} b \wedge a$
□

Corollario $\forall\ a \in \Lambda^{2r+1}(V)\ a \wedge a = 0$

dimostrazione Essendo il quadrato di un numero dispari ancora dispari, per la proposizione precedente abbiamo che $a \wedge a = (-1)^{(2r+1)^2} a \wedge a = -a \wedge a$ dunque $a \wedge a = 0$.
□

Definizione Data f forma r-multilineare su V^*, cioé $f : V^* \times \ldots \times V^* \to \mathbb{K}$, essa è detta **forma r-multilineare alternante** se verifica

$$f(v^*_{\sigma(1)}, \ldots, v^*_{\sigma(r)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(v^*_1, \ldots, v^*_r)\ \forall\ \sigma \in \Sigma(r)$$

Lo spazio delle forme r-multilineari alternanti su V^* è un sottospazio delle forme r-multilieari su V^*. Abbiamo che $T^r(V)$ è identificato con lo spazio delle funzioni r-multilineari su V^*, e otteniamo che $\Lambda^r(V)$ è identificato con lo spazio delle funzioni r-multilineari alternanti su V^*.

Osservazione Sia n la dimensione dello spazio vettoriale V e $\mathfrak{B}$ una sua base, abbiamo che una base di $\Lambda^r(V)$ è data da
$\Lambda^r(\mathfrak{B}) = \{v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_r} : j_i \in 1 \ldots n$ tutti distinti$\}$ per cui abbiamo che
$\dim(\Lambda^r(V)) = \binom{n}{r}$. Ricordando poi che $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$ e la definizione di algebra esterna abbiamo che

$$\dim(\Lambda(V)) = 2^n$$

Proposizione $v_1 \ldots v_r \in V$ linearmente indipendenti $\Leftrightarrow v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \neq 0$

dimostrazione

1. $(\Rightarrow)$ Il fatto che $v_1 \ldots v_r$ siano indipendenti implica che questi costituiscano un sottoinsieme di una base $\mathfrak{B}$ di V; dunque $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ è un elemento di $\Lambda^r(\mathfrak{B})$ base di $\Lambda^r(V)$ e pertanto $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ è non nullo.

2. $(\Leftarrow)$ Usiamo la contronominale: siano $v_1 \ldots v_r \in V$ dipendenti, ad esempio sia $v_1 = \sum_{i=2}^{r} a_i v_i$,

   dunque $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = \sum_{i=2}^{r} a_i v_i \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r =$
   $= \sum_{i=2}^{r} a_i (v_i \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) = 0$

1.3 Algebra simmetrica

Definizione Dato $r \in \mathbb{N}$ definiamo delle applicazioni lineari
$S_r : T^r(V) \to T^r(V)$, definite sugli elementi semplici da:

$$S_r(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}$$

Definiamo poi l'applicazione lineare $S : T(V) \to T(V)$ **simmetrizzatore** come

$$S = \bigoplus_{r \geq 0} S_r$$

dove quindi per definizione avremo $S|_{T^r(V)} = S_r$.

Proposizione (Proprietà del simmetrizzatore) Si ha

(a) $\forall\, r \in \mathbb{N} : r \geq 2\ ,\ \forall\, \sigma \in \Sigma(r)\ ,\ \forall t \in T^r(V)$ vale $S_r(L_\sigma(t)) = L_\sigma(S_r(t)) =$
$= S_r(t)$ quindi $S(L_\sigma(t)) = L_\sigma(S(t)) = S(t)$

(b) $S^2 = S$

(c) $S_r \circ A_r = A_r \circ S_r = 0$ quindi $S \circ A = A \circ S = 0$

dimostrazione

(a) La dimostrazione è analoga a quella per l'alternatore

(b) Anche questa proprietà si dimostra in maniera analoga a quella dell'alternatore

(c) Sia ora $t = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \in T^r(V)$, ricordando che per $r \geq 2$ in $\Sigma(r)$ il numero delle permutazioni pari è uguale al numero delle permutazioni dispari, ovvero $\sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \operatorname{sgn}(\sigma) = 0$, abbiamo che:

$$S \circ A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = S\left(\frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \operatorname{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}\right) =$$
$$= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \operatorname{sgn}(\sigma) S\left(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}\right) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \operatorname{sgn}(\sigma) S(L_\sigma(t)) =$$
$$= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot S(t) = \frac{1}{r!} \cdot S(t) \cdot \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \operatorname{sgn}(\sigma) = 0$$

Analogamente si arriva a dimostrare che $A \circ S(t) = 0$.

□

Osservazione Per $r = 1$ abbiamo che $A_1(v) = S_1(v) = v\ \forall v \in V$.

Proposizione Detto $\mathfrak{J}$ ideale bilatero di $T(V)$ generato dagli elementi della forma $v \wedge w\ , v, w \in V$, abbiamo che $\ker(S) = \mathfrak{J}$

dimostrazione Siano $v, w \in V$, e siano a e b tali che $A(a) = v$ e $A(b) = w$
$S(v \wedge w) = S(A(a \otimes b)) = 0$ dunque $\mathfrak{J} \subseteq \ker(S)$. Consideriamo ora la proiezione canonica $\pi : T(V) \to T(V)/\mathfrak{J}$ e indichiamo con $\cdot$ la moltiplicazione nell'algebra quoziente. Abbiamo che

$$0 = \pi(v \wedge w) = \pi(A(a \otimes b)) = \pi\left(\frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v)\right) = \frac{1}{2}\pi(v \otimes w - w \otimes v) = \frac{1}{2}(\pi(v \otimes w) - \pi(w \otimes v)),$$

dunque $\pi(v)\pi(w) = \pi(w)\pi(v)\ \forall\ v, w \in V$,
da cui si deduce che $T(V)/\mathfrak{J}$ è anello commutativo. Dunque
$\pi(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}) = \pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)$ per cui

$$\pi(S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)) = \pi\left(\frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in \Sigma(r)} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}\right) =$$
$$= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \pi(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = \pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)$$

Otteniamo quindi che $\ker(S) \subseteq \ker(\pi) = \mathfrak{J}$, dunque $\ker(S) = \mathfrak{J}$.
□

Definizione Dato $r \in \mathbb{N}$ si definisce $S^r(V) = \mathrm{Im}(S_r) = S(T^r(V))$ i cui elementi sono detti r**-tensori simmetrici**. Si definisce poi

$$S(V) = \mathrm{Im}(S) = \bigoplus_{r \geq 0} S^r(V)$$

l'**algebra simmetrica su** V.
Analogamente a quello che abbiamo fatto per l'algebra esterna, è possibile definire un prodotto all'interno di $S(V)$ tale che esso sia un anello associativo commutativo. All'interno di $S(V)$ definiamo il **prodotto simmetrico** come

$$\begin{array}{rccl} \odot: & S(V) \times S(V) & \longrightarrow & S(V) \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha \odot \beta = S(a \otimes b) \end{array}$$

dove $S(a) = \alpha$ e $S(b) = \beta$.

Definizione Data f forma r-multilineare su V^*, essa è detta r**-forma multilineare simmetrica** se verifica

$$f(v^*_{\sigma(1)}, \dots, v^*_{\sigma(r)}) = f(v^*_1, \dots, v^*_r) \ \forall \ \sigma \in \Sigma(r)$$

Lo spazio delle forme r-multilineari simmetriche su V^* è un sottospazio delle forme r-multilineari su V^*; analogamente a ciò che abbiamo visto per l'algebra esterna otteniamo che $S^r(V)$ è identificato con lo spazio delle funzioni r-multilineari simmetriche su V^*.

Osservazione Detta n dimensione di V sia $\mathfrak{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ una sua base. Otteniamo che una base di $S^r(V)$ è data da $S^r(\mathfrak{B}) = \{v_{j_1} \odot \dots \odot v_{j_r} : 1 \leq j_1 \leq j_r \leq n\}$, dunque un elemento di $S^r(\mathfrak{B})$ si ottiene facendo il prodotto simmetrico di r elementi della base $\mathfrak{B}$ non necessariamente distinti tra loro, da cui otteniamo che

$$\dim(S^r(V)) = \binom{n+r-1}{r}$$

e che $S(V)$ ha dimensione infinita.

Proposizione $T^2(V) = \Lambda^2(V) \oplus S^2(V)$

dimostrazione Ricordandoci che $\ker(S) = \mathfrak{J}$, otteniamo per $r = 2$ che
$\ker(S_2) = \big\{t \in T^2(V) : S_2(t) = 0\big\} = \big\{v \otimes w \in T^2(V) : S(v \otimes w) = 0\big\} =$
$= \big\{v \otimes w \in T^2(V) : \exists h, k \in V \text{ t.c. } v \otimes w = h \wedge k\big\} =$
$= \big\{t \in T^2(V) : t = h \wedge k\big\} = \big\{t \in T^2(V) : t \in \Lambda^2(V)\big\} = \Lambda^2(V)$. Dalla proprietà del simmetrizzatore possiamo scomporre $T^r(V)$ in $\ker(S_r) \oplus \mathrm{Im}(S_r)$, dunque otteniamo $T^2(V) = \ker(S_2) \oplus \mathrm{Im}(S_2) = \Lambda^2(V) \oplus S^2(V)$
$\square$
Questa è una proprietà che per $r \geq 3$ non vale più, e ciò è dovuto al fatto che $\ker(S_r)$ per $r \geq 3$ è strettamente più grande di $\Lambda^r(V)$, infatti $\ker(S_r)$ contiene elementi del tipo $v \wedge w \otimes u \otimes \dots \otimes u$ che invece non stanno in $\Lambda^r(V)$. L'importanza di questa ultima proposizione è che, ricordando il significato di $\Lambda^2(V)$ e $S^2(V)$, ci permette di dedurre un risultato sulle forme bilineari:

Teorema Dato V spazio vettoriale di dimensione finita, si ha che ogni forma bilineare su V^* si può scrivere in modo unico come somma diretta di una forma bilineare alternante e una forma bilineare simmetrica.

Capitolo 2

Algebre di Clifford

Si considerino le notazioni di algebra tensoriale in [DeB], mostriamo ora che ad ogni forma quadratica su uno spazio vettoriale V corrisponde una moltiplicazione su $\Lambda(V)$ la quale dà luogo ad una struttura di algebra associativa, che verrà chiamata algebra di Clifford.

Lemma Sia V spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ dotato di una forma quadratica q. Detta $T(V)$ l'algebra tensoriale su V, $\Lambda(V)$ l'algebra esterna su V e $\mathfrak{I}_q$ l'ideale bilatero di $T(V)$ generato dagli elementi del tipo $v \otimes v + q(v)$, $v \in V$ abbiamo che

$$T(V) = \Lambda(V) \oplus \mathfrak{I}_q$$

dimostrazione Per prima cosa dimostriamo che $\mathfrak{I}_q \cap \Lambda(V) = 0$.
Sia $t \in \mathfrak{I}_q \cap \bigoplus_{r=0}^{k} \Lambda^r(V)$ per qualche k. Allora posso esprimere t come

$$t = \sum_{h=1}^{p} s_h \otimes (v_h \otimes v_h + q(v_h)) + (w_h \otimes w_h + q(w_h)) \otimes d_h$$

con $s_h, d_h \in \bigoplus_{r=0}^{k-2} \Lambda^r(V)$ e $v_h, w_h \in V$, $1 \leq h \leq p$.
Sia $A : T(V) \to T(V)$ l'alternatore sull'algebra tensoriale.
Si ha che $t \in \bigoplus_{r=0}^{k} \Lambda^r(V)$ implica che $t \in \Lambda(V) = \mathrm{Im}(A)$, quindi esiste $\bar{t}$ tale che $A(\bar{t}) = t$ e per le proprietà dell'alternatore $A(t) = A(A(\bar{t})) = A^2(\bar{t}) = A(\bar{t}) = t$. Dunque

$$A(t) = t = A\left(\sum_{h=1}^{p} s_h \otimes (v_h \otimes v_h + q(v_h)) + (w_h \otimes w_h + q(w_h)) \otimes d_h\right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{p} A(s_h \otimes (v_h \otimes v_h + q(v_h))) + \sum_{h=1}^{p} A((w_h \otimes w_h + q(w_h)) \otimes d_h)$$

ma $A(s_h \otimes (v_h \otimes v_h + q(v_h))) = A(s_h \otimes v_h \otimes v_h) + A(s_h q(v_h))$ e, sempre per le proprietà dell'alternatore, $A(s_h \otimes v_h \otimes v_h) = 0$ e essendo $s_h \in \bigoplus_{r=0}^{k-2} \Lambda^r(V)$ esiste $\bar{s}_h$ tale che $A(\bar{s}_h) = s_h$ dunque
$A(s_h q(v_h)) = A(A(\bar{s}_h)) = s_h q(v_h)$ e quindi
$A(s_h \otimes (v_h \otimes v_h + q(v_h))) = s_h q(v_h)$ per cui

$$A(t) = t = \sum_{h=1}^{p} s_h q(v_h) + d_h q(w_h) \ \in \bigoplus_{r=0}^{k-2} \Lambda^r(V)$$

Proseguendo con questo procedimento, otteniamo $t = 0$ e quindi $\Lambda(V) \cap \mathfrak{I}_q = 0$. Per dimostrare che $T(V) \subseteq \Lambda(V) \oplus \mathfrak{I}_q$ consideriamo $\bigoplus_{r=0}^{k} T^r(V)$ e procediamo per induzione su k.
Per $k = 1$ l'inclusione viene verificata, infatti $T^0(V) \oplus T^1(V) = \mathbb{K} \oplus V \subset \Lambda(V) \oplus \mathfrak{I}_q$
Supponiamo ora l'inclusione vera per tutti gli $m \leq k$ e la dimostriamo per $k + 1$, supponiamo quindi $\bigoplus_{r=0}^{k} T^r(V) \subseteq \Lambda(V) \oplus \mathfrak{I}_q$ e sia $t \in T^{k+1}(V)$ abbiamo che
$t = A(t) + t - A(t)$, inoltre $t - A(t) \in \ker(A)$ poiché $A(t - A(t)) = A(t) - A^2(t) = A(t) - A(t) = 0$ per cui $t = A(t) + \sum_{h=1}^{p} s_h \otimes (v_h \otimes v_h) + (w_h \otimes w_h) \otimes d_h$ con $s_h, d_h \in \bigoplus_{r=0}^{k-1} T^r(V)$ i quali, per ipotesi induttiva sono contenuti in $\Lambda(V) \oplus \mathfrak{I}_q$ per cui
$t = A(t) + \sum_{h=1}^{p} s_h \otimes (v_h \otimes v_h + q(v_h)) + (w_h \otimes w_h + q(w_h)) \otimes d_h - \sum_{h=1}^{p} (s_h q(v_h) + d_h q(w_h)) \in \Lambda(V) \oplus \mathfrak{I}_q$
□
Sia ora π_q la proiezione $\pi_q : T(V) \to \Lambda(V)$ indotta dalla scomposizione del Lemma, questo implica che esiste su $\Lambda(V)$ un'unica struttura di $\mathbb{K}$-algebra associativa che renda π_q un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre.

Definizione $\Lambda(V)$ dotata del prodotto indotto dalla scomposizione del Lemma definito come, dati $\alpha, \beta \in \Lambda(V)$ e $t, s \in T(V)$ tali che $\pi_q(t) = \alpha$ e $\pi_q(s) = \beta$, $\alpha \cdot \beta = \pi_q(t \otimes s)$ ha una struttura di $\mathbb{K}$-algebra associativa detta **algebra di Clifford** su V rispetto a q e si indica col simbolo $Cl(V, q)$. Gli elementi di V fanno parte dell'algebra di Clifford e si possono considerare immersi in essa, avremo quindi che $\pi_q(v) = v \ \forall \ v \in V$. Notiamo che, ricordando il nucleo dell'alternatore e la definizione di algebra esterna, nel caso in cui la forma quadratica q sia nulla, l'algebra di Clifford coincide con l'algebra esterna.
Ricordiamo che un elemento ϕ è detto di grado puro s se $\phi \in T^s(V)$ e che ogni elemento di $T(V)$ è somma finita di elementi di grado puro.

Proposizione (Proprietà del prodotto nell'algebra di Clifford) Sia $Cl(V, q)$ algebra di Clifford di V su q e sia b la sua forma bilineare polarizzata, sia poi $\wedge$ il prodotto esterno su $\Lambda(V)$ e $\cdot$ il prodotto in $Cl(V, q)$. Abbiamo che:

(a) $\forall \ v_1, \ldots, v_r \in V \ \dfrac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathrm{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot v_{\sigma(r)} = v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$

(b) $\forall \ v, w \in V \ v \cdot w = v \wedge w - 1 \cdot b(v, w)$

(c) se $v_1, \ldots, v_r \in V$ mutuamente ortogonali, allora $v_1 \cdot \ldots \cdot v_r = v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$

dimostrazione

(a) detta π_q la proiezione canonica e ricordando che sugli elementi di V essa è un'immersione, otteniamo che
$$\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathrm{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot v_{\sigma(r)} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathrm{sgn}(\sigma) \pi_q(v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)}) =$$
$$= \pi_q \left(\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathrm{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)} \right) = \pi_q(A(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r)) =$$
$$= \pi_q(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_r.$$

(b) preliminarmente, osserviamo che dall'algebra tensoriale abbiamo che [DeB]
$\forall \ v, w \in V \ v \otimes w = A(v \otimes w) + S(v \otimes w) = \frac{1}{2} v \otimes w - \frac{1}{2} w \otimes v + \frac{1}{2} v \otimes w + \frac{1}{2} w \otimes v$
Possiamo quindi sfruttare la prima uguaglianza e ottenere $v \otimes w = v \wedge w + v \odot w$.
A questo punto otteniamo che:
$v \cdot w = \pi_q(v \otimes w) = \pi(v \wedge w - 1 \cdot b(v, w) + v \odot w + 1 \cdot b(v, w))$.

Dimostriamo ora che $v \odot w + b(v,w) \cdot 1 \in \mathfrak{I}_q$, per farlo abbiamo bisogno di esplicitare calcoli di algebra tensoriale, abbiamo: $v \odot w = \frac{1}{2} v \otimes w + \frac{1}{2} w \otimes v$.
Abbiamo poi $\frac{1}{2}((v+w) \otimes (v+w) - v \otimes v - w \otimes w) =$
$= \frac{1}{2}(v \otimes v + v \otimes w + w \otimes v + w \otimes w - v \otimes v - w \otimes w) = v \odot w$.
Dunque $v \odot w + b(v,w) \cdot 1 =$
$= \frac{1}{2}((v+w) \otimes (v+w) - v \otimes v - w \otimes w) + \frac{1}{2} 1 \cdot (q(v+w) - q(v) - q(w)) =$
$= \frac{1}{2}((v+w) \otimes (v+w) + 1 \cdot q(v+w) - (v \otimes v + 1 \cdot q(v)) - (w \otimes w + 1 \cdot q(w)))$
cioè $v \odot w + b(v,w) \cdot 1 \in \mathfrak{I}_q$ poiché somma di elementi di $\mathfrak{I}_q$ e quindi
$\pi_q(v \odot w + 1 \cdot b(v,w)) = 0$.
Tornando alla tesi, otteniamo:
$v \cdot w = \pi_q(v \wedge w - 1 \cdot b(v,w) + v \odot w + 1 \cdot b(v,w)) =$
$= \pi_q(v \wedge w - 1 \cdot b(v,w)) = v \wedge w - 1 \cdot b(v,w)$.

(c) direttamente da (a) e (b)

□

Osservazione Direttamente dal punto (b) della proposizione precedente otteniamo che
$\forall\, v, w \in V \;\; v \cdot w + w \cdot v = -2b(v,w)$ e che $\forall\, v \in V \;\; v^2 = -q(v)$

Teorema (Caratterizzazione delle algebre di Clifford) Sia $\mathcal{A}$ una $\mathbb{K}$-algebra sia poi
$f : V \to \mathcal{A}$ applicazione lineare tale che $\forall\, v \in V \;\; f(v)^2 = -q(v) \cdot 1$.
Allora $\exists!\ \hat{f}$ estensione di f, $\hat{f} : Cl(V,q) \to \mathcal{A}$ omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre.

dimostrazione f si estende ad un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre
$\tilde{f} : T(V) \to \mathcal{A}$ ponendo $\tilde{f}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) = f(v_1) \ldots f(v_r)$. Ricordando che $\mathfrak{I}_q$ è generato da elementi del tipo
$v \otimes v + q(v) \cdot 1$, $v \in V$, si ottiene che $\mathfrak{I}_q \subseteq \ker(\tilde{f})$. Dal teorema fondamentale di omomorfismo tra anelli, indicando con π_q la proiezione canonica, segue $\hat{f}(\pi_q(\alpha)) = \tilde{f}(\alpha)$, cioè $\hat{f} \circ \pi_q = \tilde{f}$ ottenendo che $\hat{f}$ è omomorfismo tra $Cl(V,q)$ e $\mathcal{A}$. L'unicità è ovvia.
□
Un risultato dovuto a questo teorema è che un elemento di $O(V,q)$ si estende ad un automorfismo di $Cl(V,q)$. Possiamo utilizzare questo teorema sostituendo ad $\mathcal{A}$ l'algebra di Clifford $Cl(V,q)$ e chiamiamo

$$\begin{array}{rccc} a: & V & \to & Cl(V,q) \\ & v & \mapsto & -v \end{array}$$

essa è applicazione lineare in $O(V,q)$ ed inoltre per il teorema precedente possiamo estendere a ad un automorfismo α di $Cl(V,q)$:

$$\alpha : Cl(V,q) \longrightarrow Cl(V,q)$$

si avrà che $\alpha^2 = \mathrm{id}$ e che questo morfismo (sempre per il teorema precedente) è unico.

Definizione Definiamo **automorfismo principale** dell'algebra di Clifford $Cl(V,q)$ l'automorfismo α ottenuto estendendo l'applicazione ortogonale $a : v \mapsto -v$. Avendo $\alpha^2 = \mathrm{id}$ e definendo
$Cl^i(V,q) = \left\{\phi \in Cl(V,q) \,:\, \alpha(\phi) = (-1)^i \phi\right\}$, $i = 0, 1$, otteniamo che

$$Cl(V,q) = Cl^0(V,q) \oplus Cl^1(V,q)$$

definiremo $Cl^0(V,q)$ **parte pari** dell'algebra di Clifford e $Cl^1(V,q)$ **parte dispari**. Essendo α morfismo abbiamo che $\alpha(\phi_1\phi_2) = \alpha(\phi_1)\alpha(\phi_2)$ ciò comporta che [LM]

$$Cl^i(V,q) \cdot Cl^j(V,q) \subseteq Cl^{i+j}(V,q)$$

Un'algebra che verifica una scomposizione come quella qui sopra è detta **algebra $\mathbb{Z}_2$-graduata** [DeB], e diremo che gli elementi di $Cl^i(V,q)$ hanno grado i.
All'interno di un'algebra $\mathbb{Z}_2$-graduata possiamo introdurre un prodotto $\mathbb{Z}_2$-graduato, indicato con $\hat{\otimes}$ e definito nel modo seguente:
siano date A, B due $\mathbb{K}$-algebre $\mathbb{Z}_2$-graduate, sull'insieme $A \otimes B$ definiamo il
prodotto tensoriale $\mathbb{Z}_2$-graduato $A\hat{\otimes}B$ come

$$\begin{array}{cccc} \hat{\otimes}: & (A\otimes B)\times(A\otimes B) & \longrightarrow & A\otimes B \\ & (a\otimes b, a'\otimes b') & \longmapsto & (-1)^{\deg(a')\deg(b)}(a\cdot a'\otimes b\cdot b') \end{array}$$

Dimostriamo ora un risultato che lega la divisione in parti q-ortogonali di uno spazio vettoriale V con il prodotto $\mathbb{Z}_2$-graduato:

Proposizione Sia V spazio vettoriale tale che $V = V_1 \oplus V_2$ con V_1 , V_2 spazi q-ortogonali tra di loro. Nominiamo $q|_{V_j} = q_j$. Allora
$\exists\ \hat{f}$ isomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre $\hat{f} : Cl(V,q) \to Cl(V_1,q_1)\hat{\otimes}Cl(V_2,q_2)$

dimostrazione Consideriamo

$$\begin{array}{cccc} f: & V = V_1\oplus V_2 & \longrightarrow & Cl(V_1,q_1)\hat{\otimes}Cl(V_2,q_2) \\ & v = v_1+v_2 & \longmapsto & f(v) = v_1\otimes 1 + 1\otimes v_2 \end{array}$$

Abbiamo:
$(f(v))^2 = f(v)\hat{\otimes}f(v) = (v_1\otimes 1 + 1\otimes v_2)\hat{\otimes}(v_1\otimes 1 + 1\otimes v_2) = (v_1\otimes 1)\hat{\otimes}(v_1\otimes 1) + (1\otimes v_2)\hat{\otimes}(v_1\otimes 1) + (v_1\otimes 1)\hat{\otimes}(1\otimes v_2) + (1\otimes v_2)\hat{\otimes}(1\otimes v_2) = (v_1)^2(1\otimes 1) + (-1)(v_1\otimes v_2) + v_1\otimes v_2 + (v_2)^2(1\otimes 1) = -q(v_1) - v_1\otimes v_2 + v_1\otimes v_2 - q(v_2) = -q(v_1+v_2) = -q(v)$
La nostra funzione f verifica quindi l'ipotesi del teorema di caratterizzazione, per cui
$\exists\ \hat{f} : Cl(V,q) \to Cl(V_1,q_1)\hat{\otimes}Cl(V_2,q_2)$ omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre.
Abbiamo per definizione di f che $\mathrm{Im}(\hat{f}) \supset Cl(V_1,q_1)\hat{\otimes}1$ e che $\mathrm{Im}(\hat{f}) \supset 1\hat{\otimes}Cl(V_2,q_2)$, per cui $\hat{f}$ è suriettiva.
Per quanto riguarda l'iniettività, si ha che
$\dim(Cl(V,q)) = 2^n = 2^{\dim(V_1)+\dim(V_2)} = \dim(Cl(V_1,q_1)\hat{\otimes}Cl(V_2,q_2))$ per cui $\hat{f}$ è isomorfismo di algebre.
$\square$

Definizione Diamo ora alcune definizioni di sottoinsiemi di $Cl(V,q)$ dei quali ci interessano le proprietà:
$V^\times = \{v \in V : q(v) \neq 0\}$
$Cl^\times(V,q) = \{\alpha \in Cl(V,q) : \exists\ \alpha^{-1}$ tale che $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1\}$
Notiamo che gli elementi di $V^\times$ appartengono a $Cl^\times(V,q)$, infatti $v^{-1} = \dfrac{-v}{q(v)}\ \forall\ v \in V^\times$
dunque $V^\times \subset Cl^\times(V,q)$.

Definizione Dato $\phi \in Cl^\times(V,q)$ definiamo **rappresentazione aggiunta modificata di** ϕ la funzione

$$\begin{array}{cccccc} \tilde{\mathrm{Ad}}: & Cl^\times(V,q) & \to & \mathrm{GL}(Cl(V,q)) & & \\ & \phi & \mapsto & \tilde{\mathrm{Ad}}_\phi : & Cl(V,q) \to & Cl(V,q) \\ & & & & \beta \mapsto & \alpha(\phi)\cdot\beta\cdot\phi^{-1} \end{array}$$

Definiamo inoltre

$$\mathrm{P}_q = \{\phi \in Cl^\times(V,q) : \tilde{\mathrm{Ad}}_\phi(V) = V\}$$

Abbiamo poi una rappresentazione di gruppo di P_q in V

$$\begin{array}{cccc} \rho: & \mathrm{P}_q & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & \phi & \longmapsto & \mathrm{Ad}_\phi|_V \end{array}$$

Abbiamo che P_q è sottogruppo di $Cl^\times(V,q)$, inoltre avremo $\tilde{\mathrm{Ad}}_{\phi_1\phi_2} = \tilde{\mathrm{Ad}}_{\phi_1}\circ\tilde{\mathrm{Ad}}_{\phi_2}$ e che $\forall\ v \in V\ \rho(v) = \rho_v$:

Proposizione (Legame tra la rappresentazione aggiunta modificata e le simmetrie rispetto a iperpiani) Siano V spazio vettoriale e q forma quadratica su V non degenere. Sia $w \in V^{\times}$, allora

$$\tilde{\mathrm{Ad}}_w(V) = V \text{ e } \tilde{\mathrm{Ad}}_w(v) = v - \frac{2b(w,v)}{q(w)} w \ \forall v \in V$$

dimostrazione Essendo $w \in V^{\times}$, abbiamo che $w^{-1} = \dfrac{-w}{q(w)}$
Abbiamo inoltre che $v \cdot w + w \cdot v = -2b(w,v)$ dunque
$q(w)\tilde{\mathrm{Ad}}_w(v) = q(w)(-w) \cdot v \cdot w^{-1} = w \cdot v \cdot w = w \cdot (v \cdot w) =$
$= w \cdot (-w \cdot v - 2b(w,v) \cdot 1) = -w^2 \cdot v - 2wb(w,v) = q(w)v - 2b(w,v)w$
per cui
$\tilde{\mathrm{Ad}}_w(v) = v - \dfrac{2b(w,v)}{q(w)} w$
Detta quindi ρ_w simmetria rispetto all'iperpiano $w^{\perp}$ si ha $\rho_w = \rho(w)$
□

Osservazione Dato $\phi \in Cl^{\times}(V,q)$ in generale $\tilde{\mathrm{Ad}}_\phi$ non è automorfismo dell'algebra $Cl(V,q)$. Sia ad esempio $e \in V$ tale che $q(e) = 1$. Allora abbiamo che $(1+e)^{-1} = \dfrac{1}{2}(1-e)$, infatti $(1+e)(1-e) = (1 + e - e - e^2) = (1+1) = 2$ e $\alpha(1+e) = (1-e)$. Calcoliamo $\tilde{\mathrm{Ad}}_{1+e}(1)$, in generale abbiamo che $\tilde{\mathrm{Ad}}_{1+e}(\beta) = \dfrac{1}{2}(1-e) \cdot \beta \cdot (1-e)$ e in particolare $\tilde{\mathrm{Ad}}_{1+e}(1) = \dfrac{1}{2}(1-e)^2 = -e$, dunque $\tilde{\mathrm{Ad}}_{1+e}$ non è automorfismo.

Proposizione Supponiamo V spazio vettoriale dotato di una forma quadratica q non degenere, allora $\ker(\rho) = \mathbb{K}^* = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \neq 0\}$, inoltre:

$$\rho(\mathrm{P}_q) = O(V,q)$$

$$\mathrm{P}_q = \{v_1 \cdot \ldots \cdot v_r \in Cl(V,q) : v_1 \ldots v_r \in V^{\times}\}$$

Per la dimostrazione, si veda [DeB] oppure [LM].

Osservazione Se $\phi \in \mathrm{P}_q$ allora esistono $v_1 \cdot \ldots \cdot v_r \in V^{\times} : \phi = v_1 \cdot \ldots \cdot v_r$ e dunque $\phi \cdot \alpha(\phi^{-1}) = \alpha(\phi) \cdot \phi^{-1} = \alpha(v_1 \cdot \ldots \cdot v_r) \cdot \phi^{-1} = (-1)^r v_1 \cdot \ldots \cdot v_r \cdot \phi^{-1} = (-1)^r \phi \cdot \phi^{-1} = (-1)^r = \det(\rho(\phi))$ quindi: $\det(\rho(\phi)) = \phi \cdot \alpha(\phi^{-1})$
A questo punto possiamo fare una distinzione tra gli elementi $\phi \in \mathrm{P}_q$ tali che $\phi \cdot \alpha(\phi^{-1}) = 1$ oppure $\phi \cdot \alpha(\phi^{-1}) = -1$. Definiamo

$$\mathrm{SP}_q = \mathrm{P}_q \cap Cl^0(V,q) = \{\phi \in \mathrm{P}_q : \phi \cdot \alpha(\phi^{-1}) = \det(\rho(\phi)) = 1\}$$

Ricapitolando, prendendo su un elemento di P_q

$$\mathrm{P}_q = \{v_1 \cdot \ldots \cdot v_r \in Cl(V,q) : v_1 \ldots v_r \in V^{\times}\}$$

la rappresentazione aggiunta modificata ristretta allo spazio vettoriale V, ponendo

$$\tilde{\mathrm{Ad}}_{v_1 \ldots v_r}|_V = \rho_{v_1} \circ \ldots \circ \rho_{v_r}$$

dove ρ_v indica la riflessione rispetto all'iperpiano $v^{\perp}$, otteniamo che essendo $\rho(\mathrm{P}_q) = O(V,q)$, congiuntamente al Teorema di Cartan-Dieudonné, il morfismo ρ è suriettivo [LM].
La descrizione qui sopra di P_q ci dice che un elemento di SP_q può essere scritto come prodotto di elementi di $V^{\times}$, dimostriamo che questi devono essere in numero pari:

Proposizione $\mathrm{SP}_q = \{v_1 \cdot \ldots \cdot v_r \in Cl(V,q) : v_1 \ldots v_r \in V^{\times} \text{ e } r \text{ è pari}\}$

dimostrazione Sia $\phi \in \mathrm{SP}_q$, essendo $\mathrm{SP}_q \subset \mathrm{P}_q$, possiamo scrivere
$\rho(\phi) = \rho(v_1) \cdot \ldots \cdot \rho(v_r)$ dunque $1 = \det(\rho(\phi)) = \det(\rho(v_1)) \ldots \det(\rho(v_r)) = \det(\rho_{v_1}) \ldots \det(\rho_{v_r}) = (-1)^r$ quindi r è pari.
□
Quest'ultima osservazione comporta che $\rho(\mathrm{SP}_q) = SO(V, q)$ e che tale morfismo è suriettivo [LM].

Definizione Ci apprestiamo ora a dare alcune definizioni di sottogruppi notevoli di P_q: definiamo

$$\mathrm{Pin}_q = \{v_1 \cdot \ldots \cdot v_r \in \mathrm{P}_q : q(v_j) = \pm 1 \ \forall j\}$$

il **gruppo Pin**, e definiremo il **gruppo Spin** come

$$\mathrm{Spin}_q = \mathrm{Pin}_q \cap \mathrm{SP}_q$$

È naturale chiedersi in quali casi la rappresentazione aggiunta modificata ristretta ai gruppi Pin e Spin sia una mappa nel gruppo ortogonale e ortogonale speciale rispettivamente.

Definizione Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica diversa da 2. Esso è detto **campo spin** se una tra le due equazioni $t^2 = a$ oppure $t^2 = -a$ ammette soluzione in $\mathbb{K}$.

Osservazione $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ con p primo tale che $p \equiv 3 \pmod 4$ sono campi spin [LM].
Sia ora V spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, dato che
$\forall\, v \in V$ vale $\rho_{tv} = \rho_v \ \forall\, t \in \mathbb{K}^*$ per un generico spazio vettoriale, ci chiediamo se sia sempre possibile normalizzare i vettori, cercando un t per cui $q(tv)$ sia uguale a ± 1. Dato che q è forma quadratica, cercare un t che risolva $q(tv) = t^2 q(v) = \pm 1$ equivale a risolvere l'equazione $t^2 = \pm a$, la quale non sempre è risolubile nel campo $\mathbb{K}$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$ almeno una delle due è sempre risolubile. Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, non è sempre possibile normalizzare un vettore.
Quindi, dato uno spazio vettoriale costruito su un campo spin dotato di forma quadratica q, ogni vettore può essere normalizzato in modo tale che abbia q-lunghezza ± 1.

Teorema Sia V spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{R}$ dotato di una forma quadratica q non degenere. Si hanno allora le seguenti successioni esatte corte:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}_q \xrightarrow{\rho} SO(V, q) \longrightarrow 1$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Pin}_q \xrightarrow{\rho} O(V, q) \longrightarrow 1$$

dimostrazione Supponiamo che $\phi = v_1 \cdot \ldots \cdot v_r \in \mathrm{Pin}_q$ sia anche in $\ker(\rho)$ dunque che ad $\tilde{\mathrm{Ad}}_\phi$ venga associata la matrice identità: $\tilde{\mathrm{Ad}}_\phi(v) = v \ \forall\, v \in V$. Dato che $\ker(\rho) = \mathbb{R}^*$, allora $\phi \in \mathbb{R}^*$ e dunque $\phi^2 = 1$ (poiché prodotto di elementi di Pin_q), questo ci dice che $\phi = \pm 1$ per cui in entrambi i casi (sia per Pin_q che per Spin_q) ρ ha nucleo $\mathbb{Z}_2$.
Per quanto riguarda la suriettività, prendiamo $g \in O(V, q)$, per il teorema di Cartan-Dieudonné esistono $v_1, \ldots, v_r \in V$ tali che $g = \rho_{v_1} \circ \ldots \circ \rho_{v_r}$. Essendo $\mathbb{R}$ campo di tipo spin, possiamo normalizzare i vettori in modo tale che risultino di q-norma ± 1, detti v_i' i nuovi v_i normalizzati, abbiamo che $\rho_{v_i} = \rho_{v_i'}$ e quindi scrivendo $\phi = v_1' \cdot \ldots \cdot v_r'$ abbiamo che $\phi \in \mathrm{Pin}_q$ ed esso è tale che $\tilde{\mathrm{Ad}}_\phi = \rho_{v_1'} \circ \ldots \circ \rho_{v_r'} = \rho_{v_1} \circ \ldots \circ \rho_{v_r} = g$, abbiamo quindi dimostrato la suriettività di ρ. Nel caso del gruppo Spin_q l'unica differenza sta nel fatto che la normalizzazione porta a vettori di q-lunghezza uguali a 1. Dunque abbiamo due successioni esatte corte.
□
Continuiamo ad esaminare il caso reale. Dato uno spazio vettoriale n-dimensionale V su $\mathbb{R}$ dotato di una forma quadratica q non degenere, sappiamo che possiamo trovare una base di $V \simeq \mathbb{R}^n$ tale che
$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_{r+s}^2$ dove $r + s = n$ e $0 \leq r <, n$ ottenendo dunque che (V, q) è isometrico come spazio vettoriale a $(\mathbb{R}^n, g_{A_{r,s}})$ dove $A_{r,s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$ [DeB].

Definizione In base a ciò che abbiamo detto finora, definiamo

$$Cl_{r,s} = Cl_{g_{A_{r,s}}}(\mathbb{R}^{r+s})$$

Definiamo poi $\mathrm{P}_{r,s} = \mathrm{P}_{g_{A_{r,s}}}$, $\mathrm{Pin}_{r,s} = \mathrm{Pin}_{g_{A_{r,s}}}$ e $\mathrm{Spin}_{r,s} = \mathrm{Spin}_{g_{A_{r,s}}}$.

Osservazione Sappiamo che $Cl_{r,s}$, essendo algebra di Clifford, è un'algebra $\mathbb{Z}_2$-graduata, inoltre, dotato della forma quadratica $q = g_{A_{r,s}}$ sappiamo anche che $\mathbb{R}^{r+s}$ è scomponibile in una somma diretta di componenti q-ortogonali, esattamente $r+s$ componenti. Possiamo infatti scomporre $(\mathbb{R}^{r+s}, g_{A_{r,s}})$ in $(\mathbb{R}^r, g_{A_{r,0}})$ e $(\mathbb{R}^s, g_{A_{0,s}})$ [DeB], scomponendo ulteriormente queste due componenti e applicando la proprietà della scomposizione di uno spazio vettoriale in parti ortogonali, otteniamo che

$$Cl_{r,s} = \underbrace{Cl_{1,0}\hat{\otimes}\dots\hat{\otimes}Cl_{1,0}}_{r \text{ volte}} \hat{\otimes} \underbrace{Cl_{0,1}\hat{\otimes}\dots\hat{\otimes}Cl_{0,1}}_{s \text{ volte}}$$

Proposizione Si ha la successione esatta corta

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}_n \to SO(n) \to 1$$

inoltre, per $n \geq 3$, Spin_n è rivestimento universale a due fogli di $SO(n)$.

dimostrazione Per il teorema precedente, la successione è esatta corta e il nucleo è dato da $\mathbb{Z}_2$. La funzione ρ quindi è suriettiva, ma non iniettiva, precisamente ad ogni elemento di $SO(n)$ corrispondono due controimmagini. Per $n \geq 3$ inoltre, Spin_n è rivestimento universale di $SO(n)$ [LM], questo non vale per $n = 2$, poiché $\mathrm{Spin}_2 \simeq S^1$ e $SO(2) \simeq S^1$.
$\square$

Osservazione Detto $Cl_{n,0} = Cl_n$ si ha che esso è isomorfo come spazio vettoriale a $\mathbb{R}^{2^n}$ e che come algebra è generato dagli elementi $e_1, \dots, e_n$ che verificano la relazione $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}$ [DeB]

Proposizione Si hanno i seguenti isomorfismi di $\mathbb{R}$-algebre [DeB]

(a) $Cl_{1,0} \simeq \mathbb{C}$

(b) $Cl_{0,1} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

(c) $Cl_{1,1} \simeq \mathbb{R}(2)$

(d) $Cl_{2,0} \simeq \mathbb{H}$

(e) $Cl_{0,2} \simeq \mathbb{R}(2)$

(f) $Cl_{3,0} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$

dimostrazione

(a) Abbiamo $q(x) = x^2\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, e $Cl_1 = \{a + be_1 : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } e_1^2 = -1\}$. Sia $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ funzione lineare da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ definita da $f(x) = ix$. Abbiamo che $f(x)^2 = -x^2 = -q(x) \cdot 1$, per il teorema di caratterizzazione possiamo estendere f ad un morfismo di algebre $\hat{f}$ come

$$\begin{array}{cccc} \hat{f}: & Cl_1 & \to & \mathbb{C} \\ & a + be_1 & \mapsto & a + ib \end{array}$$

ottenendo che questo è isomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre.

(b) Abbiamo $q(x) = -x^2 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$, e $Cl_{0,1} = \{a + be_1 : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } e_1^2 = 1\}$. Sia $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \oplus \mathbb{R})$ funzione lineare definita da $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$. Otteniamo che $f(x)^2 = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} = -q(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per il teorema di caratterizzazione possiamo estendere f ad un morfismo di $\mathbb{R}$-algebre $\hat{f}$:

$$\begin{array}{cccc} \hat{f}: & Cl_{0,1} & \rightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \\ & a + be_1 & \mapsto & \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} \end{array}$$

ed è isomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre.

(c) Abbiamo $q(x) = x_1^2 - x_2^2 \ \forall \ x \in \mathbb{R}^2$, e $Cl_{1,1} = \{a + be_1 + ce_2 + de_1 \cdot e_2 : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } e_1^2 = e_2^2 = -1 \text{ e } (e_1 e_2)^2 = 1\}$. Sia $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}(2))$ definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & -x \end{pmatrix}$. Con questa definizione possiamo estendere f ad un isomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre

$$\begin{array}{cccc} \hat{f}: & Cl_{1,1} & \rightarrow & \mathbb{R}(2) \\ & a + be_1 + ce_2 + de_1 \cdot e_2 & \mapsto & \begin{pmatrix} a+b & -c-d \\ c-d & a-b \end{pmatrix} \end{array}$$

(d) Abbiamo $q(x) = x_1^2 + x_2^2 \ \forall \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, e
$Cl_2 = \{a + be_1 + ce_2 + de_1 \cdot e_2 : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } e_1^2 = e_2^2 = (e_1 e_2)^2 = -1\}$.
Sia ora $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{H})$ funzione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{H}$ definita da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ix_1 + jx_2$. Otteniamo $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^2 = (ix_1 + jx_2)^2 = -x_1^2 - x_2^2 = -q(x) \cdot 1$, possiamo quindi estendere f ad $\hat{f}$ ad un isomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre:

$$\begin{array}{cccc} \hat{f}: & Cl_2 & \rightarrow & \mathbb{H} \\ & a + a + be_1 + ce_2 + de_1 \cdot e_2 & \mapsto & a + ib + jc + kd \end{array}$$

(e) Analogamente a quanto abbiamo fatto finora, prendiamo $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -x \\ x & -y \end{pmatrix}$ e possiamo estenderla ad un isomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre

$$\begin{array}{cccc} \hat{f}: & Cl_{0,2} & \rightarrow & \mathbb{R}(2) \\ & a + a + be_1 + ce_2 + de_1 \cdot e_2 & \mapsto & \begin{pmatrix} a+c & -b+d \\ b+d & a-c \end{pmatrix} \end{array}$$

(f) Abbiamo $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ \forall \ x \in \mathbb{R}^3$, e
$Cl_3 = \{a + be_1 + ce_2 + de_3 + ge_1 \cdot e_2 + he_2 \cdot e_3 + le_1 \cdot e_3 + me_1 \cdot e_2 \cdot e_3 : a, b, c, d, g, h, l, m \in \mathbb{R} \text{ e } e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = (e_1 e_2)^2 = (e_2 e_3)^2 = (e_1 e_3)^2 = -1 \ , \ (e_1 e_2 e_3)^2 = 1\}$.
Nel considerare $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ come algebra, la moltiplicazione sarà componente per componente e $1_{\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Prendiamo $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$ definita come
$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_1 + jx_2 + kx_3 \\ -ix_1 - jx_2 - kx_3 \end{pmatrix}$, calcolando, abbiamo la verifica delle ipotesi del teorema di caratterizzazione, infatti

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} ix_1 + jx_2 + kx_3 \\ -ix_1 - jx_2 - kx_3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (ix_1 + jx_2 + kx_3)(ix_1 + jx_2 + kx_3) \\ (-ix_1 - jx_2 - kx_3)(-ix_1 - jx_2 - kx_3) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \end{pmatrix} = -q(x) \cdot 1$$

Possiamo quindi estendere f ad un isomorfismo di algebre $\hat{f}$ definito come

$$\begin{array}{cccc} \hat{f}: & Cl_3 & \rightarrow & \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \\ & a + be_1 + ce_2 + de_3 + ge_1 \cdot e_2 + he_2 \cdot e_3 + le_1 \cdot e_3 + me_1 \cdot e_2 \cdot e_3 & \mapsto & \begin{pmatrix} a + ib + jc + kd \\ m + ig + jh + kl \end{pmatrix} \end{array}$$

$\square$

Proposizione Per $r, s \geq 0$ si ha l'isomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre [LM]
$Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1} \simeq Cl_{r+1,s+1}$

dimostrazione Sia $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{r+s+2}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{r+s+2}$. Possiamo allora identificare $\mathbb{R}^{r+s}$ come il sottospazio di $\mathbb{R}^{r+s+2}$ generato dalla base $\{e_1, \dots, e_r, e_{r+2}, \dots, e_{r+s+1}\}$, ottenuto quindi togliendo i versori e_{r+1} e e_{r+s+2}. Siano poi a_1, a_2 vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$ considerati immersi in $Cl_{1,1}$. Sia ora $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^{r+s+2}, Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1})$ definita sugli elementi della base canonica come

$$f(e_j) = \begin{cases} e_j \otimes a_1 \cdot a_2 & \text{se } 1 \leq r \ , \ r+2 \leq j \leq r+s+1 \\ 1 \otimes a_1 & \text{se } j = r+1 \\ 1 \otimes a_2 & \text{se } j = r+s+2 \end{cases}$$

Siano $j, k \in \{1, \dots, r, r+2, \dots, r+s+1\}$ si ha:
$f(e_j)f(e_k) + f(e_k)f(e_j) =$
$= (e_j \otimes a_1 \cdot a_2) \cdot (e_k \otimes a_1 \cdot a_2) + (e_k \otimes a_1 \cdot a_2) \cdot (e_j \otimes a_1 \cdot a_2) =$
$= (e_j \cdot e_k + e_k \cdot e_j) \otimes (a_1 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_2) = -2\delta_{jk} \otimes (-1) = 2\delta_{jk} \otimes 1$
poiché $(a_1 \cdot a_2)^2 = -1$
Se $j, k \in \{r+1, r+s+2\}$, ad esempio $j = r+1$, $k = r+s+2$ si ha:
$f(e_j)f(e_k) + f(e_k)f(e_j) = (1 \otimes a_1) \cdot (1 \otimes a_2) + (1 \otimes a_2) \cdot (1 \otimes a_1) = 1 \otimes (a_1 \cdot a_2) + 1 \otimes (a_2 \cdot a_1) = 1 \otimes (a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_1) = 1 \otimes 2\delta_{jk}$
Siano ora $j \in \{1, \dots, r, r+2, \dots, r+s+1\}$ e $k \in \{r+1, r+s+2\}$, allora per $i = 1, 2$ abbiamo che:
$f(e_j)f(e_k) + f(e_k)f(e_j) = (e_j \otimes a_1 \cdot a_2) \cdot (1 \otimes a_i) + (1 \otimes a_i) \cdot (e_j \otimes a_1 \cdot a_2) = e_j \otimes (a_1 \cdot a_2 \cdot a_i) + e_j \otimes (a_i \cdot a_1 \cdot a_2) = 0$
Per come si comporta sugli elementi della base, abbiamo che la nostra funzione f appena definita è tale che $\forall \ v \in \mathbb{R}^{r+s+2}$ $f(v)^2 = -q(v)1 \otimes 1$, quindi per il teorema di caratterizzazione, possiamo estendere f ad un isomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre $\hat{f} : Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1} \to Cl_{r+1,s+1}$
$\square$

Corollario Si ha che
$Cl_{2,1} \simeq \mathbb{C}(2)$ e $Cl_{1,2} \simeq \mathbb{C}(2)$

dimostrazione Direttamente dalla proposizione precedente, otteniamo:
$Cl_{2,1} \simeq Cl_{1,0} \otimes Cl_{1,1} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2) = \mathbb{C}(2)$ e
$Cl_{1,2} \simeq C\mathit{0,1} \otimes Cl_{1,1} = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}(2) = \mathbb{C}(2)$
$\square$

2.1 Cl_2

Prendiamo ora $Cl_2 = Cl_{g_{A_{2,0}}}(\mathbb{R}^2) = Cl_{\langle,\rangle}(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{H}$ l'algebra di Clifford di $\mathbb{R}^2$ associata al prodotto scalare standard. In Cl_2 il prodotto di Clifford è l'usuale moltiplicazione tra quaternioni, e possiamo considerare l'immersione di $\mathbb{R}^2$ in Cl_2 come:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \hookrightarrow & Cl_2 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mapsto & ia + jb \end{array}$$

infatti, con questa corrispondenza, otteniamo che viene verificata l'identità
$v \cdot w = v \wedge w - 1 \cdot \langle v, w \rangle$. L'automorfismo principale $\alpha : Cl_2 \to Cl_2$ è definito come [DeB]

$$\begin{array}{cccc} \alpha : & \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & h & \longmapsto & \alpha(h) = -k \cdot h \cdot k \end{array}$$

da cui otteniamo che la parte pari dell'algebra è data da:
$Cl_2^0 = \{h \in \mathbb{H} : \ -khk = h\} = \{h \in \mathbb{H} : \ -k(h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3)k = h\} =$
$= \{h \in \mathbb{H} : h_0 - ih_1 - jh_2 + kh_3 = h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3\} = \{a + bk : a, b \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{C}.$

Sia poi $\phi = h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3 \in \mathbb{H}$, allora $\alpha(\phi) = h_0 - ih_1 - jh_2 + kh_3$
e $\phi^{-1} = \dfrac{\bar{\phi}}{|\phi|^2} = \dfrac{h_0 - ih_1 - jh_2 - kh_3}{h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$,
dunque
$Cl_2^{\times} = \{\phi \in \mathbb{H} : |\phi| \neq 0\}$ e $\mathbb{R}^{2\times} = \{ai + bj \in \mathbb{H} : a^2 + b^2 \neq 0\}$.
Possiamo quindi ricavare una espressione esplicita per la rappresentazione aggiunta modificata:

$$\begin{array}{rcccccl} \tilde{\mathrm{Ad}}: & Cl_2^{\times} & \to & \mathrm{GL}(Cl_2) & & & \\ & \phi & \mapsto & \tilde{Ad}_\phi : & Cl_2 & \to & Cl_2 \\ & & & & \beta & \mapsto & \alpha(\phi) \cdot \beta\phi^{-1} = -k\phi k\beta\phi^{-1} \end{array}$$

Abbiamo:
$$\mathrm{P}_2 = \left\{ h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3 \in \mathbb{H} : \begin{cases} h_0 = 0 \\ h_3 = 0 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

Ricordando che dalla teoria abbiamo $\mathrm{P}_2 = \{v_1 \cdot \ldots \cdot v_r \in Cl_2 : v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^{2\times}\}$, notiamo che il prodotto di elementi di $\mathbb{R}^2$ immersi in Cl_2 si comporta come segue:
$v_1 \cdot v_2 = (a_1 i + b_1 j)(a_2 i + b_2 j) = h_0 + kh_3$
$v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 = (h_0 + kh_3)(a_3 i + b_3 j) = ih_1 + jh_2$
Dunque, il prodotto tra elementi di $\mathbb{R}^{2\times}$ è tale che il prodotto di un numero pari di suoi elementi dà un elemento di tipo $h_0 + kh_3$ mentre il prodotto di un numero dispari un elemento di tipo $ih_1 + jh_2$.
Sapendo che $\mathrm{Pin}_2 = \{v_1 \cdot \ldots \cdot v_r \in \mathrm{P}_2 : |v_i| = 1 \ \forall i\}$, ed essendo
$\mathrm{Spin}_2 = \mathrm{Pin}_2 \cap \mathrm{SP}_2$ abbiamo

$$\mathrm{Spin}_2 = \{a + kb \in \mathbb{H} : a^2 + b^2 = 1\} \simeq S^1$$

Come è noto dalla teoria, si ha che se $w \in \mathbb{R}^{2\times}$ allora $\tilde{\mathrm{Ad}}_w(v)$ ci darà le coordinate del simmetrico di v rispetto a $w^\perp$.
A questo punto cerchiamo di prendere un elemento di Spin_2 e gli associamo una rotazione, essendo infatti ogni suo elemento il prodotto di un numero pari di elementi di $\mathbb{R}^{2\times}$ di norma 1, otteniamo che la rappresentazione aggiunta modificata fatta su un elemento di $\mathbb{R}^2$ da un elemento di Spin_2 è composizione di rappresentazioni aggiunte modificate fatte da un numero pari di elementi di $\mathbb{R}^{2\times}$ e dunque essendo composizione di un numero pari di riflessioni rispetto a iperpiani, è una rotazione. Cerchiamo ora di capire il legame tra l'angolo di rotazione e gli elementi di Spin_2.
Siano $\phi = a + kb \in \mathrm{Spin}_2$ con $a^2 + b^2 = 1$ e $v = i\alpha + j\beta$. Abbiamo che
$\tilde{\mathrm{Ad}}_\phi(v) = i(\alpha(a^2 - b^2) - 2ab\beta) + j(\beta(a^2 - b^2) + 2ab\alpha)$
Scrivendo tutto in corrispondenza di elementi di $\mathbb{R}^2$ abbiamo dunque che

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\mathrm{Ad}}_\phi|_{\mathbb{R}^2} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \alpha(a^2 - b^2) - 2(ab\beta) \\ 2ab\alpha + \beta(a^2 - b^2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Essendo $a^2 + b^2 = 1$ possiamo scrivere $a = \cos\theta$ e $b = \sin\theta$ ottenendo
$a^2 - b^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ e
$2ab = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$, quindi:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\mathrm{Ad}}_\phi|_{\mathbb{R}^2} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

Dunque $\tilde{\mathrm{Ad}}_\phi$ è una rotazione di angolo 2θ, dove θ è, rappresentando ϕ in un piano (x, k), l'angolo tra l'asse x e il vettore rappresentante ϕ.
Possiamo dunque scrivere

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathrm{Spin}_2 & \longrightarrow & SO(2) \\ & \phi & \longmapsto & \tilde{Ad}_\phi \\ & a + kb & \longmapsto & \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \\ & S^1 & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

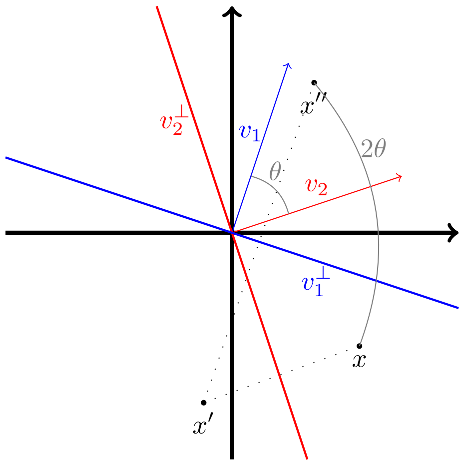
Abbiamo quindi la conferma che Spin_2 è rivestimento a due fogli di $SO(2)$, poiché è la funzione

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{p}: & S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & \theta & \longmapsto & 2\theta \end{array}$$

Dati due elementi di $\mathbb{R}^{2\times}$ v_1, v_2 di norma unitaria, possiamo scrivere
$v_1 = i\cos\alpha + j\sin\alpha$ e
$v_2 = i\cos\beta + j\sin\beta$ per cui
$v_1 \cdot v_2 = -\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + k(\cos(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\beta)\sin(\alpha)) = -\cos(\alpha-\beta) + k\sin(\beta-\alpha) = -(\cos(\alpha-\beta) + k\sin(\alpha-\beta)) = -\phi$
quindi, dato che $\tilde{\rho}$ è rivestimento a due fogli di $SO(2)$, abbiamo che

$$\tilde{\mathrm{Ad}}_{-\phi} = \tilde{\mathrm{Ad}}_{\phi} = \tilde{\mathrm{Ad}}_{v_1 v_2} = \rho_{v_1} \circ \rho_{v_2} = \begin{pmatrix} \cos(2(\alpha-\beta)) & -\sin(2(\alpha-\beta)) \\ \sin(2(\alpha-\beta)) & \cos(2(\alpha-\beta)) \end{pmatrix}$$

Dunque, la rappresentazione aggiunta modificata del prodotto di due elementi di $\mathbb{R}^{2\times}$ dà una rotazione di centro l'origine e angolo due volte quello compreso tra i due vettori, rotazione che viene fatta in senso inverso a quello del conteggio dell'angolo per comporre il prodotto vettoriale, equivalente quindi a fare (nell'esempio) prima la simmetria rispetto a $v_2^{\perp}$ e poi rispetto a $v_1^{\perp}$, nominando infatti $\theta = \beta - \alpha$ la rotazione verrà fatta di un angolo -2θ, cioè la rotazione ha il verso opposto di quello che ha l'angolo di "conteggio" del prodotto vettoriale (vedi figura).



Da questo otteniamo il risultato noto per cui un numero pari di riflessioni rispetto a iperpiani dà come risultato una rotazione di un angolo di ampiezza doppia rispetto alla somma degli angoli compresi nelle varie coppie di vettori, in formula:
Dati $v_1 \dots v_r \in \mathbb{R}^{2\times} : |v_j| = 1$ detto $\phi = v_1 \cdot \ldots \cdot v_r$ e
detto α_i l'angolo compreso tra v_i e v_{i+1}, con $i \in \{1, 3, \dots, r-1\}$ con r pari, si ha che
$\tilde{\mathrm{Ad}}_{\phi} = \tilde{\mathrm{Ad}}_{v_1 \cdot \ldots \cdot v_r} = (\rho_{v_1} \circ \rho_{v_2}) \circ \ldots \circ (\rho_{v_{r-1}} \circ \rho_{v_r}) =$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha_1) & -\sin(2\alpha_1) \\ \sin(2\alpha_1) & \cos(2\alpha_1) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \cos(2\alpha_{r-1}) & -\sin(2\alpha_{r-1}) \\ \cos(2\alpha_{r-1}) & \sin(\alpha_{r-1}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\sum_{i=1}^{r/2} \alpha_{2i-1}) & -\sin(2\sum_{i=1}^{r/2} \alpha_{2i-1}) \\ \sin(2\sum_{i=1}^{r/2} \alpha_{2i-1}) & \cos(2\sum_{i=1}^{r/2} \alpha_{2i-1}) \end{pmatrix}$$

2.2 $Cl_{1,1}$

Prendiamo $Cl_{1,1} = Cl_{g_{A_{1,1}}}(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}(2)$ l'algebra di Clifford su $\mathbb{R}^2$ associata alla forma quadratica $q(x) = x_1^2 - x_2^2$. Il prodotto di Clifford è la moltiplicazione tra matrici 2×2. L'immersione di $\mathbb{R}^2$ in $Cl_{1,1}$

è data da:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \hookrightarrow & Cl_{1,1} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} y & -x \\ x & -y \end{pmatrix} \end{array}$$

L'isomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre $\hat{f}$ estensione dell'immersione è dato da

$$\begin{array}{cccc} \hat{f}: & Cl_{1,1} & \to & \mathbb{R}(2) \\ & a + be_1 + ce_2 + de_1 \cdot e_2 & \mapsto & \begin{pmatrix} a+c & -b+d \\ b+d & a-c \end{pmatrix} \end{array}$$

l'automorfismo principale α associa ad un elemento di $\mathbb{R}^2$ il suo opposto, dunque $\alpha(xe_1 + ye_2) = \alpha \begin{pmatrix} y & -x \\ x & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & x \\ -x & y \end{pmatrix} = -(xe_1 + ye_2)$, quindi α lascerà invariato il segno delle componenti in 1 e $e_1 \cdot e_2$ e cambierà quello delle componenti in e_1 e e_2, dunque

$$\alpha \begin{pmatrix} a+c & -b+d \\ b+d & a-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b+d \\ -b+d & a+c \end{pmatrix}$$

Dunque α è un automorfismo che scambia le componenti di entrambe le diagonali. Si ha quindi che $Cl^0_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

L'elemento inverso di un elemento dell'algebra è dato dall'inversione delle matrici 2×2:

$\phi^{-1} = \begin{pmatrix} a+c & -b+d \\ b+d & a-c \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{a^2 - b^2 + c^2 - d^2} \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix}$

Abbiamo quindi che $Cl^{\times}_{1,1} = \{a + be_1 + ce_2 + de_1 \cdot e_2 : a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \neq 0\}$ e $\mathbb{R}^{2\times} = \{xe_1 + ye_2 : x^2 - y^2 \neq 0\}$

Abbiamo quindi una forma esplicita per la rappresentazione aggiunta modificata:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\mathrm{Ad}}: & Cl^{\times}_{1,1} & \to & \mathrm{GL}(Cl_{1,1}) & & & \\ & \phi & \mapsto & \tilde{\mathrm{Ad}}_\phi : & Cl_{1,1} & \to & Cl_{1,1} \\ & & & & \beta & \mapsto & \dfrac{1}{a^2 - b^2 + c^2 - d^2} \begin{pmatrix} a-c & b+d \\ -b+d & a+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} \end{array}$$

Abbiamo che

$$\mathrm{P}_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda = \pm 1 \right\}$$

infatti, presi $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^{2\times}$ si ha che

$v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} y & -x \\ x & -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' & -x' \\ x' & -y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xx' + yy' & xy' - yx' \\ -yx' + xy' & yy' - xx' \end{pmatrix}$ e

$v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'' & -x'' \\ x'' & -y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay'' + bx'' & -ax'' - by'' \\ ax'' + by'' & -bx'' - ay'' \end{pmatrix}$

quindi, il prodotto di un numero pari di elementi di $\mathbb{R}^{2\times}$ dà un elemento di tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mentre il prodotto di un numero dispari di elementi dà un elemento di tipo $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & -c \end{pmatrix}$, quindi gli elementi $\mathrm{P}_{1,1}$ sono descritti come detto prima.

Facciamo ora una considerazione su $\mathbb{R}^2$ dotato della forma quadratica $g_{A_{1,1}}$. Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, abbiamo che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} : xx' - yy' = 0 \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Quindi, l'iperpiano perpendicolare ad un vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rispetto al prodotto scalare indotto da $g_{A_{1,1}}$ è la retta per la direzione di giacitura $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, corrispondente al simmetrico di v rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Come nel caso dell'algebra Cl_2, anche qui preso $w \in \mathbb{R}^{2\times}$ e $v \in \mathbb{R}$ si ottiene che $\tilde{\mathrm{Ad}}_w(v)$ dà esattamente le coordinate del simmetrico di v rispetto a $w^\perp$. Siano $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e sia $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, allora
$\tilde{\mathrm{Ad}}_w(v) = \dfrac{1}{x^2 - y^2} \begin{pmatrix} b(x^2+y^2) - 2xya & a(x^2+y^2) - 2xyb \\ -a(x^2+y^2) + 2xyb & -b(x^2+y^2) + 2xya \end{pmatrix}$
A questa matrice (mediante l'immersione) possiamo associare un vettore in $\mathbb{R}^2$ di coordinate:

$$\frac{1}{x^2 - y^2} \begin{pmatrix} a(-x^2 - y^2) + 2xyb \\ b(x^2+y^2) - 2xya \end{pmatrix}$$

queste sono esattamente le coordinate del simmetrico rispetto a $w^\perp$ di v, infatti (per esempio nella prima componente) si ottiene:
$\dfrac{a(-x^2-y^2)+2xyb}{x^2-y^2} = \dfrac{-ax^2 - ay^2 + 2ax^2 - 2ax^2 + 2xyb}{x^2-y^2} = \dfrac{a(x^2-y^2) - 2x(ax - yb)}{x^2-y^2} = a - \dfrac{2b(v,w)}{q(w)}x$
che corrisponde alla prima componente del simmetrico di v rispetto a $w^\perp$.
Guardiamo ora il gruppo $\mathrm{Pin}_{1,1}$ notiamo che, presi $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2\times}$ tali che $q(v_1), q(v_2) = \pm 1$, il determinante della matrice ottenuta facendo il prodotto dei due vettori è 1 se i due vettori hanno norma uguale, -1 se i due vettori hanno norma opposta, poiché prodotto di due matrici di determinante uguali a ± 1. Dunque, si ha

$$\mathrm{Pin}_{1,1} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & \lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix} \ : \ \det(A) = \pm 1 \text{ e } \lambda = \pm 1 \right\}$$

Per quanto riguarda $\mathrm{Spin}_{1,1}$ dobbiamo guardare $\mathrm{SP}_{1,1}$, il quale è dato dagli elementi ϕ prodotto di elementi dello spazio vettoriale tali che $\phi \cdot \alpha(\phi^{-1}) = 1$, dunque [Ga]

$$\mathrm{Spin}_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \ : \ a^2 - b^2 = 1 \right\}$$

Notiamo infine che, a differenza di Spin_2, $\mathrm{Spin}_{1,1} = \{a \cdot 1 + be_1 \cdot e_2 : a^2 - b^2 = 1\}$, e dunque è costituito da due rami di iperbole equilatera.

2.3 Cl_3

Prendiamo $Cl_3 = Cl_{g_{A_{3,0}}}(\mathbb{R}^3) = Cl_{\langle,\rangle}(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ l'algebra di Clifford su $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard. Il prodotto di Clifford in Cl_3 è la moltiplicazione tra quaternioni effettuata componente per componente, e possiamo considerare l'immersione di $\mathbb{R}^3$ in Cl_3 come:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \hookrightarrow & Cl_3 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ia + jb + kc \\ -ia - jb - kc \end{pmatrix} \end{array}$$

infatti, con questa corrispondenza otteniamo che viene verificata l'identità
$v \cdot w = v \wedge w - 1 \cdot \langle v, w \rangle$. L'automorfismo principale α è dato da [DeB]:

$$\begin{array}{cccc} \alpha : & \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \\ & \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} h' \\ h \end{pmatrix} \end{array}$$

La parte pari dell'algebra è data quindi da:
$Cl_3^0 = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} : \alpha \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} : \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h' \\ h \end{pmatrix} \right\} =$
$= \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} : h \in \mathbb{H} \right\} \simeq \mathbb{H}$
Sia $\phi = \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ allora $\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{h}}{|h|} \\ \dfrac{\bar{h}'}{|h'|} \end{pmatrix}$

$Cl_3^\times = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} : |h| \text{ e } |h'| \neq 0 \right\}$ e $\mathbb{R}^{3\times} = \left\{ \begin{pmatrix} ia+jb+kc \\ -ia-jb-kc \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} : a^2+b^2+c^2 \neq 0 \right\}$

Possiamo quindi ricavare una espressione esplicita per la rappresentazione aggiunta modificata

$$\begin{array}{rccccccc} \tilde{\mathrm{Ad}}: & Cl_3^\times & \to & \mathrm{GL}(Cl_3) & & & & \\ & \phi & \mapsto & \tilde{\mathrm{Ad}}_\phi : & Cl_3 & \to & Cl_3 & \\ & & & & \beta & \mapsto & \alpha(\phi)\cdot\beta\cdot\phi^{-1} = \begin{pmatrix} h' \\ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{h}}{|h|} \\ \dfrac{\bar{h'}}{|h'|} \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} \dfrac{h'\beta_1\bar{h}}{|h|} \\ \dfrac{h\beta_2\bar{h'}}{|h'|} \end{pmatrix} \end{array}$$

Abbiamo che

$$\mathrm{P}_3 = \left\{ \phi = \begin{pmatrix} h \\ \lambda h \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} : h \in \mathbb{H} \text{ e } \lambda = \pm 1 \right\}$$

Infatti, preso $v = \begin{pmatrix} q \\ -q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times}$ con $q = ia+jb+kc$, si ottiene:

$v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} q_1 \\ -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ -q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1q_2 \\ q_1q_2 \end{pmatrix}$ e

$v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} q_1q_2 \\ q_1q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_3 \\ -q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1q_2q_3 \\ -q_1q_2q_3 \end{pmatrix}$

Dunque, il prodotto tra elementi di $\mathbb{R}^{3\times}$ è tale che il prodotto di un numero pari di suoi elementi dà un elemento di tipo $\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}$ mentre il prodotto di un numero dispari di elementi dà un elemento di tipo $\begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix}$. Si ha

$$\mathrm{Pin}_3 = \left\{ \phi = \begin{pmatrix} h \\ \lambda h \end{pmatrix} : h \in \mathbb{H}, |h| = 1 \text{ e } \lambda = \pm 1 \right\}$$

e quindi

$$\mathrm{Spin}_3 = \left\{ \phi = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} : h \in \mathbb{H}, |h| = 1 \right\} \simeq S^3$$

Cerchiamo ora di ricavare il legame tra un elemento di Spin_3, l'angolo di rotazione e la retta attorno alla quale la rotazione viene fatta.

Ricordiamo che una rotazione in $\mathbb{R}^3$ attorno ad un asse di giacitura $r = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ di angolo θ è rappresentata dalla matrice

$$M_{r,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta + a_x^2(1-\cos\theta) & a_xa_y(1-\cos\theta) - a_z\sin\theta & a_xa_y(1-\cos\theta) + a_y\sin\theta \\ a_xa_y(1-\cos\theta) + a_z\sin\theta & \cos\theta + a_y^2(1-\cos\theta) & a_ya_z(1-\cos\theta) - a_x\sin\theta \\ a_za_x(1-\cos\theta) - a_y\sin\theta & a_za_y(1-\cos\theta) + a_x\sin\theta & \cos\theta + a_z^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

Sia $\phi = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} \in \mathrm{Spin}_3$ con $h = h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3$ dove $|h| = 1$, possiamo quindi scrivere il quaternione in forma polare, poniamo

$h = \cos\dfrac{\theta}{2} + \sin\dfrac{\theta}{2}(ia_x + ja_y + ka_z)$ e sia $v = \begin{pmatrix} ia+jb+kc \\ -ia-jb-kc \end{pmatrix}$, calcoliamo

$\tilde{\mathrm{Ad}}_\phi(v) = \begin{pmatrix} h_0+ih_1+jh_2+kh_3 \\ h_0+ih_1+jh_2+kh_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ia+jb+kc \\ -ia-jb-kc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0-ih_1-jh_2-kh_3 \\ h_0-ih_1-jh_2-kh_3 \end{pmatrix}$

Facendo il calcolo solo per la prima componente (la seconda è opposta alla prima) e considerando le varie parti singolarmente, otterremo che la parte scalare è nulla, e per quanto riguarda le altre parti in i, j, k, ricordando che

$h_0 = \cos\dfrac{\theta}{2}$, $h_1 = a_x\sin\dfrac{\theta}{2}$, $h_2 = a_y\sin\dfrac{\theta}{2}$, $h_3 = a_z\sin\dfrac{\theta}{2}$

esse risulteranno uguali alle componenti nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ del vettore trasformato con la matrice $M_{a_x,a_y,a_z,\theta}$.

Ad esempio, nella parte in i si ottiene:

$a((1-\cos\theta)a_x^2+\cos\theta)+b((1-\cos\theta)a_xa_y-a_z\sin\theta)+c((1-\cos\theta)a_xa_z+a_y\sin\theta)$

Abbiamo quindi

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\mathrm{Ad}}_\phi|_{\mathbb{R}^3}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \longmapsto & M_{a_x,a_y,a_z,\theta}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array}$$

Abbiamo dunque che $\tilde{\mathrm{Ad}}_\phi|_{\mathbb{R}^3}$ è una rotazione di angolo θ attorno alla retta a_x, a_y, a_z, dove $\phi = \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}$ con $h = \cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}(ia_x+ja_y+ka_z)$. Possiamo scrivere

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & \mathrm{Spin}_3 & \longrightarrow & SO(3) \\ & \phi & \longmapsto & \tilde{\mathrm{Ad}}_\phi|_{\mathbb{R}^3} \\ & \cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}(ia_x+ja_y+ka_z) & \longmapsto & M_{a_x,a_y,a_z,\theta} \\ & S^3 & \longrightarrow & SO(3) \end{array}$$

La matrice che rappresenta $\tilde{\mathrm{Ad}}_\phi|_{\mathbb{R}^3}$ non cambia se sostituiamo a_x, a_y, a_z, θ con $-a_x, -a_y, -a_z, -\theta$. Si ha quindi che la funzione

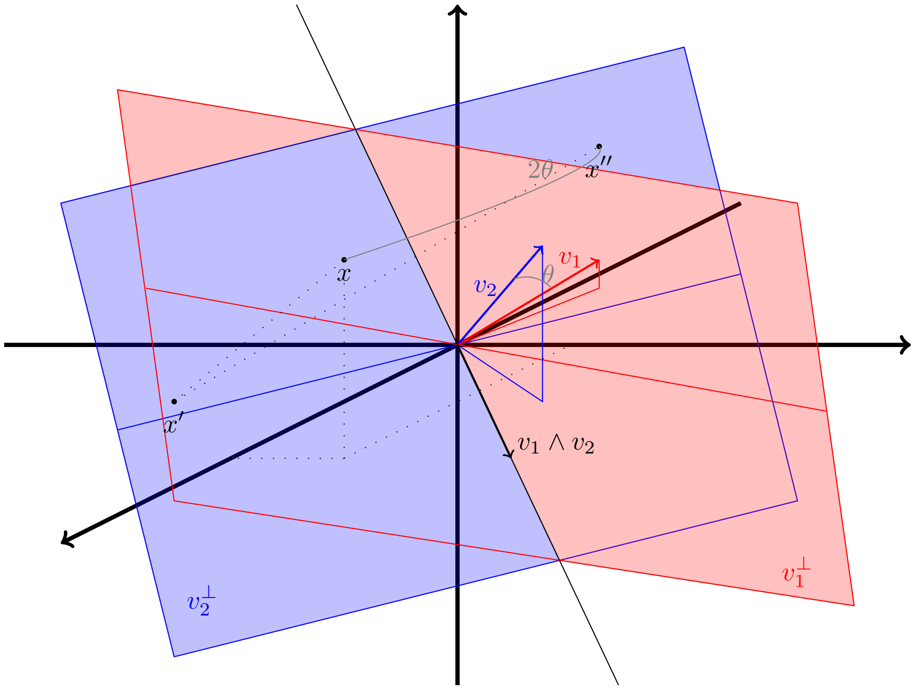
$$\mathrm{p}: S^3 \longrightarrow SO(3)$$

è suriettiva, ma non iniettiva, precisamente ogni elemento di $SO(3)$ ha mediante p esattamente due controimmagini, una l'opposta dell'altra, pertanto abbiamo la conferma che S^3 è rivestimento a due fogli di $SO(3)$.

Presi $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{3\times}$ tali che $|v_1|, |v_2| = 1$, scriviamo $v_1 = ia+jb+kc$ e $v_2 = ia'+jb'+kc'$, dalle proprietà del prodotto di Clifford (punto (b)) si ha che $v_1 \cdot v_2 = -\langle v_1, v_2\rangle + v_1 \wedge v_2$. Detto θ l'angolo compreso tra i due vettori abbiamo che essendo i vettori di norma unitaria $\langle v_1, v_2\rangle = \cos\theta$ e $|v_1 \wedge v_2| = \sin\theta$. Scriviamo quindi il prodotto di due elementi dello spazio vettoriale (che sarà quindi un elemento di Spin_3) e vediamo quale è il legame con la rotazione associata mediante la rappresentazione aggiunta modificata. Abbiamo $v_1 \cdot v_2 = -(aa'+bb'+cc')+i(bc'-cb')+j(ca'-ac')+k(ab'-ba')$, possiamo quindi scrivere $v_1 \cdot v_2 = -\cos\theta+\sin\theta(ia_x+ja_y+ka_z)$ con (a_x, a_y, a_z) il versore del vettore $v_1 \wedge v_2$.
Come ci aspettavamo abbiamo un quaternione scritto in forma polare, da quello che abbiamo visto possiamo associare ad esso una rotazione, c'è però una discordanza di segno, essa può essere superata sostituendo θ con $-\theta$, infatti:
$v_1 \cdot v_2 = -\cos\theta+\sin\theta(ia_x+ja_y+ka_z) = -\cos(-\theta)-\sin(-\theta)(ia_x+ja_y+ka_z) =$
$= -(\cos(-\theta)+\sin(-\theta)(ia_x+ja_y+ka_z))$ e avremo quindi

$$\tilde{\mathrm{Ad}}_{-\phi} = \tilde{\mathrm{Ad}}_\phi = \tilde{\mathrm{Ad}}_{v_1\cdot v_2} = \rho_{v_1} \circ \rho_{v_2} = M_{a_x,a_y,a_z,-2\theta}$$

Dato che $\tilde{\rho}$ rappresenta un rivestimento a due fogli di $SO(3)$, a $v_1 \cdot v_2$ viene associata la rotazione di asse (a_x, a_y, a_z) e angolo -2θ, dunque la matrice $M_{a_x,a_y,a_z,-2\theta}$. Otteniamo quindi il risultato già noto dell'algebra lineare per cui la composizione di due riflessioni rispetto a iperpiani è una rotazione attorno all'asse intersezione dei due iperpiani e di angolo doppio rispetto a quello compreso tra i due. Notare che il segno negativo sull'angolo indica che la rotazione viene effettuata in senso opposto rispetto al verso del conteggio dell'angolo tra i due vettori per farne il prodotto vettoriale, cosa che è concorde con il caso bidimensionale (vedi figura).



Dati ora $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^3$ di norma unitaria con r pari, il prodotto $v_1 \cdot \ldots \cdot v_r$ è uguale al prodotto di $r/2$ quaternioni di norma unitaria scrivibili in forma polare, pertanto il loro prodotto sarà ancora un quaternione di norma unitaria, scrivibile quindi in forma polare. Otteniamo quindi che $\tilde{\rho}(v_1 \cdot \ldots \cdot v_r)$ sarà una rotazione rispetto ad un determinato asse di un determinato angolo, ritrovando quindi il risultato già noto per cui la composizione pari di riflessioni rispetto a iperpiani sia una rotazione.

Bibliografia

[DeB] P. De Bartolomeis, *Algebra lineare*, La Nuova Italia editrice, Firenze, 1993
[LM] H. Blaine Lawson, M.-L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989
[Ga] J. Gallier, *Clifford Algebras, Clifford Groups and a generalization of the quaternions: the Pin and Spin groups*,cis.upenn.edu/ cis610/clifford.pdf, Philadephia, 2012