



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di  
Scienze Matematiche  
Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Magistrale  
in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

# Rappresentazioni di quiver e spazi vettoriali preomogenei

Quiver representations and  
prehomogeneous vector spaces

**Relatore:**

Prof. Giorgio Ottaviani

**Candidato:**

Federico Venturelli

# Indice

Introduzione . . . . .	2
<b>1 Tensori</b>	<b>4</b>
1.1 Definizioni e prime proprietà . . . . .	4
<b>2 Azioni di gruppi</b>	<b>9</b>
2.1 Gruppi e varietà algebriche . . . . .	9
2.2 Spazi preomogenei e trasformata di castling . . . . .	12
<b>3 Introduzione ai quiver</b>	<b>17</b>
3.1 Rappresentazioni di quiver e morfismi . . . . .	17
3.2 Azioni di gruppo sulle rappresentazioni di un quiver . . . . .	21
3.3 I funtori di riflessione . . . . .	24
<b>4 Ricerca delle terne preomogenee</b>	<b>34</b>
4.1 Un metodo infinitesimale per calcolare $\dim(O_x)$ . . . . .	35
4.2 Le terne $(2, n, n)$ . . . . .	37
4.3 L'approccio aritmetico e la classificazione delle terne preomogenee . . . . .	39
4.3.1 $n=2$ . . . . .	41
4.3.2 $n=3,6$ . . . . .	43
4.3.3 $n=4$ . . . . .	44
4.3.4 $n=5$ . . . . .	46
4.3.5 $n=8$ . . . . .	47
4.3.6 Il caso generale . . . . .	50
<b>5 Il caso con quattro o più fattori</b>	<b>53</b>
5.1 4 fattori . . . . .	53
5.2 $n$ fattori . . . . .	57
<b>A Algoritmo per il calcolo di <math>\dim(O_x)</math></b>	<b>62</b>
<b>B Ricerca delle soluzioni dell'equazione (4.4)</b>	<b>63</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>

## Introduzione

Uno spazio vettoriale  $V$  su cui agisce un gruppo algebrico affine  $G$  è detto *preomogeneo* se contiene un'orbita aperta rispetto alla topologia di Zariski. Nel 1977 Sato e Kimura ottennero una classificazione completa degli spazi vettoriali complessi preomogenei e irriducibili nel senso della teoria della rappresentazione, contenuta in [SK], che sfrutta una trasformazione nota come *trasformata di castling*: in particolare essi dimostrano che, a meno di tale trasformazione, ogni spazio preomogeneo rientra in uno di 42 casi (si veda §7, pag. 144-148 di [SK]). Il caso del prodotto tensoriale  $V = \mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_n}$  su cui agisce in modo naturale il gruppo  $G = GL_{a_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{a_n}(\mathbb{C})$  rientra quasi sempre nel caso III)-(1), ma non viene studiato in dettaglio in [SK], e su di esso si sono concentrati altri matematici (in particolare Manivel e Parfenov). Per  $n = 1, 2$  è ovvio che  $V$  sia preomogeneo: in tal caso infatti gli elementi di  $V$  non sono altro che matrici (o vettori), e l'orbita aperta è costituita dalle matrici (o dai vettori) di rango massimo; invece per  $n \geq 3$  la condizione necessaria affinché  $V$  sia preomogeneo, ovvero  $\dim(G) - \dim(V) \geq 0$ , può non verificarsi, e quindi solo per determinate  $n$ -uple  $(a_1, \dots, a_n)$   $V$  sarà preomogeneo per l'azione di  $G$ .

In questa tesi è esposta una classificazione più diretta di tali spazi, che chiarisce quella già fornita da Sato e Kimura e soprattutto rende più semplice controllare quando un prodotto tensoriale  $\mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_n}$  è preomogeneo per l'azione di  $GL_{a_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{a_n}(\mathbb{C})$ . Sfruttando infatti l'invariante  $N(a_1, \dots, a_n) = a_1^2 + \cdots + a_n^2 - a_1 \cdots a_n$  dimostreremo che:

1. Se  $N(a_1, \dots, a_n) \leq n - 2$  allora  $\mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_n}$  non è preomogeneo
2. Se  $N(a_1, \dots, a_n) = n - 1, n$  oppure  $N(a_1, \dots, a_n) \geq n + 2$  allora  $\mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_n}$  è preomogeneo

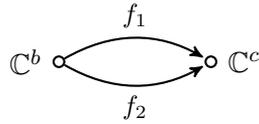
Nel caso  $N(a_1, \dots, a_n) = n + 1$  è necessaria un'analisi più dettagliata che sfrutta la trasformata di castling, presentata in questo lavoro nel capitolo 2. Questo caso è legato ai prodotti tensoriali del tipo  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ , il cui studio risale addirittura a Weierstrass; dimostreremo che tali spazi sono preomogenei per l'azione di  $GL_2(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$  se e solo se  $n \leq 3$  (risultato già presente in [SK], si vedano i casi (I)-(12) e (I)-(15) con  $n = 4, m = 2$ ).

Il primo capitolo della tesi è dedicato a richiamare le principali proprietà dei tensori, che verranno utilizzate in tutto il resto del lavoro. Il secondo capitolo riporta, nella prima parte, le nozioni di base sulle azioni di gruppi algebrici (teorema di Chevalley, dimensione delle orbite etc.); la seconda parte è invece dedicata ad un'introduzione agli spazi preomogenei e alla trasformata di castling.

Il terzo capitolo è dedicato ai *quiver*. I quiver non sono altro che grafi orientati finiti, come ad esempio questo (indicato di solito con  $\Theta_2$ )



Una *rappresentazione* di un quiver fa corrispondere ad ogni vertice uno spazio vettoriale  $\mathbb{C}^k$  e ad ogni freccia un'applicazione lineare  $f_i$  tra gli spazi vettoriali associati ai vertici che essa collega; ad esempio una rappresentazione di  $\Theta_2$  è la seguente:



In generale se i due vertici sono collegati da  $a$  frecce, tutte dirette nello stesso verso, una rappresentazione di  $\Theta_a$  può essere espressa come un elemento di  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$ .

Sfruttando il linguaggio dei quiver, è possibile verificare che la trasformata di castling opera allo stesso modo dei *functori di riflessione*, introdotti in [BGP], relativi alle rappresentazioni di  $\Theta_a$ ; nel teorema 3.9 abbiamo riportato quest'equivalenza (spesso accennata in letteratura senza dimostrazione). Essa ci permette di sfruttare nella nostra ricerca risultati relativi alle rappresentazioni di quiver: in particolare utilizzeremo il teorema 3.4, dovuto a Kac e contenuto in [Kac], che fornisce una condizione sufficiente affinché lo spazio  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$  sia preomogeneo per l'azione di  $GL_a(\mathbb{C}) \times GL_b(\mathbb{C}) \times GL_c(\mathbb{C})$ ; questo teorema, oltre ad avere un ruolo cruciale nel presente lavoro, racchiude in sé come caso particolare la forma canonica di Weierstrass per tensori di tipo  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$ .

Nel quarto capitolo diamo la dimostrazione del risultato generale di classificazione per prodotti tensoriali di tre fattori; questo è il caso più significativo, dove entrano in gioco tutte le tecniche esposte nei capitoli precedenti. Lo schema della dimostrazione è il seguente:

1. Si cercano le soluzioni di  $N(a, b, c) = m$  per  $m \geq 2$ .
2. Il caso  $m = 3$  non ammette soluzioni.
3. I casi  $m = 2$  e  $m = 4$  sono trattati a parte: nel primo  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$  è preomogeneo, mentre il secondo rimanda agli spazi  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ , che sono preomogenei solo per  $n \leq 3$ .
4. Quando  $m \geq 5$  dimostriamo che  $(a, b, c)$  deve soddisfare le ipotesi del teorema 3.4, e di conseguenza  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$  è preomogeneo.

Nel quinto capitolo la classificazione è estesa al prodotto tensoriale di  $n \geq 4$  fattori; nonostante la connessione con la teoria dei quiver venga meno, questo caso è notevolmente più semplice di quello a tre fattori.

In appendice sono infine riportati i due algoritmi che abbiamo utilizzato, uno scritto con il software Macaulay2 (si veda [GS]) e l'altro in linguaggio C.

# Capitolo 1

## Tensori

### 1.1 Definizioni e prime proprietà

**Definizione 1.1.** Siano  $\mathbb{K}$  un campo e  $V_1, \dots, V_n$  spazi vettoriali di dimensione finita su  $\mathbb{K}$ ; il *prodotto tensoriale* di  $V_1, \dots, V_n$  è definito come

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n = \{T : V_1^* \times \cdots \times V_n^* \rightarrow \mathbb{K} \mid T \text{ è multilineare}\}$$

Gli elementi di  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  sono detti *tensori*; in particolare, se  $d_i = \dim(V_i)$  un elemento  $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  è detto tensore di *ordine*  $n$  e *tipo*  $d_1 \times \cdots \times d_n$ .

*Osservazione 1.* Richiedere che i  $V_i$  abbiano dimensione finita su  $\mathbb{K}$  ci consente di identificare i  $V_i$  con i loro biduali  $(V_i^*)^*$ , cosa che in generale non accade.

Il prodotto tensoriale  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  possiede una naturale struttura di spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ , le cui operazioni di somma e prodotto per scalare sono definite nel modo seguente: per ogni  $S, T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}(S + T)(v_1, \dots, v_n) &= S(v_1, \dots, v_n) + T(v_1, \dots, v_n) \\ (\lambda T)(v_1, \dots, v_n) &= \lambda T(v_1, \dots, v_n)\end{aligned}$$

Tra i tensori ve ne sono alcuni che si comportano in maniera molto semplice, e che generano tutti gli altri elementi di  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ : i tensori decomponibili.

**Definizione 1.2.** Siano  $V_1, \dots, V_n$  spazi vettoriali di dimensione finita su un campo  $\mathbb{K}$  e sia  $T$  un elemento di  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ ; il tensore  $T$  è detto *decomponibile* se esistono  $v_i \in V_i$  tali che comunque scelti  $w_i \in V_i^*$  valga

$$T(w_1, \dots, w_n) = w_1(v_1) \cdot \dots \cdot w_n(v_n)$$

In tal caso il tensore  $T$  viene indicato col simbolo  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ .

*Osservazione 2.* Consideriamo vettori  $u_1, \dots, u_n$  degli spazi  $V_1, \dots, V_n$  rispettivamente, ed elementi  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ ; se definiamo  $v_i = \mu_i u_i$  allora, presi  $w_1, \dots, w_n$  qualsiasi in  $V_1^*, \dots, V_n^*$  rispettivamente, avremo  $(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)(w_1, \dots, w_n) = w_1(u_1) \cdot \dots \cdot w_n(u_n)$  e  $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)(w_1, \dots, w_n) = w_1(\mu_1 u_1) \cdot \dots \cdot w_n(\mu_n u_n) = \mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n w_1(u_1) \cdot \dots \cdot w_n(u_n)$ ; è chiaro di conseguenza che se  $\mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n = 1$  i vettori  $v_i$  e  $u_i$  definiscono il medesimo tensore decomponibile.

Quella appena descritta è l'unica ambiguità che può presentarsi nel definire un tensore decomponibile; vale infatti la

**Proposizione 1.1.** *Siano  $T = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  e  $S = u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$  tensori decomponibili di  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ ;  $T$  coincide con  $S$  se e solo se esistono  $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$  tali che  $v_i = \mu_i u_i$  per  $i = 1, \dots, n$  e  $\mu_1 \cdots \mu_n = 1$ .*

*Dimostrazione.* Abbiamo già dimostrato una delle due implicazioni nell'osservazione precedente; l'altra è facilmente dimostrabile per induzione sull'ordine  $n$  dei tensori considerati:

1. Se  $n = 1$  allora l'ipotesi è  $v_n = u_n$  e quindi considerando  $\mu_1 = 1$  si ottiene subito la tesi.
2. Supponiamo che la tesi valga per tensori di ordine  $n-1$  e dimostriamola per tensori di ordine  $n$ . Prendiamo un  $\beta \in V_n^*$  tale che  $\beta(v_n) \neq 0$  e  $\beta(u_n) \neq 0$ ; poiché  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$  otteniamo

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1} \beta(v_n) = u_1 \otimes \cdots \otimes u_{n-1} \beta(u_n)$$

ovvero un'uguaglianza tra tensori decomponibili di ordine  $n-1$ . Per l'ipotesi induttiva, esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$  tali che  $v_i = \lambda_i u_i$  per  $i = 1, \dots, n-2$  e  $\beta(v_n) v_{n-1} = \lambda_{n-1} \beta(u_n) u_{n-1}$  con  $\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} = 1$ ; questo ci consente di scrivere

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_{n-1} \otimes u_n = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1} \otimes v_n = (\lambda_1 u_1) \otimes \cdots \otimes \left( \lambda_{n-1} \frac{\beta(u_n)}{\beta(v_n)} u_{n-1} \right) \otimes v_n$$

Il tutto può ulteriormente risciversi come

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_{n-1} \otimes \left( u_n - \frac{\beta(u_n)}{\beta(v_n)} v_n \right) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad u_n = \frac{\beta(u_n)}{\beta(v_n)} v_n$$

Ponendo  $\mu_i = \lambda_i$  per  $i = 1, \dots, n-2$ ,  $\mu_{n-1} = \lambda_{n-1} \frac{\beta(u_n)}{\beta(v_n)}$  e  $\mu_n = \frac{\beta(v_n)}{\beta(u_n)}$  la tesi è dimostrata. □

Come già detto i tensori decomponibili generano ogni altro elemento di  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ ; in realtà uno specifico insieme di questi tensori costituisce una base dello spazio  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ , come mostra la seguente

**Proposizione 1.2.** *Siano  $V_1, \dots, V_n$  spazi vettoriali di dimensione finita rispettivamente  $d_1, \dots, d_n$  su un campo  $\mathbb{K}$ ; allora  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $\prod_{i=1}^n d_i$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo un tensore  $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  ed elementi  $\beta_i \in V_i^*$ ; se  $\{w_1^i, \dots, w_{d_i}^i\}$  sono, per  $i = 1, \dots, n$ , basi di  $V_1^*, \dots, V_n^*$  duali di  $\{v_1^i, \dots, v_{d_i}^i\}$  rispettivamente, potremo scrivere  $\beta_i = \sum_{k_i=1}^{d_i} \mu_{k_i}^i w_{k_i}^i$  per opportuni coefficienti  $\mu_{k_i}^i = \beta_i(v_{k_i}^i)$ . Di conseguenza avremo:

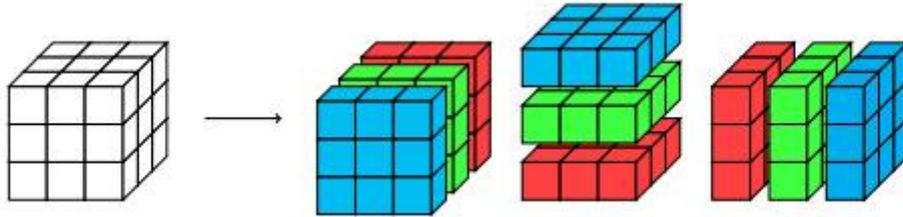
$$\begin{aligned}
T(\beta_1, \dots, \beta_n) &= T\left(\sum_{k_1=1}^{d_1} \mu_{k_1}^1 w_{k_1}^1, \dots, \sum_{k_n=1}^{d_n} \mu_{k_n}^n w_{k_n}^n\right) = \\
&= \sum_{k_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{d_n} \mu_{k_1}^1 \cdots \mu_{k_n}^n T(w_{k_1}^1, \dots, w_{k_n}^n) = \\
&= \sum_{k_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{d_n} \beta_1(v_{k_1}^1) \cdots \beta_n(v_{k_n}^n) T(w_{k_1}^1, \dots, w_{k_n}^n) = \\
&= \sum_{k_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{d_n} T(w_{k_1}^1, \dots, w_{k_n}^n)(v_{k_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_{k_n}^n)(\beta_1, \dots, \beta_n)
\end{aligned}$$

Se chiamiamo  $T_{k_1, \dots, k_n} = T(w_{k_1}^1, \dots, w_{k_n}^n) \in \mathbb{K}$ , otteniamo:

$$T = \sum_{k_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{d_n} T_{k_1, \dots, k_n} (v_{k_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_{k_n}^n) \quad (1.1)$$

Questo significa che  $\{v_{k_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_{k_n}^n\}_{k_i=1, \dots, d_i}$  è un sistema di generatori per  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ ; ma se valesse  $T = 0$ , valutando la (1.1) in  $(w_{k_1}^1, \dots, w_{k_n}^n)$  otterremmo  $0 = T(w_{k_1}^1, \dots, w_{k_n}^n) = T_{k_1, \dots, k_n}$ , e questo varrebbe per ogni  $1 \leq k_i \leq d_i$ . Di conseguenza  $\{v_{k_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_{k_n}^n\}_{k_i=1, \dots, d_i}$  è una base di  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ .  $\square$

Un tensore  $T$  di ordine 1 è chiaramente rappresentabile come un vettore, visto che è un elemento di un qualche  $V^*$ ; ma come rappresentare i tensori di ordine generico? Alla luce di quanto appena mostrato, il modo più semplice per ‘visualizzare’ un tensore  $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  è di pensarlo come un array  $n$ -dimensionale, con ciascuna dimensione di ‘lunghezza’  $d_i = \dim(V_i)$ . Così facendo otteniamo in particolare che un tensore di ordine 2 è rappresentabile come una matrice, mentre uno di ordine 3 come un numero finito di matrici, ottenute sezionando il tensore lungo una direzione scelta; queste sezioni sono dette *slices* del tensore.



Sul prodotto tensoriale  $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  agisce in maniera naturale il gruppo  $G = GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_n)$ : presi  $g_i \in GL(V_i)$  e  $v_i \in V_i$ , l’azione è definita sui tensori decomponibili da

$$(g_1, \dots, g_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (g_1 v_1) \otimes \cdots \otimes (g_n v_n)$$

e viene estesa a tutto  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  per linearità.

Abbiamo visto come esprimere un tensore  $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  una volta assegnate basi per i  $V_i$ ; ma come cambiano i coefficienti del tensore  $T$  se si cambiano le basi dei  $V_i$ ? La proposizione seguente dà la risposta.

**Proposizione 1.3.** *Siano  $V_1, \dots, V_n$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$  di dimensione rispettivamente  $d_1, \dots, d_n$ , e prendiamo come loro basi  $\{v_1^i, \dots, v_{d_i}^i\}$ ; allora un elemento  $T$  di  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  potrà scriversi come  $T = \sum_{k_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{d_n} T_{k_1, \dots, k_n} (v_{k_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_{k_n}^n)$ . Se  $\{u_1^i, \dots, u_{d_i}^i\}$  sono anch'esse basi dei  $V_i$  legate alle precedenti dalle relazioni  $v_{k_i}^i = \sum_{j_i=1}^{d_i} \mu_{k_i, j_i}^i u_{j_i}^i$ , allora  $T$  può scriversi come  $T = \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} T'_{j_1, \dots, j_n} (u_{j_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{j_n}^n)$ , ove*

$$T'_{j_1, \dots, j_n} = \sum_{k_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{d_n} \mu_{k_1, j_1}^1 \cdots \mu_{k_n, j_n}^n T_{k_1, \dots, k_n} \quad (1.2)$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{d_n} T_{k_1, \dots, k_n} (v_{k_1}^1 \otimes \cdots \otimes v_{k_n}^n) = \\ &= \sum_{k_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{d_n} T_{k_1, \dots, k_n} \left[ \left( \sum_{j_1=1}^{d_1} \mu_{k_1, j_1}^1 u_{j_1}^1 \right) \otimes \cdots \otimes \left( \sum_{j_n=1}^{d_n} \mu_{k_n, j_n}^n u_{j_n}^n \right) \right] = \\ &= \sum_{k_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{d_n} \left[ \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} T_{k_1, \dots, k_n} \mu_{k_1, j_1}^1 \cdots \mu_{k_n, j_n}^n \right] (u_{j_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{j_n}^n) = \\ &= \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} \left[ \sum_{k_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{d_n} \mu_{k_1, j_1}^1 \cdots \mu_{k_n, j_n}^n T_{k_1, \dots, k_n} \right] (u_{j_1}^1 \otimes \cdots \otimes u_{j_n}^n) \end{aligned}$$

□

Riportiamo di seguito alcune proprietà del prodotto tensoriale

**Proposizione 1.4.** *Siano  $U, V$  e  $W$  spazi vettoriali di dimensione finita su  $\mathbb{K}$ ; allora:*

1.  $U \otimes V \simeq V \otimes U$
2. Se  $U \simeq U'$  e  $V \simeq V'$  allora  $U \otimes V \simeq U' \otimes V'$
3.  $U \otimes V \otimes W \simeq (U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W)$
4.  $U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*$
5.  $U^* \otimes V \simeq \text{Hom}(U, V)$

*Dimostrazione.*

1. L'isomorfismo cercato si ottiene definendolo sui tensori decomponibili come  $u \otimes v \rightarrow v \otimes u$  ed estendendolo a tutto lo spazio  $U \otimes V$  per linearità.
2. Siano  $\phi : U \rightarrow U'$  e  $\psi : V \rightarrow V'$  gli isomorfismi di cui in ipotesi; allora la posizione  $\tau(u \otimes v) = \phi(u) \otimes \psi(v)$  estesa per linearità dà l'isomorfismo cercato (l'inversa di  $\tau$  è chiaramente data da  $\tau^{-1}(u' \otimes v') = \phi^{-1}(u') \otimes \psi^{-1}(v')$ ).
3. Anche stavolta è sufficiente porre  $u \otimes v \otimes w \rightarrow (u \otimes v) \otimes w$  (o  $u \otimes v \otimes w \rightarrow u \otimes (v \otimes w)$ ) sui tensori decomponibili ed estendere per linearità.

4. L'isomorfismo  $L$  cercato si ottiene nel modo seguente: presi  $\phi \in U^*$  e  $\psi \in V^*$ , poniamo  $L(\phi \otimes \psi) = L_{\phi, \psi}$ , con  $L_{\phi, \psi}$  definito, comunque scelti  $u \in U$  e  $v \in V$ , da  $L_{\phi, \psi}(u \otimes v) = \phi(u)\psi(v)$ ; sia  $L$  che i vari  $L_{\phi, \psi}$  sono estesi ai rispettivi spazi  $(U^* \otimes V^*$  e  $U \otimes V$ ) per linearità.

L'inversa di  $L$ , chiamiamola  $G$ , si ottiene nel modo seguente: preso un funzionale  $l \in (U \otimes V)^*$  definiamo  $G(l)$  come il tensore di  $U^* \otimes V^*$  tale che  $G(l)(u, v) = l(u \otimes v)$  comunque presi  $u \in U$  e  $v \in V$ ;  $G(l)$  è poi esteso a tutto  $U \otimes V$  per bilinearità.

5. Definiamo l'applicazione  $L : U^* \otimes V \rightarrow \text{Hom}(U, V)$  nel modo seguente: presi  $\phi \in U^*$  e  $v \in V$  sia  $L(\phi \otimes v)(u) = \phi(u)v$  per ogni  $u \in U$ , ed estendiamo  $L$  per linearità.

Per dimostrare che questo è effettivamente un isomorfismo, basta far vedere che manda base in base; per farlo consideriamo basi  $\{u_1, \dots, u_n\}$  di  $U$ , con base duale  $\{w_1, \dots, w_n\}$ , e  $\{v_1, \dots, v_m\}$  di  $V$ . Detti  $L_{ij} = L(w_i \otimes v_j)$ , dobbiamo dimostrare che gli  $L_{ij}$  sono linearmente indipendenti; presi  $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$  tali che  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} L_{ij} = \mathbf{0}$ , abbiamo allora

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} L_{ij}(u_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} w_i(u_k) v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \delta_k^i v_j = \sum_{j=1}^m \lambda_{kj} v_j$$

Questo significa che per ogni  $k = 1, \dots, n$  fissato vale  $\lambda_{kj} = 0$  per ogni  $j = 1, \dots, m$ , e di conseguenza tutti i  $\lambda_{ij}$  sono nulli. La tesi è dunque dimostrata. □

Quelle viste finora sono le principali proprietà del prodotto tensoriale come spazio vettoriale; tuttavia la struttura di  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  è molto più ricca.

Consideriamo infatti un qualsiasi spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita su un campo  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso, e siano  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una sua base e  $\{t_1, \dots, t_n\}$  la corrispondente base duale. Se definiamo  $\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ , possiamo dotare  $V$  della topologia di Zariski definendo i chiusi nel modo usuale: preso un  $f \in \mathbb{K}[V]$ , si definisce

$$V(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

Così facendo possiamo considerare  $V$  come una varietà algebrica affine.  $V$  risulta anche essere irriducibile: infatti corrisponde all'ideale  $(0)$  di  $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ , che è primo perché  $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$  è un dominio d'integrità.

Dunque  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  è una varietà algebrica affine e irriducibile, e se  $\mathbb{K}$  è il campo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  allora  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  è anche una varietà differenziabile complessa.

## Capitolo 2

# Azioni di gruppi

La prima sezione di questo capitolo è dedicata a richiamare i primi risultati sulle azioni di gruppi algebrici; per una trattazione approfondita dell'argomento, che è vastissimo, il lettore può consultare ad esempio [Bor]. Nella seconda sezione sono invece introdotti gli spazi vettoriali preomogenei e la trasformata di castling, e quanto esposto è mutuato principalmente da [Man].

### 2.1 Gruppi e varietà algebriche

**Definizione 2.1.** Un *gruppo algebrico* è una varietà algebrica  $G$  dotata di una struttura di gruppo e tale che le funzioni moltiplicazione

$$\mu : G \times G \longrightarrow G \mid \mu(g, h) = gh$$

e inversa

$$i : G \longrightarrow G \mid i(g) = g^{-1}$$

risultano morfismi di varietà algebriche.

Riportiamo di seguito alcuni esempi:

1. Cominciamo considerando  $GL_n(\mathbb{C})$ , cioè l'insieme delle matrici invertibili di dimensione  $n$  a coefficienti in  $\mathbb{C}$ . Quest'insieme è un aperto principale della varietà affine  $M_n(\mathbb{C})$  (è il complementare del chiuso individuato dalle matrici a determinante  $det$  nullo, ovvero  $D(det)$ ), che ha dimensione  $n^2$  ed è irriducibile; di conseguenza  $GL_n(\mathbb{C})$  è una varietà affine anch'essa di dimensione  $n^2$ . Visto che i coefficienti del prodotto  $AB$  di due matrici  $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$  sono funzioni polinomiali dei coefficienti di  $A$  e  $B$ , e che i coefficienti di  $A^{-1}$  sono funzioni polinomiali dei coefficienti di  $A$  e di  $\frac{1}{det}$ ,  $GL_n(\mathbb{C})$  è un gruppo algebrico affine.
2. Ogni sottogruppo chiuso di  $GL_n(\mathbb{C})$  è a sua volta un gruppo algebrico affine, detto in generale *gruppo algebrico lineare*; è possibile dimostrare che tutti i gruppi algebrici affini sono lineari.
3. Anche i gruppi  $GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{n_k}(\mathbb{C})$  sono gruppi algebrici affini, e lo si vede utilizzando gli stessi ragionamenti esposti nell'esempio 1).

Ciò che a noi interessa sono le azioni di gruppi algebrici su varietà algebriche, dunque cominciamo col dare la seguente

**Definizione 2.2.** Una  $G$ -varietà  $X$  è una varietà algebrica dotata di un'azione  $a$  del gruppo algebrico  $G$  che è anche un morfismo di varietà algebriche.

$$a : G \times X \longrightarrow X \mid a(g, x) = g \cdot x$$

In questo caso  $a$  è detta una  $G$ -azione algebrica. Dato  $x \in X$ , la sua orbita rispetto all'azione  $a$  è l'insieme

$$O_x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$$

mentre il gruppo d'isotropia (o stabilizzatore) di  $x$  è l'insieme

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subseteq G$$

Un'utile proprietà dei gruppi d'isotropia (valida per l'azione di qualsiasi gruppo, non necessariamente per quelle di gruppi algebrici) è la seguente:

**Proposizione 2.1.** *Siano  $G$  un gruppo che agisce su un insieme  $\Omega$  e  $x$  un elemento di  $\Omega$ ; se  $y \in O_x$  allora  $G_x$  e  $G_y$  sono coniugati.*

*Dimostrazione.* Valga  $y = h \cdot x$  con  $h \in G$ ; se  $g \in G_y$  allora  $g \cdot y = y$  cioè  $g \cdot (h \cdot x) = h \cdot x$  e quindi, per le proprietà dell'azione,  $(h^{-1}gh) \cdot x = x$ . Di conseguenza  $h^{-1}gh \in G_x$  e quindi  $g \in hG_xh^{-1}$  ovvero  $G_y \subseteq hG_xh^{-1}$ .

Viceversa sia  $g \in hG_xh^{-1}$ , allora  $g = h\bar{g}h^{-1}$  per qualche  $\bar{g} \in G_x$ ; ma in tal caso  $g \cdot y = (h\bar{g}h^{-1}) \cdot (h \cdot x) = (h\bar{g}) \cdot x$ . Poiché  $\bar{g} \in G_x$  otteniamo  $g \cdot y = h \cdot x = y$  e quindi  $g = h\bar{g}h^{-1} \in G_y$ ; di conseguenza  $hG_xh^{-1} \subseteq G_y$ .  $\square$

**Definizione 2.3.** Siano  $X$  e  $Y$  due  $G$ -varietà e  $f : X \longrightarrow Y$  un morfismo;  $f$  è detto  $G$ -invariante se per ogni  $x \in X$  e  $g \in G$  vale  $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ . Alternativamente,  $f$  è detto un  $G$ -morfismo.

Prima di procedere nella trattazione, è opportuno ricordare la definizione e alcune proprietà degli insiemi costruibili, e con esse il teorema di Chevalley.

**Definizione 2.4.** Sia  $X$  uno spazio topologico; un sottoinsieme  $U$  di  $X$  è detto *costruibile* se è ottenibile tramite un numero finito di unioni e intersezioni di aperti e chiusi di  $X$ ; equivalentemente,  $U$  è costruibile se esistono  $p \in \mathbb{N}$  ed  $A_i$  aperti e  $C_i$  chiusi per  $i = 1, \dots, p$  tali che  $U = \cup_{i=1}^p (A_i \cap C_i)$ . Se chiamiamo *localmente chiusi* i sottoinsiemi  $V$  di  $X$  aperti in un chiuso di  $X$  (cioè tali che esistono un aperto  $A$  e un chiuso  $C$  di  $X$  tali che  $V = A \cap C$ ), possiamo equivalentemente dire che  $U$  è costruibile se è un'unione finita di insiemi localmente chiusi.

**Proposizione 2.2.** *Sia  $X$  una varietà algebrica e  $Y$  un suo sottoinsieme costruibile; allora  $Y$  contiene un sottoinsieme aperto e denso di  $\bar{Y}$ .*

**Teorema 2.3** (Teorema di Chevalley). *Siano  $X$  e  $Y$  varietà algebriche e  $f : X \longrightarrow Y$  un morfismo. Se  $U \subseteq X$  è costruibile allora anche  $f(U)$  è costruibile; in particolare  $f(U)$  contiene un sottoinsieme aperto e denso di  $\overline{f(U)}$ .*

Illustriamo adesso le principali proprietà dei  $G$ -morfismi:

**Proposizione 2.4.** *Sia  $X$  una  $G$ -varietà e sia  $x$  un suo punto.*

1. Il gruppo d'isotropia  $G_x$  è chiuso in  $G$ .
2. L'orbita  $O_x$  è una sottovarietà liscia e localmente chiusa di  $X$ , ed ogni sua componente (connessa o irriducibile) ha dimensione  $\dim(G) - \dim(G_x)$ .

3. La chiusura  $\overline{O_x}$  dell'orbita è l'unione di  $O_x$  e delle orbite di dimensione più piccola; in particolare contiene almeno un'orbita chiusa.
4. Il gruppo algebrico  $G$  è connesso se e solo se è irriducibile; in tal caso l'orbita  $O_x$  e la sua chiusura sono anch'esse irriducibili.

*Dimostrazione.*

1. Definiamo il morfismo tra varietà  $f_x : G \rightarrow X$  ponendo  $f_x(g) = g \cdot x$ ; ci interesseranno le sue fibre (cioè le retroimmagini di elementi di  $X$ ). Poiché  $f_x(G) = O_x$ , se  $y \notin O_x$  chiaramente  $f_x^{-1}(y) = \emptyset$ ; se invece  $y = g \cdot x$  per qualche  $g \in G$ , varrà  $f_x^{-1}(y) = gG_x$ . Poiché le fibre di un morfismo sono sottovarietà chiuse, otteniamo che  $gG_x$  (e quindi lo stesso  $G_x$ ) è chiuso in  $G$ .
2. Poiché  $f_x$  è un morfismo, per il teorema di Chevalley  $O_x = f_x(G)$  è costruibile e contiene un sottoinsieme aperto e denso della sua chiusura (sia  $U \subseteq \overline{O_x}$ ).  $U$  è anche un intorno aperto in  $\overline{O_x}$  di un qualche punto di  $O_x$ , e poiché  $G$  agisce transitivamente su  $O_x$  e fissa  $\overline{O_x}$  otteniamo che lo stesso  $O_x$  è aperto in  $\overline{O_x}$ . Di conseguenza  $O_x$  è una varietà ed è localmente chiusa.

Visto che ogni varietà contiene almeno un punto non singolare, e che  $G$  agisce transitivamente su  $O_x$ ,  $O_x$  risulta una sottovarietà liscia di  $X$ ; di conseguenza le sue componenti connesse e irriducibili coincidono ed hanno tutte la stessa dimensione, che risulta essere  $\dim(G) - \dim(G_x)$ .

3. Dalla prima parte del punto 2) otteniamo che  $\overline{O_x} - O_x$  è stabile sotto l'azione di  $G$ , e dunque dev'essere costituito da un'unione di orbite. Poiché  $\dim(O_x) = \dim(\overline{O_x})$  e la dimensione di  $O_x$  è l'estremo superiore tra le dimensioni delle sue componenti irriducibili, otteniamo che le dimensioni delle orbite che compongono  $\overline{O_x} - O_x$  devono essere strettamente minori di  $\dim(O_x)$ ; di conseguenza  $\overline{O_x}$  si compone di  $O_x$  e di altre orbite tutte di dimensione strettamente minore di  $\dim(O_x)$ .

Sia  $O$  un'orbita di dimensione minima in  $\overline{O_x}$ , allora per lo stesso argomento appena esposto dovrà valere  $\overline{O} - O = \emptyset$ ; questo significa che  $O$  è chiusa in  $X$ .

4. Chiaramente lo stesso gruppo  $G$  è una  $G$ -varietà se come azione consideriamo la moltiplicazione di gruppo (a sinistra); poiché quest'azione è transitiva,  $G$  risulta essere un'orbita e quindi per il punto 2) è una varietà liscia e di conseguenza connessione e irriducibilità coincidono. Infine, se  $G$  è irriducibile lo è anche la sua immagine tramite  $f_x$ , ovvero  $O_x$ ; ma questo implica che pure  $\overline{O_x}$  è irriducibile.

□

Consideriamo una  $G$ -varietà  $X$  irriducibile ed una sua orbita  $O_x$ . Poiché la dimensione di una varietà algebrica è l'estremo superiore delle dimensioni delle sue componenti irriducibili, la proposizione precedente ci dice che  $\dim(O_x) = \dim(G) - \dim(G_x)$ ; d'altra parte vale anche  $\dim(O_x) \leq \dim(X)$  dunque otteniamo  $\dim(G) - \dim(G_x) = \dim(O_x) \leq \dim(X)$ .

Se  $O_x$  fosse aperta allora sarebbe anche densa, essendo  $X$  irriducibile, e poiché per ogni  $U \subseteq X$  vale  $\dim(U) = \dim(\overline{U})$  otterremmo in tal caso  $\dim(O_x) = \dim(X)$ ; di conseguenza per  $O_x$  non aperta varrà  $\dim(G) - \dim(G_x) = \dim(O_x) < \dim(X)$ . Pertanto condizione necessaria affinché l'orbita  $O_x$  possa essere aperta è che valga

$$\dim(G) - \dim(G_x) \geq \dim(X)$$

Se definiamo  $d_m = \min\{\dim(G_x) | x \in X\}$  otteniamo una condizione necessaria affinché una qualsiasi orbita dell'azione di  $G$  possa essere aperta, ovvero

$$\dim(G) - d_m \geq \dim(X) \quad (2.1)$$

Come già detto alla fine del primo capitolo, una varietà algebrica  $X$  sul campo complesso  $\mathbb{C}$  è anche una varietà differenziabile complessa; in particolare un gruppo algebrico su  $\mathbb{C}$  è anche un gruppo di Lie. Ciò significa che ogni  $G$ -varietà  $X$  su  $\mathbb{C}$  può essere pensata come una varietà differenziabile complessa su cui agisce un gruppo di Lie.

## 2.2 Spazi preomogenei e trasformata di castling

**Definizione 2.5.** Siano  $G$  un gruppo e  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$ ; un'azione di  $G$  su  $V$  è una funzione

$$\rho : G \times V \longrightarrow V \quad | \quad \rho(g, v) = g \cdot v$$

dotata delle seguenti proprietà: per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}, g, g_1, g_2 \in G$  e  $v, v_1, v_2 \in V$

- 1)  $g \cdot (\lambda v) = \lambda(g \cdot v)$
- 2)  $g \cdot (v_1 + v_2) = g \cdot v_1 + g \cdot v_2$
- 3)  $g_1 \cdot (g_2 \cdot v) = (g_1 g_2) \cdot v$
- 4)  $(1_G \cdot v) = v$

Ogni volta che un gruppo  $G$  agisce su uno spazio vettoriale  $V$ , quest'ultimo ottiene in modo naturale una struttura di  $G$ -modulo: basta infatti porre, per ogni  $g \in G$  e  $v \in V$ ,  $gv = g \cdot v$ . Le proprietà dell'azione garantiscono che così facendo  $V$  risulta un  $G$ -modulo. Ovviamente è vero anche il contrario: se  $V$  è un  $G$ -modulo per un qualche gruppo  $G$ , allora  $G$  agisce su  $V$  come descritto nella definizione precedente.

*Osservazione 3.* Fissiamo un elemento  $g \in G$  e consideriamo la funzione  $\rho_g : V \longrightarrow V$  definita da  $\rho_g(v) = g \cdot v$ . Le proprietà 1) e 2) dell'azione ci dicono che  $\rho_g$  è un'applicazione lineare di  $V$ , mentre la 4) ci garantisce che  $\rho_g \circ \rho_{g^{-1}} = \rho_{g^{-1}} \circ \rho_g = Id_V$ ; di conseguenza otteniamo  $\rho_g \in GL(V)$ . Ma dalla proprietà 3) segue anche che, per  $g, h \in G$  qualsiasi,  $\rho_{gh} = \rho_g \circ \rho_h$ ; possiamo dunque pensare l'azione di  $G$  su  $V$  come un morfismo di gruppi  $\rho : G \longrightarrow GL(V) \quad | \quad \rho(g) = \rho_g$ .

Come abbiamo visto nel primo capitolo, ogni spazio vettoriale  $V$  può essere dotato della topologia di Zariski; a questo punto, se  $V$  è un  $G$ -modulo, potremmo studiare le sue orbite e cercare di capire, ad esempio, se sono chiuse o aperte, e classificare i vari  $G$ -moduli in base a quanto scopriamo. In particolare si ha la seguente

**Definizione 2.6.** Siano  $G$  un gruppo algebrico affine e  $V$  un  $G$ -modulo;  $V$  è detto uno *spazio preomogeneo* (o quasi omogeneo) se contiene un'orbita aperta  $O$  (nel senso della topologia di Zariski) rispetto all'azione di  $G$ . Preso un  $x \in V$ , il suo stabilizzatore rispetto all'azione di  $G$  è detto gruppo d'isotropia ed è indicato con  $G_x$ .

D'ora in avanti con l'espressione ' $G$ -modulo' indicheremo sempre uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{C}$  su cui agisce un gruppo algebrico affine  $G$ .

Ogni  $G$ -modulo  $V$  risulta essere una varietà algebrica affine e irriducibile, come mostrato nel capitolo 1, dunque i suoi aperti sono anche densi; in particolare sarà densa (se c'è) l'orbita aperta per l'azione di  $G$ .

*Osservazione 4.* Per meglio distinguere tra loro gli spazi preomogenei è opportuno definire delle classi d'equivalenza. Uno dei primi modi per farlo è il seguente: siano  $V$  un  $G$ -modulo rispetto all'azione  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  e  $V'$  un  $G'$ -modulo rispetto all'azione  $\rho' : G' \longrightarrow GL(V')$ ;  $V$  e  $V'$  sono detti *fortemente equivalenti* se esiste un isomorfismo di  $V$  e  $V'$  che identifica le azioni di  $\rho(G)$  e  $\rho'(G')$  come sottospazi di  $GL(V) \simeq GL(V')$ . Questa relazione d'equivalenza ci consente di classificare gli spazi preomogenei in base all'azione effettiva di  $\rho(G)$  su  $V$ , invece che in base a quella di  $G$  (possono infatti presentarsi casi in cui le azioni di  $G$  e  $G'$  sono definite in modo diverso, ma coincidono se viste come sottospazi dello spazio degli automorfismi).

L'esempio più banale di spazio vettoriale preomogeneo è  $V = \{0\}$ , che è chiaramente preomogeneo per l'azione di qualsiasi gruppo; un esempio meno banale ma comunque semplice è dato da  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$  rispetto all'azione del gruppo  $GL_m(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$  definita nel modo seguente:

$$((A, B), M) \longrightarrow AMB^t \text{ per } (A, B) \in GL_m(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}), M \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \quad (2.2)$$

Sappiamo che moltiplicando una matrice  $M \in M_{m \times n}$  per opportune matrici di  $GL_m(\mathbb{C})$  e  $GL_n(\mathbb{C})$  è possibile ricondurre  $M$  alla forma

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $r$  indica il rango di  $M$ ; di conseguenza ogni orbita di quest'azione è costituita da tutte le matrici di rango  $r \in \{0, \dots, \min\{m, n\}\}$  fissato, e quindi il numero totale di orbite è  $\min\{m, n\} + 1$ . Poiché le matrici di rango massimo costituiscono un aperto di  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ , esse formano un'orbita aperta.

Una condizione sufficiente affinché un  $G$ -modulo sia preomogeneo è fornita dalla seguente

**Proposizione 2.5.** *Sia  $V$  un  $G$ -modulo di dimensione  $n$  e sia  $m \geq n$  un intero; allora  $V \otimes \mathbb{C}^m$  è preomogeneo rispetto all'azione del gruppo  $G \times GL_m(\mathbb{C})$  definita sui tensori decomponibili da*

$$(G \times GL_m(\mathbb{C})) \times (V \otimes \mathbb{C}^m) \longrightarrow V \otimes \mathbb{C}^m \mid ((g, A), v \otimes u) \rightarrow (g \cdot v) \otimes Au$$

*Dimostrazione.* Siano  $\{u_1, \dots, u_m\}$  una base di  $\mathbb{C}^m$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  e  $\{t_1, \dots, t_n\}$  la corrispondente base duale di  $V^*$ ; cerchiamo di esaminare in dettaglio l'azione di  $G \times GL_m(\mathbb{C})$ . La proposizione 1.4 ci dice che  $V \otimes \mathbb{C}^m \simeq Hom(V^*, \mathbb{C}^m)$ , e quest'isomorfismo (chiamiamolo  $L$ ) è definito sulla base  $\{v_i \otimes u_j\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$  di  $V \otimes \mathbb{C}^m$  da  $L(v_i \otimes u_j) = L_{ij}$  con

$$L_{ij} : V^* \longrightarrow \mathbb{C}^m \mid L_{ij}(t_k) = t_k(v_i)e_j$$

Gli  $L_{ij}$  costituiscono una base di  $Hom(V^*, \mathbb{C}^m)$ , perché come è facilmente verificabile la matrice  $m \times n$  che li rappresenta ha un 1 al posto  $(j, i)$ -esimo e 0 altrove.

Sia  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  la funzione che rappresenta l'azione di  $G$  su  $V$ , allora l'elemento  $g \cdot v$  coinciderà con  $\rho_g(v)$ ; poiché ogni  $\rho_g$  è rappresentabile come una matrice  $B \in \rho(G) \subseteq GL(V) \simeq GL_n(\mathbb{C})$ , possiamo riscrivere l'azione di  $G$  su  $V$  come  $\rho(G) \times V \longrightarrow V \mid (B, v) \rightarrow Bv$ . Di conseguenza l'azione di  $G \times GL_m(\mathbb{C})$  su  $V \otimes \mathbb{C}^m$  si riscriverà, sui tensori decomponibili, come

$$(\rho(G) \times GL_m(\mathbb{C})) \times (V \otimes \mathbb{C}^m) \longrightarrow V \otimes \mathbb{C}^m \mid ((B, A), v \otimes u) \rightarrow Bv \otimes Au$$

Prendiamo adesso una matrice  $B \in \rho(G)$ , una matrice  $A \in GL_m(\mathbb{C})$  ed un elemento  $x \in V \otimes \mathbb{C}^m$ , rappresentato come elemento di  $Hom(V^*, \mathbb{C}^m)$  da una matrice  $M \in M_{m \times n}$ ; se scriviamo  $x$  in funzione della base  $\{v_i \otimes u_j\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$ , vi facciamo agire  $(B, A)$  e chiamiamo  $N$  la matrice  $M_{m \times n}$  che rappresenta il nuovo elemento di  $Hom(V^*, \mathbb{C}^m)$  così trovato, otteniamo che  $N = AMB^t$ . L'azione di  $G \times GL_m(\mathbb{C})$  può dunque risciversi come

$$(\rho(G) \times GL_m(\mathbb{C})) \times Hom(V^*, \mathbb{C}^m) \longrightarrow Hom(V^*, \mathbb{C}^m) \quad | \quad ((B, A), M) \rightarrow AMB^t \quad (2.3)$$

Ammettiamo che la matrice  $M$  abbia rango massimo; allora moltiplicandola a sinistra per opportune matrici  $A \in GL_m(\mathbb{C})$ , potremo ridurla alla forma

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza le matrici di  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$  di rango massimo costituiscono un'orbita aperta per la nostra azione (come matrice  $B \in \rho(G)$  basta prendere sempre l'identità, che appartiene sicuramente a  $\rho(G)$  per le proprietà dell'azione). □

*Osservazione 5.* Le azioni (2.2) e (2.3), per quanto descritte dalla stessa 'formula', sono in realtà diverse. Ammettiamo infatti che valga  $m \geq n$  come nelle ipotesi della precedente proposizione, e sia  $M \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  di rango  $r \in \{1, \dots, n-1\}$ : agendo come in (2.2) potremo ricondurre  $M$  ad una matrice avente un blocco identità di dimensione  $r$  in alto a sinistra e zeri altrove; agendo come in (2.3) invece non è detto che possiamo farlo. Infatti per permutare tra loro le colonne di una matrice  $M \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  è necessario moltiplicare  $M$  a destra per una matrice di permutazione  $n \times n$ , che certamente appartiene a  $GL_n(\mathbb{C})$  ma non è detto appartenga a  $\rho(G)$ . Di conseguenza le matrici di rango  $r \in \{1, \dots, n-1\}$ , che appartengono tutte alla stessa orbita rispetto all'azione (2.2), apparterranno in generale ad orbite diverse rispetto all'azione (2.3).

Se la proposizione precedente ci fornisce una condizione sufficiente affinché un  $G$ -modulo sia preomogeneo, quella seguente ci permette, partendo da un  $G$ -modulo preomogeneo, di trovarne molti altri:

**Proposizione 2.6.** *Sia  $V$  un  $G$ -modulo di dimensione  $n$ , e siano  $p, q \in \mathbb{N}$  tali che  $n = p+q$ ; allora  $V \otimes \mathbb{C}^p$  è uno spazio preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_p(\mathbb{C})$  se e solo se  $V^* \otimes \mathbb{C}^q$  è uno spazio preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_q(\mathbb{C})$ .*

*Dimostrazione.* Come abbiamo visto, se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$  e  $\{u_1, \dots, u_p\}$  è una base di  $\mathbb{C}^p$  allora  $\{v_i \otimes u_j\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, p}$  è una base di  $V \otimes \mathbb{C}^p$ ; poiché la funzione  $v_i \otimes u_j \rightarrow (0, \dots, 0_{j-1}, v_i, 0_{j+1}, \dots, 0)$  manda la nostra base di  $V \otimes \mathbb{C}^p$  in una base di  $\bigoplus_{i=1}^p V$ , abbiamo che  $V \otimes \mathbb{C}^p \simeq \bigoplus_{i=1}^p V$ .

Supponiamo ora che questo spazio vettoriale sia preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_p(\mathbb{C})$ . Le  $p$ -uple  $(w_1, \dots, w_p)$  di vettori di  $V$  linearmente indipendenti costituiscono

un aperto di  $\bigoplus_{i=1}^p V$  che chiameremo  $\Omega_p$ , e che risulta stabile (i.e. viene mandato in sé stesso) per l'azione di  $G \times GL_p(\mathbb{C})$ ; di conseguenza  $\Omega_p$  e  $\bigoplus_{i=1}^p V - \Omega_p$  sono entrambi unioni di orbite; ma l'orbita aperta, essendo densa, non può essere contenuta in  $\bigoplus_{i=1}^p V - \Omega_p$ , che è un chiuso proprio di  $\bigoplus_{i=1}^p V$ , e quindi è contenuta in  $\Omega_p$ . Possiamo inoltre definire un'applicazione da  $\Omega_p$  alla grassmanniana costituita dai sottospazi vettoriali di dimensione  $p$  di  $V$  (chiamiamola  $G(p, V)$ ), che associa alla  $p$ -upla  $(w_1, \dots, w_p)$  il sottospazio vettoriale  $P$  che essa genera; osserviamo che la retroimmagine di un qualsiasi  $P$  è l'insieme delle sue possibili basi, su cui  $GL_p(\mathbb{C})$  agisce transitivamente. Abbiamo quindi ottenuto che  $V \otimes \mathbb{C}^p$  ha un'orbita aperta per l'azione di  $G \times GL_p(\mathbb{C})$  se e solo se  $G(p, V)$  ha un'orbita aperta per l'azione di  $G$ .

Ma per dualità possiamo dire che  $G(p, V) \simeq G(q, V^*)$ , in un modo tale che l'azione sul primo spazio è identificata con l'azione duale sul secondo; di conseguenza  $G(p, V)$  ha un'orbita aperta per l'azione di  $G$  se e solo se  $G(q, V^*)$  ce l'ha, e per gli stessi argomenti usati in precedenza questo accade se e solo se  $V^* \otimes \mathbb{C}^q$  è preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_q(\mathbb{C})$ .  $\square$

*Osservazione 6.* L'insieme  $\Omega_p$  definito in questa dimostrazione *non* è in generale un'orbita. Per accorgersene basta considerare il seguente esempio: sia  $V = \text{Sym}^2(\mathbb{C}^n)$ , ovvero lo spazio vettoriale delle forme quadratiche su  $\mathbb{C}^n$ ; ogni suo elemento può essere rappresentato come una matrice simmetrica  $S \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Su  $V$  agisce in modo naturale il gruppo  $G = GL_n(\mathbb{C})$ , tramite  $B \cdot S = BSB^t$  con  $B \in G, S \in V$ .

Se  $S$  rappresenta una forma quadratica di rango  $r \in \{0, \dots, n\}$ , la sua orbita relativa all'azione di  $G$  conterrà solo forme quadratiche di rango  $r$ ; di conseguenza  $\Omega_1$  non è un'orbita, perché ne fanno parte forme quadratiche di rango qualsiasi e non di un rango fissato.

La trasformazione illustrata nella proposizione 2.6 prende il nome di *trasformata di castling*, ed è stata introdotta per la prima volta da Sato e Kimura in [SK]. La sua importanza è chiarita da questo semplice esempio: se  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  preomogeneo per l'azione di  $G$ , allora chiaramente anche  $V \otimes \mathbb{C} \simeq V$  è preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_1(\mathbb{C}) \simeq G \times (\mathbb{C} - \{0\})$ ; ma in tal caso per la proposizione appena dimostrata anche  $V^* \otimes \mathbb{C}^{n-1}$  è preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_{n-1}(\mathbb{C})$ . Continuando a procedere in questo modo, otterremo sempre nuovi spazi preomogenei.

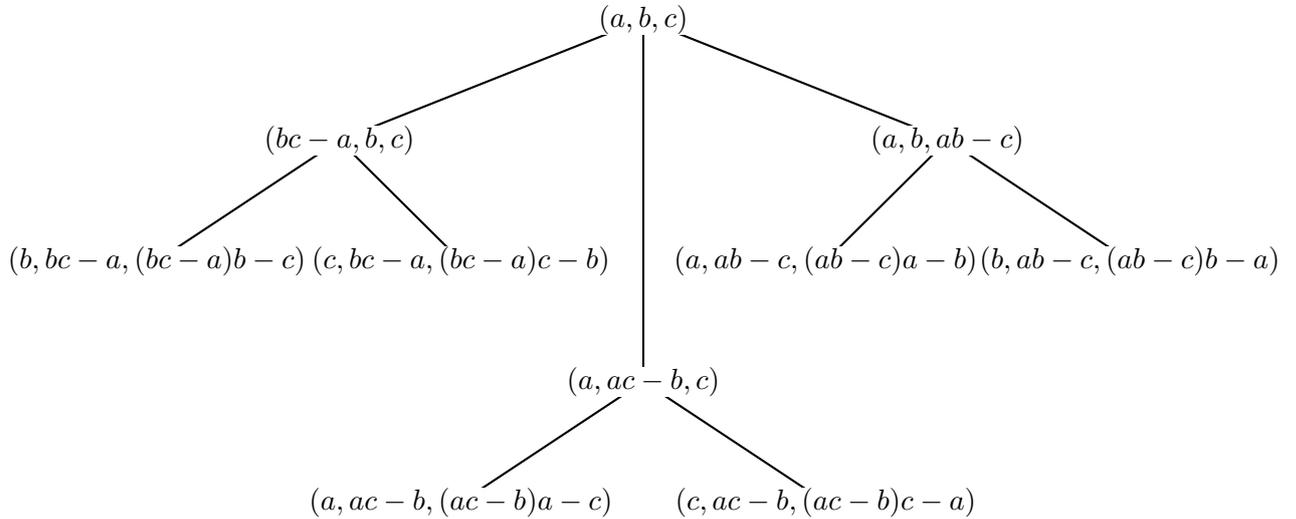
Definiamo ora la relazione  $\sim$  tra  $G$ -moduli nel modo seguente: dati un  $H$ -modulo  $U$  e un  $H'$ -modulo  $U'$ , diremo che  $U \sim U'$  se esistono un  $G$ -modulo  $V$  di dimensione  $n$  e  $p, q \in \mathbb{N}$  soddisfacenti  $p + q = n$  tali che  $U$  sia fortemente isomorfo al  $G \times GL_p(\mathbb{C})$ -modulo  $V \otimes \mathbb{C}^p$  e  $U'$  sia fortemente isomorfo al  $G \times GL_q(\mathbb{C})$ -modulo  $V^* \otimes \mathbb{C}^q$ . Poiché  $\sim$  risulta essere una relazione d'equivalenza, è chiaro che più che i singoli  $G$ -moduli (preomogenei o meno) ci interesserà studiare le classi d'equivalenza rispetto alla relazione  $\sim$ ; diamo dunque la seguente

**Definizione 2.7.** Un  $H$ -modulo  $U$  e un  $H'$ -modulo  $U'$  equivalenti secondo  $\sim$  sono detti *castling-equivalenti*.

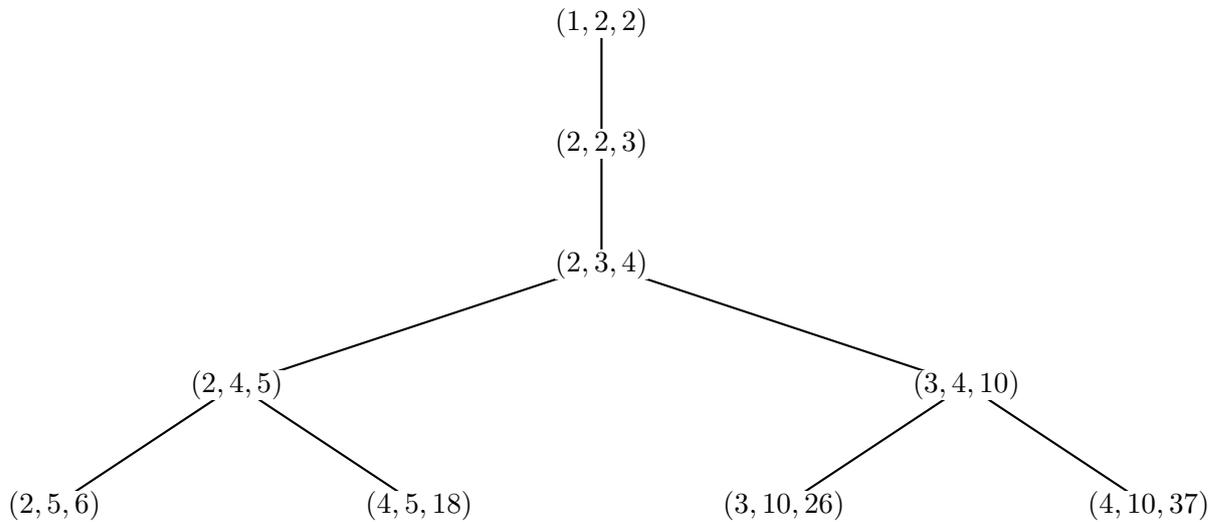
In questa tesi ci concentreremo in particolare sugli spazi vettoriali  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$ , su cui agisce il gruppo  $GL_a(\mathbb{C}) \times GL_b(\mathbb{C}) \times GL_c(\mathbb{C})$  come descritto nel capitolo 1.

Ammettiamo che questo spazio sia preomogeneo: se definiamo  $V = \mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b$ , che ha dimensione  $ab$ , e  $G = GL_a(\mathbb{C}) \times GL_b(\mathbb{C})$ , questo significa che  $V \otimes \mathbb{C}^c$  è preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_c(\mathbb{C})$ , e quindi, purché  $ab \geq c$ , pure  $V^* \otimes \mathbb{C}^{ab-c} = (\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b)^* \otimes \mathbb{C}^{ab-c} \simeq \mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^{ab-c}$  è preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_{ab-c}(\mathbb{C}) = GL_a(\mathbb{C}) \times GL_b(\mathbb{C}) \times GL_{ab-c}(\mathbb{C})$ . Poiché il ruolo di  $a, b, c$  è del tutto simmetrico, potremo organizzare gli spazi vettoriali  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$  tra loro castling-equivalenti come in figura (dove per semplicità

sono riportate solo gli esponenti dei vari fattori  $\mathbb{C}^n$ ); poiché gli elementi di ogni terna sono dimensioni di spazi vettoriali, e poiché se uno di essi è zero lo spazio è banalmente preomogeneo, l'albero conterrà solamente le terne  $(a, b, c)$  con  $a, b, c > 0$ .



Ad esempio lo spazio  $\mathbb{C}^1 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  è chiaramente preomogeneo per l'azione di  $GL_2(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C})$ , ed il suo 'albero di castling' è



Gli spazi  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$  che stanno 'alla base' degli alberi di castling, e le rispettive terne  $(a, b, c)$ , sono detti *minimali*; questa definizione verrà resa più precisa nel capitolo 4.

## Capitolo 3

# Introduzione ai quiver

Quanto riportato in questo capitolo è principalmente tratto da [Fae], [DW] e [Bri], ad esclusione dell'ultima sezione per cui si rimanda a [BGP] e [KR]; le bibliografie di tutte le opere citate indicano ulteriori testi sull'argomento, che coprono una buona parte della teoria dei quiver, e si rimanda ad esse per una trattazione più approfondita della materia.

### 3.1 Rappresentazioni di quiver e morfismi

**Definizione 3.1.** Un *quiver* è un grafo orientato finito; non escludiamo i casi in cui i vertici sono connessi da più frecce o ci sono 'lacci' che connettono un vertice con se stesso.

D'ora in avanti indicheremo un quiver con la lettera  $Q$ , il grafo non orientato a lui corrispondente con  $\Gamma$ , la sua orientazione con  $\Lambda$ , l'insieme dei suoi vertici con  $\Gamma_0$  e quello delle sue frecce con  $\Gamma_1$ ; quando sarà importante considerare l'orientazione del quiver, esso verrà indicato dalla coppia ordinata  $(\Gamma, \Lambda)$ . Ogni freccia  $l \in \Gamma_1$  ha una *sorgente*  $s(l) \in \Gamma_0$  e un *bersaglio*  $t(l) \in \Gamma_0$  ( $s$  e  $t$  possono essere pensate come funzioni  $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ ).

**Definizione 3.2.** Una *rappresentazione* di un quiver  $Q$  è una coppia  $((V_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_0}, (f_l)_{l \in \Gamma_1})$  dove ogni  $V_\alpha$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo  $\mathbb{K}$  (noi useremo  $\mathbb{C}$ ) ed ogni  $f_l$  è un'applicazione lineare  $V_{s(l)} \rightarrow V_{t(l)}$ . Denoteremo una rappresentazione con la coppia  $(V, f)$  o semplicemente con  $V$  (se l'importanza delle funzioni  $f_l$  sarà marginale). Se  $\dim(V_\alpha) = d_\alpha$ , il vettore  $d = (d_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_0}$  si dirà il vettore dimensione della rappresentazione  $(V, f)$ .

La più semplice rappresentazione di un quiver  $Q$  si ottiene ponendo  $V_\alpha = \{0\}$  per ogni  $\alpha \in \Gamma_0$  e, di conseguenza,  $f_l \equiv 0$  per ogni  $l \in \Gamma_1$ ; chiameremo questa rappresentazione *nulla*, e la indicheremo con  $(Z, 0)$ .

Un morfismo di due rappresentazioni  $(V, f)$  e  $(W, g)$  dello stesso quiver  $Q$ , indicato come  $\phi : (V, f) \rightarrow (W, g)$ , è una collezione di applicazioni lineari  $\phi_\alpha : V_\alpha \rightarrow W_\alpha$ , una per ciascun  $\alpha \in \Gamma_0$ , tale che per ogni  $l \in \Gamma_1$  il diagramma sottostante sia commutativo, ovvero valga  $g_{s(l)}\phi_{s(l)} = \phi_{t(l)}f_{s(l)}$ .

$$\begin{array}{ccc} V_{s(l)} & \xrightarrow{f_s(l)} & V_{t(l)} \\ \phi_s(l) \downarrow & & \downarrow \phi_t(l) \\ W_{s(l)} & \xrightarrow{g_s(l)} & W_{t(l)} \end{array}$$

Un isomorfismo di rappresentazioni non sarà altro che un morfismo di rappresentazioni in cui le  $\phi_\alpha : V_\alpha \rightarrow W_\alpha$  sono invertibili per ogni  $\alpha \in \Gamma_0$ .

Date due rappresentazioni  $(V, f) = ((V_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_0}, (f_l)_{l \in \Gamma_1})$  e  $(W, g) = ((W_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_0}, (g_l)_{l \in \Gamma_1})$  dello stesso quiver  $Q$ , definiamo la loro somma diretta come la rappresentazione  $(U, h)$  tale che  $U_\alpha = V_\alpha \oplus W_\alpha$  per ogni  $\alpha \in \Gamma_0$  e  $h_l = f_l \oplus g_l$  per ogni  $l \in \Gamma_1$ ; è ora naturale chiamare *indecomponibili* quelle rappresentazioni  $(V, f)$  tali che se  $(V, f) \simeq (W, g) \oplus (U, h)$  allora  $(W, g) = (Z, 0) \circ (U, h) = (Z, 0)$ .

Per ottenere le più semplici rappresentazioni indecomponibili di un quiver  $Q$  è sufficiente scegliere un  $\beta \in \Gamma_0$  e definire l'oggetto  $L_\beta = ((V_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_0}, (f_l)_{l \in \Gamma_1})$ , la cui struttura è la seguente:  $V_\alpha = \{0\}$  per ogni  $\alpha \neq \beta$  e  $V_\beta = \mathbb{C}$ , con  $f_l = 0$  per ogni  $l \in \Gamma_1$ .

Uno dei primi importanti risultati nello studio dei quiver è stata la loro classificazione in base al numero di classi di rappresentazioni indecomponibili rispetto alla relazione d'isomorfismo; al fine di illustrare tale classificazione, diamo le seguenti definizioni:

**Definizione 3.3.** Un quiver  $Q$  è detto di *tipo finito* se ha un numero finito di classi di rappresentazioni indecomponibili.

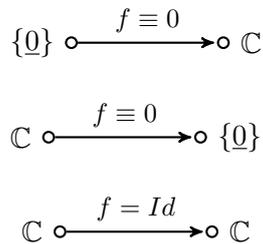
Per esempio il quiver  $A_2$ , consistente di due vertici e una sola freccia che li collega (si veda la figura), è di tipo finito.



Una sua rappresentazione con vettore dimensione  $d = (m, n)$  è descritta da una matrice  $M \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ , che può essere trasformata in una matrice del tipo

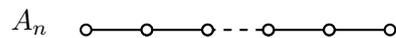
$$N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

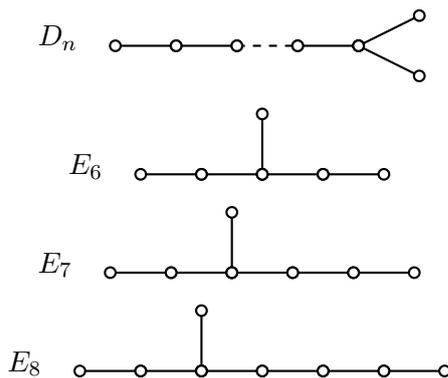
ove  $r \leq \min(m, n)$  indica il rango della matrice  $M$ , semplicemente applicando opportuni cambi di base negli spazi associati ai vertici di  $A_2$ ; osserviamo che la matrice  $N$  può scriversi come  $I_r \oplus 0_{(n-r) \times (m-r)}$ . Poiché una qualsiasi coppia di cambi di base costituisce un isomorfismo tra rappresentazioni di  $A_2$ , le rappresentazioni descritte dalle matrici  $M$  ed  $N$  sono equivalenti, e quest'ultima è indecomponibile solamente se  $r = 1$ . Di conseguenza gli unici vettori dimensione a dare rappresentazioni indecomponibili sono  $(0, 1), (1, 0)$  e  $(1, 1)$ , e le corrispondenti classi di rappresentazioni indecomponibili hanno come sistema di rappresentanti



La classificazione dei quiver di tipo finito, dovuta a P. Gabriel (si veda [Gab] per la dimostrazione originale e [BGP] per un'altra), è contenuta nel seguente

**Teorema 3.1.** *Un quiver è di tipo finito se e solo se le componenti connesse del corrispondente grafo non orientato sono diagrammi di Dynkin del tipo  $A_n, D_n$  o  $E_m$  per  $m = 6, 7, 8$ .*





I diagrammi di Dynkin giocano un ruolo centrale nella classificazione delle algebre di Lie di dimensione finita semplici e semisemplici, e non è un caso che compaiano anche nella classificazione dei quiver; è infatti possibile dimostrare che le rappresentazioni indecomponibili di un quiver connesso  $Q$  di tipo finito sono in corrispondenza biunivoca con le radici reali dell'algebra di Lie associata a  $Q$  dal diagramma di Dynkin.

**Definizione 3.4.** Se un quiver  $Q$  non è di tipo finito, ma fissato un qualunque vettore dimensione  $d$  le sue classi di rappresentazioni indecomponibili di dimensione  $d$  possono essere raggruppate in un numero finito di famiglie di dimensione al più 1, allora  $Q$  è detto di *tipo tame*.

Consideriamo ad esempio il quiver  $L_1$ , consistente di un solo vertice su cui insiste un laccio



Una sua rappresentazione di dimensione  $m$  è un endomorfismo  $\phi$  di un qualche spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $m$  su  $\mathbb{C}$ ; poiché  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso, operando un opportuno cambio di base in  $V$  la matrice che rappresenta  $\phi$  può essere ricondotta alla sua forma canonica di Jordan (unica a meno di permutazione dei blocchi di cui è composta)

$$\begin{bmatrix} J_{n_1, \lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2, \lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r, \lambda_r} \end{bmatrix}$$

dove ogni  $J_{n, \lambda}$  denota un blocco  $n \times n$  del tipo

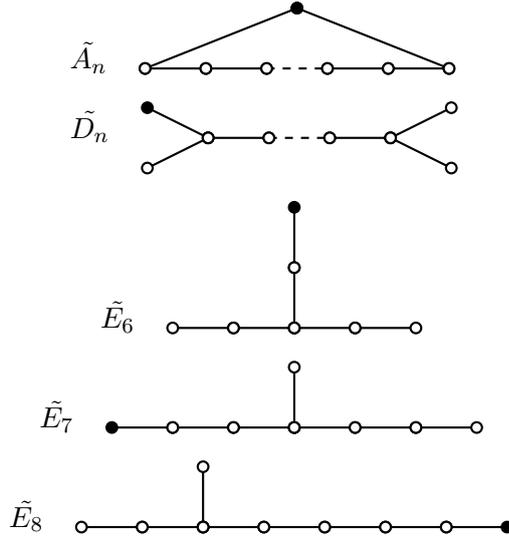
$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

che costituisce una rappresentazione indecomponibile di  $L_1$ . Di conseguenza questo quiver ha infinite classi di rappresentazioni indecomponibili, una per ogni possibile blocco  $n \times n$  con  $n \leq m$ ; ma se le raggruppiamo in famiglie secondo la dimensione  $n$  del blocco allora ciascuna famiglia dipende da un solo parametro continuo  $\lambda$ .

*Osservazione 7.* Le matrici diagonalizzabili, che sono quelle i cui blocchi di Jordan hanno dimensione 1, costituiscono un aperto denso di  $M_m(\mathbb{C})$ ; questo significa che preso un generico endomorfismo  $\phi$  è molto probabile che la matrice che lo rappresenta sia diagonalizzabile, e che quindi i suoi blocchi di Jordan siano del tipo più semplice possibile.

Anche i quiver di tipo tame sono stati classificati: vale infatti il seguente

**Teorema 3.2.** *Un quiver  $Q$  non di tipo finito è di tipo tame se e solo se le componenti connesse del corrispondente grafo non orientato sono diagrammi di Dynkin e diagrammi di Dynkin estesi del tipo  $\tilde{A}_n$ ,  $\tilde{D}_n$  o  $\tilde{E}_m$  con  $m = 6, 7, 8$ .*



*Osservazione 8.* Sia  $Q = (\Gamma, \Lambda)$  un quiver qualsiasi, e concentriamoci sul corrispondente grafo non orientato  $\Gamma$ ; possiamo definire lo spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$

$$E_\Gamma = \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_0} | x_\alpha \in \mathbb{K}\}$$

Definiamo adesso su  $E_\Gamma$  la forma bilineare

$$B(x) = \sum_{\alpha \in \Gamma_0} x_\alpha^2 - \sum_{l \in \Gamma_1} x_{e_1(l)} x_{e_2(l)}$$

dove  $e_1(l)$  ed  $e_2(l)$  indicano i due estremi del lato  $l \in \Gamma_1$ . E' possibile dimostrare che  $B$  risulta definita positiva solo se  $\Gamma$  è un diagramma di Dynkin semplice, mentre risulta semidefinita positiva solo se  $\Gamma$  è un diagramma di Dynkin esteso. Di conseguenza è possibile classificare i quiver di tipo finito e di tipo tame anche in base al comportamento di  $B$  per i corrispondenti grafi non orientati (in [BGP] quest'approccio è utilizzato per mostrare una delle due implicazioni del teorema di Gabriel).

E' possibile dimostrare che se un quiver non è né di tipo finito né di tipo tame, allora non esiste nessun intero  $m$  che limiti la dimensione delle famiglie delle sue rappresentazioni indecomponibili; un quiver di questo tipo è per esempio  $L_2$



Non è difficile osservare che le sue classi di rappresentazioni (non necessariamente indecomponibili!) di dimensione  $m$  consistono di tutte le coppie di matrici  $(A, B)$  con  $A, B \in M_m(\mathbb{C})$  a meno di coniugazione simultanea, ed individuare queste classi di equivalenza è molto più complicato che nel caso di  $L_1$ , in cui avevamo la forma canonica di Jordan ad aiutarci. Per vederlo basta considerare uno dei casi più semplici: ammettiamo infatti che  $(C, D)$  con  $C, D$  diagonali sia il rappresentante di una classe di equivalenza, allora  $(C, D)$  come classe di rappresentazione di  $L_2$  dipenderà da  $2m$  parametri (gli elementi di  $C$  e  $D$ ); ma una qualsiasi coppia di matrici  $(A, B)$  può essere diagonalizzata simultaneamente se e solo se  $A$  e  $B$  commutano, cosa che in generale ovviamente non accade. Ciò significa che una generica classe di rappresentazione di  $L_2$  dipenderà da almeno  $2m$  parametri, e sarà quindi ben più complesso descriverla rispetto al caso di  $L_1$ . Questo suggerisce la seguente

**Definizione 3.5.** Un quiver  $Q$  è di *tipo wild* rispetto al campo  $\mathbb{K}$  se  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(Q)$  contiene  $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(L_2)$  come sottocategoria completa.

Sebbene sembri un po' artificiosa, questa definizione in realtà riesce davvero a 'catturare' tutti i quiver di tipo né finito né tame; è infatti possibile dimostrare che

**Proposizione 3.3.** *Se quiver  $Q$  non è né di tipo finito né di tipo tame, allora è di tipo wild.*

## 3.2 Azioni di gruppo sulle rappresentazioni di un quiver

In quanto segue, con abuso di notazione,  $\alpha$ ,  $t(l)$  e  $s(l)$  potranno indicare sia il vertice di un quiver che la dimensione dello spazio vettoriale associato a tale vertice in una rappresentazione.

Fissato un quiver  $Q$  e un vettore dimensione  $d$ , l'insieme delle rappresentazioni di  $Q$  con vettore dimensione  $d$  si indicherà con  $R(Q, d)$ ; poiché un elemento  $(V, f) \in R(Q, d)$  è univocamente determinato dalle matrici che rappresentano le applicazioni  $f_l$ , l'insieme  $R(Q, d)$  non è che  $\bigoplus_{l \in \Gamma_1} M_{t(l) \times s(l)}(\mathbb{C})$ . In particolare  $R(Q, d)$  è uno spazio vettoriale, i cui elementi saranno indicati come  $(A_l)_{l \in \Gamma_1}$ .

Preso una qualsiasi rappresentazione  $(A_l)_{l \in \Gamma_1} \in R(Q, d)$ , possiamo cambiare la base di ciascun  $V_\alpha$  utilizzando matrici invertibili  $g_\alpha \in GL_\alpha(\mathbb{C})$ ; in questo modo otteniamo una nuova rappresentazione  $(A'_l)_{l \in \Gamma_1} = (g_{t(l)}^{-1} A_l g_{s(l)})_{l \in \Gamma_1}$ . Poiché i cambi di base sono isomorfismi di spazi vettoriali, la nuova rappresentazione sarà isomorfa a quella di partenza. Ciò significa che il gruppo  $\prod_{\alpha \in \Gamma_0} GL_\alpha(\mathbb{C})$  agisce su  $R(Q, d)$  nel modo appena indicato, e che le classi di isomorfismo delle rappresentazioni di  $Q$  con vettore dimensione  $d$  corrispondono esattamente alle orbite di tale azione.

Per un particolare tipo di quiver, tuttavia, questa non è l'unica azione possibile su  $R(Q, d)$ . Passiamo a considerare, infatti, il quiver su cui si concentra questo lavoro: il *quiver di Kronecker*, costituito da 2 vertici ed  $n$  frecce che li collegano aventi tutte lo stesso verso, ed indicato dal simbolo  $\Theta_n$



Sia  $(V, f)$  una rappresentazione di  $\Theta_c$  con vettore dimensione  $d = (a, b)$ , allora essa è univocamente determinata dalle  $c$  matrici di  $M_{b \times a}(\mathbb{C})$  che descrivono le funzioni  $f_i$ . Ciascuna di tali matrici può essere vista, come evidenziato dalla proposizione 1.4, come un elemento di  $(\mathbb{C}^a)^* \otimes \mathbb{C}^b \simeq \mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b$ , che indicheremo con  $w_i$ ; se adesso associamo ad ogni  $f_i$  l'elemento  $e_i \otimes w_i$ , con  $\{e_1, \dots, e_c\}$  base di  $\mathbb{C}^c$ , otteniamo che un generico elemento di

$R(\Theta_c, d)$  può essere visto come il tensore  $\sum_{i=1}^c e_i \otimes w_i$  in  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b$ , ovvero (sempre grazie alla proposizione 1.4) come un elemento di  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$ . Questo significa che su  $R(\Theta_c, d)$  si può far agire il gruppo dei cambi di base  $G = GL_a(\mathbb{C}) \times GL_b(\mathbb{C}) \times GL_c(\mathbb{C})$  nel modo descritto nel primo capitolo.

*Osservazione 9.* Rispetto all'azione 'standard' introdotta all'inizio della sezione, questa seconda azione modifica anche le funzioni  $f_i$ , e non soltanto le basi degli spazi  $V_a$  e  $V_b$ .

Le domande cui vorremmo rispondere circa quest'azione sono le seguenti: per quali terne  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  lo spazio  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$  è preomogeneo? Ci sono casi in cui il numero di orbite è finito?

Una prima risposta ci viene fornita dal prossimo teorema (di cui è omessa la dimostrazione). Dato un numero naturale  $c \geq 2$  definiamo per ricorrenza i numeri

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_i = ca_{i-1} - a_{i-2} \end{cases} \quad (3.1)$$

(osserviamo che per  $c = 3$  gli  $a_i$  sono i numeri di Fibonacci di posto dispari); allora esiste una forma canonica per un generico tensore di  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^a$  qualora  $a, b$  e  $c$  soddisfino una relazione aritmetica:

**Teorema 3.4** (Teorema di Kac). *Siano  $a, b, c \in \mathbb{N}$  con  $a \geq b \geq c \geq 2$  tali che*

$$a^2 + b^2 - abc \geq 1 \quad (3.2)$$

*Allora esistono unici  $n, m, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  che soddisfano*

$$\begin{cases} b = na_i + ma_{i+1} \\ a = na_{i+1} + ma_{i+2} \end{cases} \quad (3.3)$$

*tali che un generico tensore di  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^a$  si scompone sotto l'azione di  $GL_b(\mathbb{C}) \times GL_a(\mathbb{C})$  in  $n$  blocchi  $c \times a_i \times a_{i+1}$  e  $m$  blocchi  $c \times a_{i+1} \times a_{i+2}$ , detti blocchi di Fibonacci.*

Se  $c = 2$  gli  $a_i$  sono i numeri naturali compreso lo zero; in tal caso se  $a = n + 1$  e  $b = n$  per un intero  $n \geq 2$ , il risultato di Kac si riduce al noto teorema di Weierstrass per il quale un generico tensore di  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n+1}$  si scompone sotto l'azione di  $GL_n(\mathbb{C}) \times GL_{n+1}(\mathbb{C})$  in un tensore aventi slices  $n \times (n + 1)$  della forma

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Se invece  $a$  e  $b$  sono qualsiasi, il teorema di Kac va a coincidere con la forma canonica di Weierstrass per tensori in  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^a$ .

*Osservazione 10.* La dimostrazione originale di Kac, consultabile in [Kac], sfrutta la teoria della rappresentazione dei quiver applicata a  $\Theta_c$ . Kac dimostra che anche ai quiver di tipo wild, come appunto  $\Theta_c$  per  $c \geq 3$ , è possibile associare una 'algebra di Lie generalizzata', anche se essa non sarà di dimensione finita; queste algebre sono dette algebre di Kac-Moody. E' possibile dimostrare che le coppie  $(a_i, a_{i-1})$  e  $(a_{i-1}, a_i)$  con  $i \geq 1$  sono proprio i vettori dimensione delle rappresentazioni di  $\Theta_c$  corrispondenti alle radici reali dell'algebra di Kac-Moody associata al quiver. Per una dimostrazione alternativa, che sfrutta il linguaggio dei fibrati vettoriali, il lettore può consultare [Bra].

Non è un caso che i numeri  $a_i$  che compaiono nella (3.3) siano dati dalla (3.1); le coppie  $(a_i, a_{i+1})$  infatti risultano essere le uniche soluzioni intere e non negative dell'equazione  $x^2 + y^2 - cxy = 1$ , come dimostra il seguente

**Lemma 3.5.** *Tutte e sole le soluzioni  $(a, b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$  dell'equazione  $x^2 + y^2 - cxy = 1$  con  $c \in \mathbb{N}$  tali che  $a \leq b$  sono costituite dalle coppie  $(a_i, a_{i+1})$  per  $i \geq 0$ , ove gli  $a_i$  sono definiti per ricorrenza dalla (3.1).*

*Dimostrazione.* Cominciamo col dimostrare per induzione che le coppie  $(a_i, a_{i+1})$  sono soluzioni. Sicuramente  $(0, 1)$  lo è; supponiamo allora vera la tesi per la coppia  $(a_{i-1}, a_i)$  e dimostriamola per  $(a_i, a_{i+1})$ . Otteniamo

$$\begin{aligned} a_i^2 + a_{i+1}^2 - ca_i a_{i+1} &= a_i^2 + (ca_i - a_{i-1})^2 - ca_i(ca_i - a_{i-1}) \\ &= a_i^2 + c^2 a_i^2 + a_{i-1}^2 - 2ca_i a_{i-1} - c^2 a_i^2 + ca_i a_{i-1} \\ &= a_i^2 + a_{i-1}^2 - ca_i a_{i-1} = 1 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'ipotesi induttiva; di conseguenza l'asserzione è dimostrata.

Adesso dobbiamo solo assicurarci che l'equazione  $x^2 + y^2 - cxy = 1$  non abbia altre soluzioni all'infuori di quelle appena trovate. Operando le sostituzioni  $r = 2b - ca$  e  $s = a$ , la nostra equazione diventa  $r^2 - (c^2 - 4)s^2 = 4$ , un'equazione di tipo Pell-Fermat per la quale è noto che le soluzioni intere sono date dalle coppie  $(r_i, s_i)$ , ove gli  $r_i$  ed  $s_i$  sono definiti per ricorrenza da

$$\begin{cases} r_0 = 2 \\ s_0 = 0 \\ r_i = \frac{(c^2-4)s_{i-1} + cr_{i-1}}{2} \\ s_i = \frac{cs_{i-1} + r_{i-1}}{2} \end{cases}$$

Dobbiamo adesso dimostrare che le soluzioni  $(r_i, s_i)$  di  $r^2 - (c^2 - 4)s^2 = 4$  corrispondono a quelle  $(a_i, a_{i+1})$  di  $x^2 + y^2 - cxy = 1$ ; definiti i  $t_i$  applicando la trasformazione inversa della precedente, ovvero  $t_i = \frac{cs_i + r_i}{2}$ , dobbiamo dunque verificare che  $(s_i, t_i) = (a_i, a_{i+1})$ . Chiaramente  $(s_0, t_0) = (0, 1) = (a_0, a_1)$ ; supponiamo vera la tesi per gli  $(s_k, t_k)$  con  $k \leq i$  e dimostriamola per  $(s_{i+1}, t_{i+1})$ . Possiamo facilmente verificare che  $s_{i+1} = t_i$  per ogni  $i$  (segue semplicemente dalle definizioni di  $s_i$  e  $t_i$ ) e che

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= \frac{cs_{i+1} + r_{i+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{c(cs_i + r_i) + (c^2 - 4)s_i + cr_i}{2} \right] = \frac{(c^2 - 2)s_i + cr_i}{2} \\ &= \frac{(c^2 - 2)s_i + c(2t_i - cs_i)}{2} = ct_i - s_i = ct_i - t_{i-1} = ca_{i+1} - a_i \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'ipotesi induttiva. Di conseguenza  $(s_{i+1}, t_{i+1}) = (t_i, ca_{i+1} - a_i) = (a_{i+1}, a_{i+2})$  usando di nuovo l'ipotesi induttiva.  $\square$

Spesso ci riferiremo alla disuguaglianza (3.2) chiamandola disuguaglianza di Kac. L'importanza del teorema 3.4 per il presente lavoro è che ci garantisce che quando  $(a, b, c)$  soddisfa le sue ipotesi lo spazio  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^a$  è preomogeneo per l'azione di  $GL_c(\mathbb{C}) \times GL_b(\mathbb{C}) \times GL_a(\mathbb{C})$  (basta addirittura l'azione degli ultimi due fattori del gruppo). Per dimostrarlo sfrutteremo il seguente

**Lemma 3.6.** *Gli spazi  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^{a_i} \otimes \mathbb{C}^{a_{i+1}}$ , con gli  $a_i$  definiti dalla (3.1), sono preomogenei per l'azione di  $GL_{a_i}(\mathbb{C}) \times GL_{a_{i+1}}(\mathbb{C})$ .*

Questo lemma ci dice che i singoli blocchi di Fibonacci che compaiono nel teorema 3.4 sono preomogenei per l'azione di  $GL_{a_i}(\mathbb{C}) \times GL_{a_{i+1}}(\mathbb{C})$ .

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $i \geq 1$ . Se  $i = 1$  allora  $a_i = 1$  e  $a_{i+1} = c$ , e chiaramente  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^c \simeq \mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^c$  è preomogeneo per l'azione di  $GL_1(\mathbb{C}) \times GL_c(\mathbb{C})$ . Ammettiamo ora vera la tesi per un  $i > 1$  e dimostriamola per  $i + 1$ : per ipotesi  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^{a_i} \otimes \mathbb{C}^{a_{i+1}}$  è preomogeneo per l'azione di  $GL_{a_i}(\mathbb{C}) \times GL_{a_{i+1}}(\mathbb{C})$ , dunque se chiamiamo  $V = \mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^{a_{i+1}}$ ,  $G = GL_{a_{i+1}}(\mathbb{C})$ ,  $p = a_i$  e  $q = ca_{i+1} - a_i = a_{i+2}$ , la proposizione 2.6 ci garantisce che anche  $V^* \otimes \mathbb{C}^{a_{i+2}} \simeq \mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^{a_{i+1}} \otimes \mathbb{C}^{a_{i+2}}$  è preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_{a_{i+2}}(\mathbb{C}) = GL_{a_{i+1}}(\mathbb{C}) \times GL_{a_{i+2}}(\mathbb{C})$ .  $\square$

Possiamo adesso dimostrare che:

**Proposizione 3.7.** *Se  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  con  $a \geq b \geq c \geq 2$  soddisfa la (3.2) allora  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^a$  risulta preomogeneo per l'azione di  $GL_b(\mathbb{C}) \times GL_a(\mathbb{C})$ .*

*Dimostrazione.* Poiché le ipotesi del teorema 3.4 sono soddisfatte, esistono unici  $n, m, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tali che  $b = na_i + ma_{i+1}$  e  $a = na_{i+1} + ma_{i+2}$ , ed ogni tensore di  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^a$  al di fuori di un chiuso  $U$  si scompone sotto l'azione di  $GL_b(\mathbb{C}) \times GL_a(\mathbb{C})$  in  $n$  blocchi  $c \times a_i \times a_{i+1}$  e  $m$  blocchi  $c \times a_{i+1} \times a_{i+2}$ ; per il lemma 3.6 questi blocchi sono preomogenei per l'azione rispettivamente di  $GL_{a_i}(\mathbb{C}) \times GL_{a_{i+1}}(\mathbb{C})$  e  $GL_{a_{i+1}}(\mathbb{C}) \times GL_{a_{i+2}}(\mathbb{C})$ .

Chiamiamo  $V$  il sottospazio di  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^a - U$  formato dai tensori composti da blocchi di Fibonacci, e  $W$  il sottoinsieme di  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^a$  che si ottiene facendo agire  $GL_b(\mathbb{C}) \times GL_a(\mathbb{C})$  su  $V$ ; chiaramente vale  $V \subseteq W \subseteq (\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^a - U)$ . Il fatto che ogni singolo blocco di Fibonacci è preomogeneo per l'azione del corrispondente  $GL_{a_i}(\mathbb{C}) \times GL_{a_{i+1}}(\mathbb{C})$  ci dice che gli elementi 'a blocchi' di  $GL_b(\mathbb{C}) \times GL_a(\mathbb{C})$  agiscono transitivamente su  $V$ , e quindi  $GL_b(\mathbb{C}) \times GL_a(\mathbb{C})$  agisce transitivamente su tutto  $W$ .

Presi adesso due tensori qualunque  $x, y \in (\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^a - U)$ , l'azione di opportuni elementi  $g, h \in GL_b(\mathbb{C}) \times GL_a(\mathbb{C})$  li porterà (per il teorema 3.4) rispettivamente in elementi  $\bar{x}, \bar{y} \in V$ ; poiché  $V \subseteq W$ , l'azione di  $GL_b(\mathbb{C}) \times GL_a(\mathbb{C})$  porta anche  $\bar{x}$  in  $\bar{y}$ . Di conseguenza  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^a - U$  è un'orbita aperta per l'azione di  $GL_b(\mathbb{C}) \times GL_a(\mathbb{C})$ .  $\square$

Abbiamo visto che la preomogeneità è preservata per trasformata di castling, e questo chiaramente ci facilita il compito: una volta trovata una 'terna preomogenea'  $(a, b, c)$  anche tutte le terne ad essa castling-equivalenti lo saranno. Ma la connessione tra trasformata di castling e quiver è ben più profonda, come verrà illustrato nella prossima sezione.

### 3.3 I funtori di riflessione

Fissiamo un generico quiver  $Q = (\Gamma, \Lambda)$ . Per ogni vertice  $\beta \in \Gamma_0$  denotiamo con  $\Gamma^\beta$  l'insieme delle frecce contenenti  $\beta$ , e con  $\sigma_\beta \Lambda$  l'orientazione ottenuta da  $\Lambda$  invertendo la direzione di tutte le frecce  $l \in \Gamma^\beta$ .

**Definizione 3.6.** Diremo che un vertice  $\beta$  è *+accessibile* rispetto all'orientazione  $\Lambda$  se  $s(l) \neq \beta$  per ogni  $l \in \Gamma^\beta$  (cioè se ogni freccia contenente  $\beta$  punta a  $\beta$  e non ci sono lacci in  $\Gamma$  con  $\beta$  come vertice base); similmente,  $\beta$  è *-accessibile* rispetto all'orientazione  $\Lambda$  se  $t(l) \neq \beta$  per ogni  $l \in \Gamma^\beta$ .

Scegliendo come insieme degli oggetti l'insieme delle rappresentazioni di  $Q$  e come morfismi i morfismi tra rappresentazioni, possiamo definire una *categoria*, che sarà indicata d'ora in avanti con  $L(\Gamma, \Lambda)$ ; in quanto segue chiameremo gli elementi di questa categoria indifferentemente oggetti o rappresentazioni.

Sia  $\beta$  un vertice +accessibile (o indifferentemente -accessibile) di  $Q = (\Gamma, \Lambda)$ ; dato un oggetto  $V \in L(\Gamma, \Lambda)$ , è possibile associarvi un oggetto di  $L(\Gamma, \sigma_\beta \Lambda)$  mediante l'utilizzo di un opportuno funtore, detto *funtore di riflessione*, che verrà indicato con il simbolo  $F_\beta^+$  (o  $F_\beta^-$  se il vertice è -accessibile). Prima di vedere in dettaglio la costruzione del funtore ne riportiamo le principali proprietà, riassunte nel seguente

**Teorema 3.8.** *Fissiamo un quiver  $Q = (\Gamma, \Lambda)$ :*

1. *Sia  $\beta \in \Gamma_0$  un vertice +accessibile di  $Q$  rispetto all'orientazione  $\Lambda$  e sia  $V \in L(\Gamma, \Lambda)$  una rappresentazione indecomponibile di  $Q$ ; possono presentarsi due casi:*

(a)  $V \simeq L_\beta$  e  $F_\beta^+(V) = 0$

- (b)  $F_\beta^+(V)$  è una rappresentazione indecomponibile,  $F_\beta^- F_\beta^+(V) = V$  e le dimensioni degli spazi vettoriali  $F_\beta^+(V)_\gamma$  sono:

$$\begin{aligned} \dim(F_\beta^+(V)_\gamma) &= \dim(V_\gamma) \quad \text{per } \gamma \neq \beta \\ \dim(F_\beta^+(V)_\beta) &= \sum_{l \in \Gamma^\beta} \dim(V_{s(l)}) - \dim(V_\beta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

2. *Sia  $\alpha \in \Gamma_0$  un vertice -accessibile di  $Q$  rispetto all'orientazione  $\Lambda$  e sia  $V \in L(\Gamma, \Lambda)$  una rappresentazione indecomponibile di  $Q$ ; possono presentarsi due casi:*

(a)  $V \simeq L_\alpha$  e  $F_\alpha^-(V) = 0$

- (b)  $F_\alpha^-(V)$  è una rappresentazione indecomponibile,  $F_\alpha^+ F_\alpha^-(V) = V$  e le dimensioni degli spazi vettoriali  $F_\alpha^-(V)_\gamma$  sono:

$$\begin{aligned} \dim(F_\alpha^-(V)_\gamma) &= \dim(V_\gamma) \quad \text{per } \gamma \neq \alpha \\ \dim(F_\alpha^-(V)_\alpha) &= \sum_{l \in \Gamma^\alpha} \dim(V_{t(l)}) - \dim(V_\alpha) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Vediamo adesso in dettaglio come funzionano i funtori di riflessione. Partiamo da un oggetto  $(V, f) \in L(\Gamma, \Lambda)$ , e ammettiamo che  $\beta$  sia +accessibile; vogliamo costruire una rappresentazione  $(W, g) \in L(\Gamma, \sigma_\beta \Lambda)$ . Innanzitutto poniamo  $W_\gamma = V_\gamma$  per  $\gamma \neq \beta$ ; dopodiché, dette  $l_1, \dots, l_k$  le frecce in  $\Gamma^\beta$  (ovvero tutte quelle che terminano in  $\beta$ ), definiamo la funzione

$$h : \bigoplus_{i=1}^k V_{s(l_i)} \rightarrow V_\beta \mid h((v_1, \dots, v_k)) = f_{l_1}(v_1) + \dots + f_{l_k}(v_k) \quad (3.6)$$

e poniamo  $W_\beta = \text{Ker}(h)$ . Ora non ci resta che definire le nuove funzioni  $g_l$ .

*Osservazione 11.* E' immediato verificare che se le  $f_{l_i}$  sono rappresentate da matrici  $M_{l_i}$  allora la funzione  $h$  è rappresentata dalla matrice

$$N = [ M_{l_1} \mid \dots \mid M_{l_k} ]$$

Per  $l \notin \Gamma^\beta$  poniamo  $g_l = f_l$ , mentre per  $l = l_i \in \Gamma^\beta$  definiamo  $g_l$  come la composizione tra l'immersione naturale di  $W_\beta$  in  $\bigoplus_{i=1}^k V_{s(l_i)}$  e la proiezione su  $V_{s(l_i)}$ . Come anticipato, la direzione delle frecce in  $\Gamma^\beta$  è stata invertita e quindi la nuova rappresentazione  $(W, g)$  appartiene a  $L(\Gamma, \sigma_\beta \Lambda)$  ed il vertice  $\beta$  è adesso -accessibile rispetto all'orientazione  $\sigma_\beta \Lambda$ . Questo nuovo oggetto è  $F_\beta^+(V)$ .

Se invece partiamo da un vertice  $\alpha$ -accessibile rispetto a  $\Lambda$ , poniamo di nuovo  $W_\gamma = V_\gamma$  per  $\gamma \neq \alpha$  e  $g_l = f_l$  per  $l \notin \Gamma^\alpha$ . Poi, dette  $l_1, \dots, l_k$  le frecce in  $\Gamma^\alpha$  (cioè tutte quelle uscenti da  $\alpha$ , stavolta), definiamo la funzione

$$\tilde{h} : V_\alpha \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k V_{t(l_i)} \mid \tilde{h}(v) = (f_{l_1}(v), \dots, f_{l_k}(v)) \quad (3.7)$$

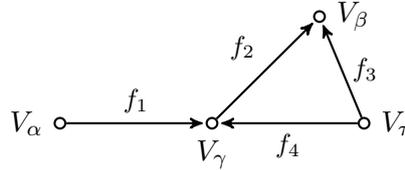
e poniamo  $W_\alpha = \bigoplus_{i=1}^k V_{t(l_i)} / \text{Im}(\tilde{h})$ .

*Osservazione 12.* Anche in questo caso, se le  $f_{l_i}$  sono rappresentate da matrici  $M_{l_i}$  allora la funzione  $\tilde{h}$  è rappresentata dalla matrice

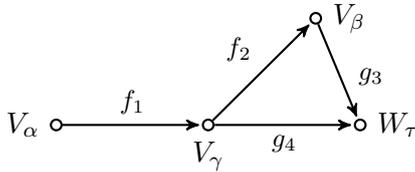
$$N = \begin{bmatrix} M_{l_1} \\ \vdots \\ M_{l_k} \end{bmatrix}$$

Le funzioni  $g_l$  per  $l = l_i \in \Gamma^\alpha$  saranno le composizioni dell'immersione naturale di  $W_{t(l)} = V_{t(l)}$  in  $\bigoplus_{i=1}^k V_{t(l_i)}$  e della proiezione di questa somma diretta su  $\text{Im}(\tilde{h})$ . Abbiamo quindi ottenuto una rappresentazione  $(W, g)$  appartenente a  $L(\Gamma, \sigma_\alpha \Lambda)$ , ed il vertice  $\alpha$  è adesso +accessibile rispetto all'orientazione  $\sigma_\alpha \Lambda$ . Questo nuovo oggetto è  $F_\alpha^-(V)$ .

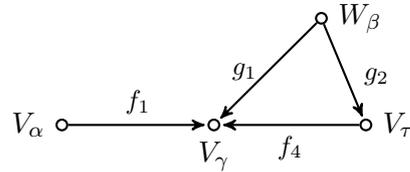
Consideriamo ad esempio la rappresentazione  $V \in (\Gamma, \Lambda)$  in figura:



Ad essa possiamo applicare sia  $F_\tau^-$  che  $F_\beta^+$ , ottenendo rispettivamente:



$$F_\tau^-(V) \in (\Gamma, \sigma_\tau \Lambda).$$



$$F_\beta^+(V) \in (\Gamma, \sigma_\beta \Lambda).$$

Il teorema precedente ci dice cosa succede quando applichiamo i funtori di riflessione ad una rappresentazione indecomponibile, ed il risultato più importante che ci fornisce è la dimensione del nuovo spazio vettoriale associato al vertice cui è stata applicata la riflessione. Per ottenere tale risultato, tuttavia, bastano ipotesi meno restrittive rispetto all'indecomponibilità della rappresentazione.

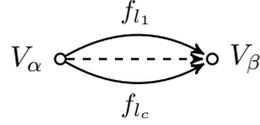
Ammettiamo infatti che  $\beta$  sia +accessibile rispetto all'orientazione  $\Lambda$ , e che la funzione  $h$  sia suriettiva; allora  $\dim(\text{Im}(h)) = \dim(V_\beta)$  e quindi, dal teorema della dimensione,

$\dim(W_\beta) = \dim(\text{Ker}(h)) = \sum_{i=1}^k \dim(V_{s(l_i)}) - \dim(V_\beta)$ , come avveniva nel teorema 3.8. Chiaramente affinché  $h$  possa essere suriettiva deve essere soddisfatta una condizione sulle dimensioni degli spazi vettoriali della rappresentazione  $V$  di partenza: detto  $d$  il vettore dimensione di  $V$ , dovrà valere  $\sum_{t(l)=\beta} d_{s(t)} \geq d_\beta$ .

Lo stesso accade se  $\alpha$  è -accessibile rispetto all'orientazione  $\Lambda$  e la funzione  $\tilde{h}$  è iniettiva; in tal caso il teorema della dimensione dà  $\dim(V_\alpha) = \dim(\text{Im}(\tilde{h}))$  e quindi  $\dim(W_\alpha) = \sum_{i=1}^k \dim(V_{s(l_i)}) - \dim(\text{Im}(\tilde{h})) = \sum_{i=1}^k \dim(V_{s(l_i)}) - \dim(V_\alpha)$ . Affinché  $\tilde{h}$  possa essere suriettiva la condizione che deve necessariamente essere soddisfatta è  $\sum_{s(l)=\alpha} d_{t(l)} \geq d_\alpha$ .

*Osservazione 13.* Le due osservazioni precedenti ci dicono che non appena una tra le  $f_{l_i}$  ha rango massimo hanno rango massimo pure  $h$  e  $\tilde{h}$ , e di conseguenza saranno rispettivamente suriettiva e iniettiva; potremo dunque utilizzare (3.4) e (3.5) per calcolare le dimensioni degli spazi vettoriali delle nuove rappresentazioni. Poiché le matrici di rango massimo costituiscono un aperto denso, in quanto segue potremo supporre  $h$  suriettiva e  $\tilde{h}$  iniettiva ogni volta che si verifica la condizione necessaria affinché questo accada, espressa dalle relazioni citate precedentemente.

Ricapitoliamo quanto visto finora sui funtori di riflessione con un esempio. Consideriamo il quiver  $\Theta_c = (\Gamma, \Lambda)$  ed una sua rappresentazione  $(V, f) = ((V_\alpha, V_\beta), (f_{l_1}, \dots, f_{l_c})) \in L(\Gamma, \Lambda)$  con vettore dimensione  $d = (a, b)$



Il vertice  $\alpha$  è -accessibile, quindi per riflettere le frecce in  $\Gamma^\alpha$  (in questo caso tutte) definiamo  $\tilde{h} : V_\alpha \rightarrow \bigoplus_{k=1}^c V_\beta$  con  $\tilde{h}(v) = (f_{l_1}(v), \dots, f_{l_c}(v))$  e poniamo  $W_\alpha = \bigoplus_{k=1}^c V_\beta / \text{Im}(\tilde{h})$  e  $W_\beta = V_\beta$ . Le nuove funzioni  $g_{l_i}$  saranno allora definite da

$$g_{l_i} : V_\beta \hookrightarrow \bigoplus_{k=1}^c V_\beta \rightarrow \bigoplus_{k=1}^c V_\beta / \text{Im}(\tilde{h}) \mid g_{l_1}(v) = (0, \dots, 0_{i-1}, v, 0_{i+1}, \dots, 0) + \text{Im}(\tilde{h}) \quad (3.8)$$

Supponiamo che  $\tilde{h}$  sia iniettiva; possiamo allora dire che applicando la trasformazione  $F_\alpha^-$  abbiamo ottenuto una rappresentazione  $(W, g) = ((W_\alpha, W_\beta), (g_{l_1}, \dots, g_{l_c}))$  del quiver  $\Theta_c = (\Gamma, \sigma_\alpha \Lambda)$  in cui il vertice  $\alpha$  è +accessibile; ricordando la (3.5) e le osservazioni precedenti, possiamo dire che il vettore dimensione di  $(W, g)$  è  $d_1 = (bc - a, b)$ .

*Osservazione 14.* Invece di riflettere secondo il vertice -accessibile  $\alpha$  avremmo potuto riflettere rispetto a quello +accessibile, cioè  $\beta$ , utilizzando  $F_\beta^+$ ; in tal caso, supponendo  $h$  suriettiva, avremmo ottenuto una rappresentazione  $(W', g')$  di  $\Theta_c = (\Gamma, \sigma_\beta \Lambda)$  con vettore dimensione  $d'_1 = (a, ac - b)$ .

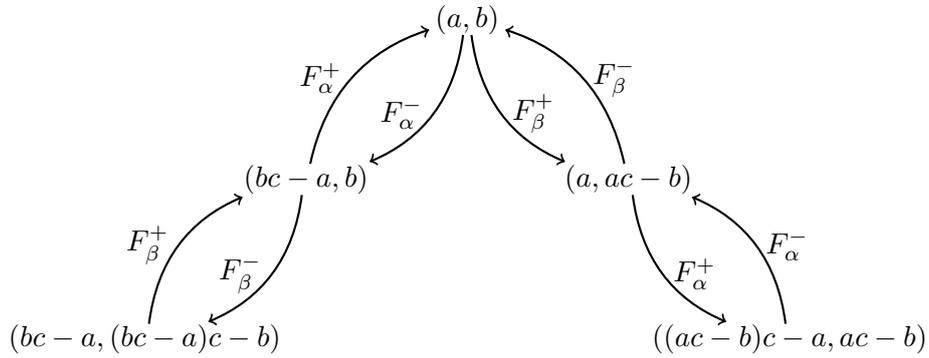
A questo punto abbiamo due possibili modi di riflettere:

1. Il vertice  $\alpha$  è adesso +accessibile, dunque potremmo applicare  $F_\alpha^+$ ; ma in questo caso il supporto  $h$  suriettiva ci riporterebbe ad una rappresentazione di  $\Theta_c = (\Gamma, \sigma_\alpha \sigma_\alpha \Lambda) = (\Gamma, \Lambda)$  di vettore dimensione  $(a, b)$  (la stessa  $(V, f)$  nel caso quest'ultima sia indecomponibile).
2. Il vertice  $\beta$  è ora -accessibile, dunque potremmo applicare  $F_\beta^-$ ; in questo caso (ripercorrendo quanto fatto in precedenza) il supporto  $\tilde{h}$  iniettiva ci darebbe una rappresentazione  $(Y, q)$  di  $\Theta_c = (\Gamma, \sigma_\alpha \sigma_\beta \Lambda) = (\Gamma, \Lambda)$  con vettore dimensione  $d_2 = (bc - a, (bc - a)c - b)$ .

*Mutatis mutandis* le due alternative appena presentate sarebbero applicabili anche nel caso in cui fossimo partiti con l'usare  $F_\beta^+$ .

*Osservazione 15.* Nel caso del quiver  $\Theta_c$ , una volta scelto il funtore da usare per primo (nell'esempio era  $F_\alpha^-$ ), possiamo continuare all'infinito ad applicare alternativamente lo stesso tipo di riflessione (dopo  $F_\alpha^-$  possiamo applicare  $F_\beta^-$ , dopodiché di nuovo  $F_\alpha^-$  e così via); per un quiver qualsiasi in generale questo non è vero. E' tuttavia possibile dimostrare che dato un quiver  $Q = (\Gamma, \Lambda)$  *senza cicli* esiste un modo di 'ordinare' i suoi vertici (cioè di numerarli come  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ) tale che il vertice  $\alpha_1$  risulti -accessibile rispetto a  $\Lambda$ , il vertice  $\alpha_2$  risulti -accessibile rispetto a  $\sigma_{\alpha_1}\Lambda$  e così via; questa numerazione è detta anch'essa -accessibile (e chiaramente in modo simile è definita una numerazione +accessibile).

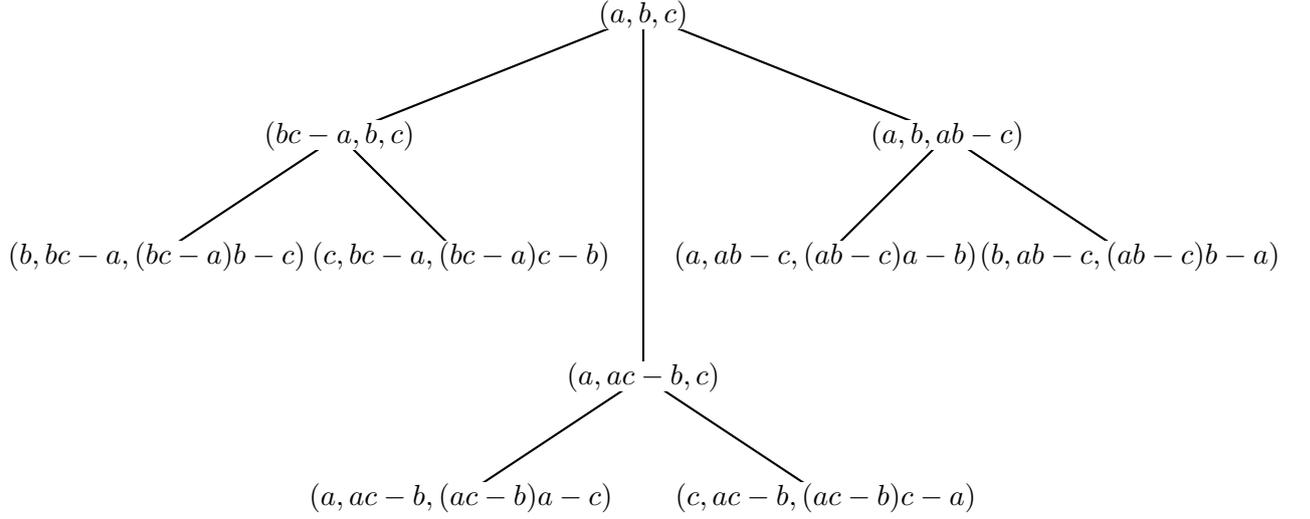
Il modo in cui il vettore dimensione della rappresentazione  $(V, f)$  cambia con l'applicazione di  $F_\beta^\pm$  e  $F_\alpha^\pm$  può essere schematizzato nel modo seguente:



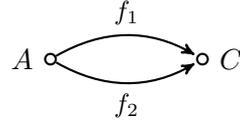
Quest'albero ricorda quello dei prodotti tensoriali  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$  tra loro castling-equivalenti che abbiamo visto nei capitoli precedenti; la differenza principale è che, visto che applicando  $F_\beta^\pm$  e  $F_\alpha^\pm$  il numero delle frecce  $c$  del quiver non cambia, in quest'ultimo albero ogni nodo ha (al più) due figli invece di tre. Tuttavia questa differenza tra i due alberi è solo apparente.

Nella sezione precedente abbiamo infatti visto che una qualsiasi rappresentazione  $(V, f)$  di  $\Theta_c$  con vettore dimensione  $d = (a, b)$  può essere vista come un elemento di  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b$ , e l'ordine in cui sono disposti  $a, b, c$  non ha nessuna importanza perché qualunque di essi dà spazi tra loro isomorfi (si veda la Proposizione 1.4); questo significa che una volta che abbiamo 'codificato' la rappresentazione  $(V, f)$  in un elemento di  $\mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b$ , *possiamo a nostra scelta trattare uno dei numeri come quello delle frecce e gli altri due come la dimensione degli spazi vettoriali della rappresentazione  $(V, f)$* ! Di conseguenza la nostra rappresentazione di partenza di  $\Theta_c$  con vettore dimensione  $(a, b)$  può essere pensata anche come una rappresentazione di  $\Theta_a$  con vettore dimensione  $(c, b)$  o come una rappresentazione di  $\Theta_b$  con vettore dimensione  $(a, c)$ .

Grazie a questa considerazione, possiamo arricchire l'albero precedente, che diventa



ovvero esattamente quello che abbiamo trovato studiando la trasformata di castling. Non dovrebbe a questo punto stupire il fatto che tra essa ed i funtori riflessione ci sia un profondo collegamento; addirittura esse sono di fatto *la stessa cosa!* Verifichiamolo prima con un esempio: consideriamo una rappresentazione  $((A, C), (f_1, f_2))$  del quiver  $\Theta_2$  con vettore dimensione  $(4, 3)$



ed  $f_1$  e  $f_2$  descritte rispettivamente dalle matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Valga  $A = \text{Span}\{u_1, \dots, u_4\}$  con base duale  $\{U_1, \dots, U_4\}$  e  $C = \text{Span}\{v_1, \dots, v_3\}$  con base duale  $\{V_1, \dots, V_3\}$ ; definiamo inoltre  $\mathbb{C}^2 = B = \text{Span}\{w_1, w_2\}$  con base duale  $\{W_1, W_2\}$ . Le funzioni  $f_i$  sono elementi di  $\text{Hom}(A, C) \simeq A^* \otimes C$  che possono essere scritti rispetto alla base standard di  $A^* \otimes C$  come

$$\begin{aligned}
f_1 &= U_1 \otimes v_1 + U_2 \otimes v_2 + U_3 \otimes v_3 \\
f_2 &= U_2 \otimes v_1 + U_3 \otimes v_2 + U_4 \otimes v_3
\end{aligned}$$

Di conseguenza la nostra rappresentazione potrà scriversi come un elemento di  $B \otimes A^* \otimes C \simeq C \otimes A^* \otimes B$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
& w_1 \otimes (U_1 \otimes v_1 + U_2 \otimes v_2 + U_3 \otimes v_3) + w_2 \otimes (U_2 \otimes v_1 + U_3 \otimes v_2 + U_4 \otimes v_3) \simeq \\
& \simeq v_1 \otimes (w_1 \otimes U_1 + w_2 \otimes U_2) + v_2 \otimes (w_1 \otimes U_2 + w_2 \otimes U_3) + v_3 \otimes (w_1 \otimes U_3 + w_2 \otimes U_4)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Riflettiamo rispetto al vertice +accessibile: dobbiamo trovare il nucleo della funzione  $h$  definita su  $B \otimes A \simeq A \oplus A$  da  $h(u, v) = f_1(u) + f_2(v)$ . La matrice che rappresenta  $f_1$  ha

rango massimo, dunque  $h$  è senz'altro suriettiva e quindi il suo nucleo  $K$  avrà dimensione 5; svolgendo i conti otteniamo

$$K = \text{Span}\{w_1 \otimes u_4, w_2 \otimes u_1, w_1 \otimes u_1 - w_2 \otimes u_2, w_1 \otimes u_2 - w_2 \otimes u_3, w_1 \otimes u_3 - w_2 \otimes u_4\} = \text{Span}\{k_1, \dots, k_5\}$$

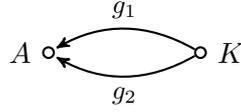
e sia  $\{K_1, \dots, K_5\}$  la corrispondente base duale.  $K$  sostituirà  $C$  nella nuova rappresentazione, mentre  $f_1$  ed  $f_2$  saranno sostituite da funzioni  $g_1, g_2 \in \text{Hom}(K, A)$  definite rispettivamente dalle matrici

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e che possono essere scritte come elementi di  $\text{Hom}(K, A) \simeq K^* \otimes A$  nel modo seguente

$$\begin{aligned} g_1 &= K_1 \otimes u_4 + K_3 \otimes u_1 + K_4 \otimes u_2 + K_5 \otimes u_3 \\ g_2 &= K_2 \otimes u_1 - K_3 \otimes u_2 - K_4 \otimes u_3 - K_5 \otimes u_4 \end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto una nuova rappresentazione  $((A, K), (g_1, g_2))$  di  $\Theta_2$  con vettore dimensione  $(4, 5)$ :



che può essere scritta come elemento di  $B \otimes \text{Hom}(K, A) \simeq B \otimes K^* \otimes A$  come

$$\begin{aligned} &w_1 \otimes (K_1 \otimes u_4 + K_3 \otimes u_1 + K_4 \otimes u_2 + K_5 \otimes u_3) + w_2 \otimes (K_2 \otimes u_1 - K_3 \otimes u_2 - K_4 \otimes u_3 - K_5 \otimes u_4) \simeq \\ &\simeq K_1 \otimes (w_1 \otimes u_4) + K_2 \otimes (w_2 \otimes u_1) + K_3 \otimes (w_1 \otimes u_1 - w_2 \otimes u_2) + K_4 \otimes (w_1 \otimes u_2 - w_2 \otimes u_3) + \\ &+ K_5 \otimes (w_1 \otimes u_3 - w_2 \otimes u_4) \end{aligned} \tag{3.10}$$

che è la matrice trasposta di quelle che rappresentava la funzione  $h$  in precedenza.

Usando il funtore di riflessione siamo dunque passati da un elemento di  $B \otimes A^* \otimes C$  ad un elemento di  $B \otimes K^* \otimes A$  con  $K \simeq \mathbb{C}^5$ ; vediamo cosa succede invece applicando alla rappresentazione iniziale (3.9) la trasformata di castling: poiché tale rappresentazione è un elemento di  $B \otimes A^* \otimes C \simeq B \otimes A^* \otimes \mathbb{C}^3$ , la trasformata dovrà restituirci un elemento di  $B^* \otimes A \otimes \mathbb{C}^5$ .

Sia  $Q$  il sottospazio vettoriale di  $B \otimes A^*$  generato da  $\{q_1, q_2, q_3\} = \{w_1 \otimes U_1 + w_2 \otimes U_2, w_1 \otimes U_2 + w_2 \otimes U_3, w_1 \otimes U_3 + w_2 \otimes U_4\}$ ; possiamo definire l'applicazione iniettiva  $C \rightarrow B \otimes A^*$  tale che  $v_i \mapsto q_i$ , che è rappresentata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sottospazio di  $B^* \otimes A$  di dimensione 5 che cerchiamo è l'annullatore di  $Q$ , chiamiamolo  $K$ , che risulta essere generato da  $\{k_1, \dots, k_5\} = \{W_1 \otimes u_4, W_2 \otimes u_1, W_1 \otimes u_1 - W_2 \otimes u_2, W_1 \otimes u_2 - W_2 \otimes u_3, W_1 \otimes u_3 - W_2 \otimes u_4\}$  (chiamiamo  $\{K_1, \dots, K_5\}$  la corrispondente base duale). L'inclusione  $K \rightarrow B^* \otimes A$  è rappresentata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che i due blocchi  $4 \times 5$  di questa matrice non sono altro che le matrici che rappresentano le funzioni  $g_1$  e  $g_2$ .

Come elemento di  $Hom(K, B^* \otimes A) \simeq B^* \otimes K^* \otimes A \simeq B^* \otimes A \otimes \mathbb{C}^5$ , questa matrice può essere scritta come

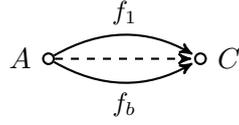
$$\begin{aligned} & K_1 \otimes (W_1 \otimes u_4) + K_2 \otimes (W_2 \otimes u_1) + K_3 \otimes (W_1 \otimes u_1 - W_2 \otimes u_2) + K_4 \otimes (W_1 \otimes u_2 - W_2 \otimes u_3) + \\ & + K_5 \otimes (W_1 \otimes u_3 - W_2 \otimes u_4) \simeq W_1 \otimes (K_1 \otimes u_4 + K_3 \otimes u_1 + K_4 \otimes u_2 + K_5 \otimes u_3) + \\ & + W_2 \otimes (K_2 \otimes u_1 - K_3 \otimes u_2 - K_4 \otimes u_3 - K_5 \otimes u_4) \end{aligned} \quad (3.11)$$

che è di fatto l'espressione (3.10); la presenza di elementi di due basi duali, invece che di una sola, è dovuta al fatto che usando la trasformata di castling passiamo dal duale dello spazio  $B \otimes A^*$ , mentre applicando il funtore di riflessione questo non accade.

Passiamo adesso a dimostrare che

**Teorema 3.9.** *I funtori di riflessione di  $\Theta_n$  e la trasformata di castling sono equivalenti.*

*Dimostrazione.* Siano  $A = Span\{u_1, \dots, u_a\}$  con base duale  $\{U_1, \dots, U_a\}$  e  $C = Span\{v_1, \dots, v_c\}$  con base duale  $\{V_1, \dots, V_c\}$ , e definiamo  $\mathbb{C}^b = B = Span\{w_1, \dots, w_b\}$  con base duale  $\{W_1, \dots, W_b\}$ ; cominciamo con l'applicare un funtore di riflessione ad una generica rappresentazione  $((A, C), (f_1, \dots, f_b))$  di  $\Theta_b$  con vettore dimensione  $d_1 = (a, c)$ .



Ogni  $f_i$  può essere espressa come un elemento di  $Hom(A, C) \simeq A^* \otimes C$  nel modo seguente

$$f_i = \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^c \lambda_{ijk} U_j \otimes v_k$$

dunque la rappresentazione, come elemento di  $B \otimes A^* \otimes C$ , è

$$\sum_{i=1}^b w_i \otimes \left( \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^c \lambda_{ijk} U_j \otimes v_k \right) \simeq \sum_{k=1}^c v_k \otimes \left( \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \lambda_{ijk} w_i \otimes U_j \right) \quad (3.12)$$

Supponiamo valga  $ba \geq c$ , in modo da poter riflettere rispetto al vertice +accessibile (quello a cui è associato  $C$ ): dobbiamo allora trovare il nucleo della funzione

$$h : B \otimes A \simeq \bigoplus_{i=1}^b A \rightarrow C \mid h(t_1, \dots, t_b) = \sum_{i=1}^b f_i(t_i)$$

che come elemento di  $Hom(B \otimes A, C) \simeq B^* \otimes A^* \otimes C$  risulta essere

$$\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \sum_{k=1}^c \lambda_{ijk} W_i \otimes U_j \otimes v_k \quad (3.13)$$

Quest'ultima espressione ci consente di caratterizzare il nucleo di  $h$  (chiamiamolo  $K$ ): un elemento  $t = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \gamma_{ij} w_i \otimes u_j$  di  $B \otimes A$  infatti appartiene a  $K$  se e solo se  $h(t) = \underline{0}$ , ovvero, sfruttando la (3.13), se e solo se

$$\sum_{k=1}^c \left( \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \lambda_{ijk} \gamma_{ij} \right) v_k = \underline{0}$$

Il sistema lineare che identifica  $K$  è dunque

$$\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \lambda_{ijk} x_{ij} = 0 \text{ per } k = 1, \dots, c \quad (3.14)$$

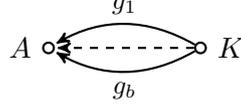
Supponendo che  $h$  sia suriettiva (cosa che possiamo fare, come illustrato dall'osservazione 13), otteniamo che  $\dim(K) = ab - c := d$ ; varrà allora  $K = Span\{k_1, \dots, k_d\}$  con base duale  $\{K_1, \dots, K_d\}$ , ed ogni  $k_t$  per  $t = 1, \dots, d$  sarà esprimibile come  $\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \mu_{tij} w_i \otimes u_j$  per opportuni  $\mu_{ijk}$ .  $K$  sostituirà  $C$  nella nuova rappresentazione, mentre le funzioni  $f_i$  saranno sostituite dalle  $g_i$ , ciascuna delle quali è definita da

$$g_i : K \hookrightarrow B \otimes A \simeq \bigoplus_{i=1}^b A \rightarrow A_i$$

dove  $A_i$  indica l' $i$ -esimo termine di  $\bigoplus_{i=1}^b A$ . E' immediato verificare che per ogni  $i = 1, \dots, b$  vale  $g_i(k_t) = \sum_{j=1}^a \mu_{tij} u_j$ , e che quindi ogni  $g_i$  si scrive come elemento di  $Hom(K, A) \simeq K^* \otimes A$  nel modo seguente

$$g_i = \sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^a \mu_{tij} K_t \otimes u_j$$

La nostra nuova rappresentazione è dunque  $((A, K), (g_1, \dots, g_b))$



avente vettore dimensione  $d_2 = (a, d)$  ed espressa come elemento di  $B \otimes K^* \otimes A$  da

$$\sum_{i=1}^b w_i \otimes \left( \sum_{t=1}^d \sum_{j=1}^a \mu_{tij} K_t \otimes u_j \right) \simeq \sum_{t=1}^d K_t \otimes \left( \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \mu_{tij} w_i \otimes u_j \right) \quad (3.15)$$

Applichiamo adesso alla nostra rappresentazione iniziale, espressa come elemento di  $B \otimes A^* \otimes C$  dalla (3.12), la trasformata di castling: ricordando la proposizione 2.6, avremo  $V = B \otimes A^*$ ,  $n = ab$ ,  $p = c$  e  $q = ab - c$ , e dunque dovremmo ottenere un elemento di  $B^* \otimes A \otimes \mathbb{C}^{ab-c}$ .

Definiamo  $B \otimes A^* \supset Q = \text{Span}\{q_1, \dots, q_c\}$ , con ogni  $q_k$  dato da

$$q_k = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \lambda_{ijk} w_i \otimes U_j$$

ove i  $\lambda_{ijk}$  sono *gli stessi* usati in precedenza; ciò che vogliamo determinare è  $K' = \text{Ann}(Q) \subset B^* \otimes A$ , che avendo  $Q$  dimensione  $c$  avrà dimensione  $d = ab - c$ . Un elemento  $t = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \tau_{ij} W_i \otimes u_j$  di  $B^* \otimes A$  appartiene a  $K'$  se e solo se  $t(q_k) = 0$  per ogni  $k = 1, \dots, c$ , ovvero se e solo se  $\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \lambda_{ijk} \tau_{ij} = 0$  per ogni  $k = 1, \dots, c$ ; di conseguenza il sistema lineare che identifica  $K'$  è

$$\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \lambda_{ijk} x_{ij} = 0 \text{ per } k = 1, \dots, c \quad (3.16)$$

Poiché il sistema (3.16) coincide con il (3.14),  $K'$  si esprimerà rispetto alla base di  $B^* \otimes A$  nello stesso modo in cui  $K$  si esprime rispetto alla base di  $B \otimes A$ ; potremo allora scrivere  $K' = \text{Span}\{k'_1, \dots, k'_d\}$  con base duale  $\{K'_1, \dots, K'_d\}$ , dove ogni  $k'_t$  per  $t = 1, \dots, d$  è definito da  $\sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \mu_{tij} W_i \otimes u_j$  e i  $\mu_{tij}$  sono gli stessi comparsi in precedenza.

Dall'inclusione di  $Q$  in  $B \otimes A^*$ , esprimibile come la funzione  $C \hookrightarrow A^* \otimes B | v_k \mapsto q_k$ , siamo passati all'inclusione di  $K'$  in  $B^* \otimes A$ ; quest'ultima può essere espressa come elemento di  $\text{Hom}(K', B^* \otimes A) \simeq K'^* \otimes B^* \otimes A$  nel modo seguente

$$\sum_{t=1}^d \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a (\mu_{tij} K'_t \otimes W_i \otimes u_j) \simeq \sum_{t=1}^d K'_t \otimes \left( \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^a \mu_{tij} W_i \otimes u_j \right) \quad (3.17)$$

Dato che  $K' \simeq \mathbb{C}^{ab-c}$  l'elemento ottenuto sta nello spazio che ci aspettavamo; la (3.15) e la (3.17) di fatto coincidono, se si esclude la presenza dei  $w_i$  nella prima e dei  $W_i$  nella seconda (dovuta al fatto che riflettendo non abbiamo avuto bisogno di passare ad uno spazio duale).

Visto che quanto fatto può essere ripetuto, con gli opportuni cambiamenti, nel caso della riflessione rispetto al vertice -accessibile, la tesi è dimostrata.  $\square$

## Capitolo 4

# Ricerca delle terne preomogenee

Per alleggerire le notazioni, in questo capitolo definiamo  $\mathbb{C}^{abc} = \mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$  e  $G_{abc} = GL_a(\mathbb{C}) \times GL_b(\mathbb{C}) \times GL_c(\mathbb{C})$ ; diremo che una terna  $(a, b, c)$  con  $a, b, c \in \mathbb{N}$  è preomogenea se  $\mathbb{C}^{abc}$  è preomogeneo per l'usuale azione di  $G_{abc}$ , definita sui tensori decomponibili da

$$G_{abc} \times \mathbb{C}^{abc} \longrightarrow \mathbb{C}^{abc} \quad | \quad ((A, B, C), (v_1 \otimes v_2 \otimes v_3)) \rightarrow (A, B, C) \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = Av_1 \otimes Bv_2 \otimes Cv_3$$

Il nostro obiettivo è di determinare quando una terna  $(a, b, c)$  è preomogenea.

*Osservazione 16.* Notiamo subito che qualora nella terna compaia un 1, essa è sicuramente preomogenea. Consideriamo infatti una terna  $(1, b, c)$  e supponiamo (senza perdere di generalità) che valga  $c \geq b$ : abbiamo  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c \simeq \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$  e gli elementi di quest'ultimo spazio possono essere visti come matrici  $M \in M_{b \times c}(\mathbb{C})$ ; l'azione da noi considerata può essere riscritta, in questo caso, come  $((G, H), M) \rightarrow GMH^t$  ove  $G \in GL_b(\mathbb{C})$  e  $H \in GL_c(\mathbb{C})$  (il contributo del fattore  $\mathbb{C}$  può essere trascurato perché consiste di una semplice moltiplicazione per uno scalare). Sappiamo, dall'algebra lineare, che moltiplicando per opportune matrici invertibili, una qualunque matrice  $b \times c$  può essere ricondotta alla forma

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ove  $r$  indica il rango della matrice; poiché noi agiamo proprio con matrici invertibili, tutti gli elementi di  $\mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$  rappresentabili come matrici di rango massimo (cioè  $b$ ) appartengono alla stessa orbita della nostra azione. Quest'orbita è dunque aperta, non essendo altro che il complementare del chiuso di Zariski individuato da tutti i minori di ordine  $b-1$  di una matrice  $b \times c$ . Nel prosieguo della nostra analisi, supporremo dunque che il minimo di ogni terna considerata sia almeno 2.

Sato e Kimura nel loro lavoro hanno fornito un metodo che consente di rispondere alla nostra domanda. Dato uno spazio  $\mathbb{C}^{abc}$  che soddisfa la (2.1), si deve risalire all'elemento minimale del suo albero di castling (chiamiamolo  $\mathbb{C}^{a'b'c'}$ , e supponiamo  $1 < a' \leq b' \leq c'$ ):  $\mathbb{C}^{a'b'c'}$  risulta essere preomogeneo se e solo se  $a'b' \leq c'$  oppure se  $(a', b', c') = (2, 2, 2), (2, 3, 3)$ ; in quest'ultimo caso il numero di orbite dell'azione è finito.

Parfenov, approfondendo la classificazione già fornita da Sato e Kimura (si vedano [Par1] e [Par2]), ha dimostrato che

**Teorema 4.1.** *Le uniche terne  $(a, b, c)$  per cui  $\mathbb{C}^{abc}$  ha un numero finito di orbite sono quelle del tipo  $(2, 2, n)$  con  $n \geq 2$  e  $(2, 3, n)$  con  $n \geq 3$ ; in particolare il numero di orbite si stabilizza all'aumentare di  $n$ , come illustrato dalle tabelle.*

$(2, 2, n)$	$n^\circ$ orbite
$(2, 2, 2)$	7
$(2, 2, 3)$	9
$(2, 2, n \geq 4)$	10

$(2, 3, n)$	$n^\circ$ orbite
$(2, 3, 3)$	18
$(2, 3, 4)$	24
$(2, 3, 5)$	26
$(2, 3, n \geq 6)$	27

Come del resto potevamo verificare direttamente, questo teorema ci dice che la trasformata di castling *non* preserva il numero di orbite dell'azione: infatti  $(2, 3, 3)$  è castling-equivalente a  $(3, 3, 7)$ , ma il primo ha un numero finito di orbite mentre il secondo no. Osserviamo inoltre che se è vero che tutte le terne  $(a, b, c)$  aventi un numero finito di orbite corrispondono a spazi  $\mathbb{C}^{abc}$  minimali, la maggior parte degli spazi  $\mathbb{C}^{abc}$  minimali e preomogenei ha un numero infinito di orbite: ad esempio le terne  $(2, 4, n)$  con  $n > 5$  corrispondono tutte a spazi minimali e (vedremo in seguito) preomogenei, ma chiaramente per il teorema precedente non possono che avere un numero infinito di orbite.

Il fatto che le terne  $(2, 2, n)$  con  $n \geq 2$  e  $(2, 3, n)$  con  $n \geq 3$  hanno un numero finito di orbite ci garantisce che sono preomogenee, visto che

**Proposizione 4.2.** *Se  $V$  è un  $G$ -modulo irriducibile con un numero finito di orbite, allora  $V$  è preomogeneo.*

*Dimostrazione.* Le orbite relative all'azione di  $G$ , chiamiamole  $V_i$ , formano una partizione di  $V$ , dunque se sono in numero finito possiamo scrivere  $V = \sqcup_{i=1}^n V_i$ ; poiché  $\dim(V) = \max\{\dim(V_i)\}$ , deve esistere un  $i_0$  tale che  $\dim(V_{i_0}) = \dim(V)$ . Come vedremo nella prossima sezione, più precisamente nella proposizione 4.3, questo significa che l'orbita  $V_{i_0}$  è aperta e quindi  $V$  è preomogeneo per l'azione di  $G$ .  $\square$

Usando il risultato di Parfenov, la trasformata di castling e la disuguaglianza di Kac, riusciremo ad ottenere una caratterizzazione delle terne preomogenee basata su una semplice condizione aritmetica. Il vantaggio di questa classificazione su quella già fornita da Sato e Kimura consiste nel non dover usare, se non in un solo caso, la trasformata di castling per ricondursi ad uno spazio  $\mathbb{C}^{abc}$  minimale.

## 4.1 Un metodo infinitesimale per calcolare $\dim(O_x)$

Consideriamo una terna  $(a, b, c)$  qualsiasi e supponiamo (senza perdere di generalità)  $a \leq b \leq c$ . Preso un elemento  $x \in \mathbb{C}^{abc}$ , il suo gruppo d'isotropia  $G_x$  rispetto all'azione da noi considerata conterrà di sicuro tutti gli elementi di del tipo  $(\alpha I_a, \alpha^{-1} \beta I_b, \beta^{-1} I_c)$  ove  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ; di conseguenza  $\dim(G_x) \geq 2$  e quindi la condizione necessaria affinché  $\mathbb{C}^{abc}$  possa essere preomogeneo, espressa nel caso generale dalla (2.1), diventa

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc \geq 2 \tag{4.1}$$

La disuguaglianza di Kac, che ci dà una condizione sufficiente, nelle nostre ipotesi è

$$b^2 + c^2 - abc \geq 1 \tag{4.2}$$

Ciò che dobbiamo fare è studiare le terne che soddisfano la condizione necessaria ma non quella sufficiente. La trasformata di castling ci facilita ulteriormente il lavoro: presa una terna  $(a, b, c)$  che soddisfa la (4.1) ma non la (4.2), una volta che abbiamo determinato se essa è o no preomogenea tutte le terne a lei castling-equivalenti si comporteranno allo stesso modo. A questo punto per poter affrontare pienamente il problema ci manca un

qualche procedimento che, data una terna qualsiasi, ci dica se essa è preomogenea o no, o almeno ci fornisca delle indicazioni in tal senso.

Al fine di ricavare un tale procedimento, cominciamo fissando un elemento  $x$  di  $\mathbb{C}^{abc}$ . La funzione  $f_x : G_{abc} \rightarrow \mathbb{C}^{abc}$  tale che  $f_x(g) = g \cdot x$  ha per immagine l'orbita di  $x$  sotto l'azione di  $G_{abc}$  (cioè  $O_x$ ), ed è differenziabile; di conseguenza la dimensione dell'orbita può essere calcolata esplicitamente. Infatti, restringendo il codominio all'immagine di  $f_x$  e passando al differenziale di  $f_x$  nell'identità di  $G_{abc}$ , si ottiene  $(Df_x)_I : T_I(G_{abc}) \rightarrow T_x(O_x)$ , ovvero  $(Df_x)_I : M_a(\mathbb{C}) \times M_b(\mathbb{C}) \times M_c(\mathbb{C}) \rightarrow T_x(O_x)$ , e di conseguenza

$$\dim(O_x) = \dim(T_x(O_x)) = \dim(\text{Im}(Df_x)) = \text{rank}(Df_x)_I$$

L'importanza di poter calcolare facilmente la dimensione di  $O_x$  è illustrata dalla seguente

**Proposizione 4.3.** *Sia  $O_x \subseteq \mathbb{C}^{abc}$  un'orbita relativa all'azione di  $G_{abc}$ ;  $O_x$  è aperta  $\iff \text{rank}(Df_x)_I$  è massimo (ovvero pari a  $\dim(\mathbb{C}^{abc}) = abc$ ).*

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$   $\mathbb{C}^{abc}$  è una varietà algebrica irriducibile, dunque i suoi aperti sono densi; di conseguenza varrà  $\text{rank}(Df_x)_I = \dim(O_x) = \dim(\overline{O_x}) = \dim(\mathbb{C}^{abc}) = abc$ .

$\Leftarrow$  Siamo in condizione di poter applicare il teorema di sommersione locale: esistono dunque un intorno  $U$  di  $G_{abc}$  contenente l'identità  $I$  ed un intorno  $V$  di  $O_x$  contenente  $x$  mappati l'uno nell'altro da un'applicazione aperta; di conseguenza, restringendoci ad un aperto  $U' \subseteq U$  contenente  $I$ , possiamo dire che  $f_x(U') \subseteq O_x$  è aperto. Ma l'applicazione  $f_x$  non fa che descrivere l'azione di  $G_{abc}$  su  $\mathbb{C}^{abc}$  una volta fissato il punto su cui agire, e quindi è  $G_{abc}$ -invariante:  $g_2 \cdot f_x(g_1) = f_x(g_2 g_1)$ ; questo significa che, per quanto riguarda il comportamento di  $f_x$ , ciò che vale per un singolo punto di  $G_{abc}$  vale in realtà per *tutti* i punti di  $G_{abc}$ . Possiamo dunque pensare di spostare l'aperto  $U'$  ovunque vogliamo in  $G_{abc}$ , ottenendo sempre che la sua immagine tramite  $f_x$  è aperta; ma allora  $O_x$  è completamente ricoperta da aperti, e quindi è essa stessa aperta.  $\square$

La proposizione precedente è chiaramente valida per ogni  $G$ -varietà irriducibile  $V$  che soddisfi la (2.1); come suo corollario otteniamo che

**Corollario 4.4.** *Sia  $V$  una  $G$ -varietà irriducibile che soddisfi la condizione (2.1); una sua orbita  $O_x$  è aperta  $\iff$  è densa.*

*Dimostrazione.* L'implicazione  $\Rightarrow$  è banale. Se invece  $O_x$  è densa otteniamo  $\dim(O_x) = \dim(\overline{O_x}) = \dim(V)$ , dunque il rango della corrispondente funzione  $f_x$  nell'identità di  $G$  è massimo, perché dalla (2.1) segue  $\dim(V) \leq \dim(G)$ ; possiamo dunque concludere sfruttando la proposizione precedente.  $\square$

*Osservazione 17.* Visto che ogni spazio vettoriale è irriducibile come varietà algebrica (come dimostrato alla fine del primo capitolo), immediata conseguenza del corollario è che nella definizione di spazio preomogeneo possiamo richiedere indifferentemente la presenza di un'orbita aperta o densa.

Abbiamo ottenuto un metodo per dire se una terna che soddisfa solo la (4.1) è preomogenea o meno: scelgo un elemento  $x$  qualsiasi di  $\mathbb{C}^{abc}$  e calcolo il differenziale nell'identità  $I$  di  $G_{abc}$  della funzione  $f_x$ ; se il rango del differenziale è massimo la terna è preomogenea, mentre se non lo è non possiamo concludere niente (possiamo però ripetere più volte l'algoritmo: se continuiamo a non trovare orbite di dimensione massima, è *probabile* che lo spazio non sia preomogeneo). Per nostra fortuna tutti i calcoli necessari possono essere tradotti in un algoritmo relativamente semplice scritto con Macaulay2, riportato nell'Appendice A.

Con l'aiuto di questo algoritmo, abbiamo esaminato le terne  $(a, b, c)$  tali che  $2 \leq a \leq b \leq c \leq 100$  soddisfacenti solo la (4.1), scoprendo che esse risultano quasi tutte preomogenee; le uniche eccezioni sono costituite dalle terne  $(2, n, n)$  con  $n \geq 4$  (e ovviamente dalle terne ad esse castling-equivalenti). Nella prossima sezione esamineremo tali terne più in dettaglio.

## 4.2 Le terne $(2, n, n)$

Siano  $\{e_1, e_2\}$  una base di  $\mathbb{C}^2$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}, \{g_1, \dots, g_n\}$  basi di  $\mathbb{C}^n$ , allora un elemento  $x \in \mathbb{C}^{2nn}$  potrà scriversi, per opportuni  $\lambda_{ijk} \in \mathbb{C}$ , come

$$x = \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk} e_i \otimes f_j \otimes g_k = \sum_{i=1}^2 e_i \otimes \left( \sum_{j,k=1}^n \lambda_{ijk} f_j \otimes g_k \right)$$

Questo significa che  $x$  può essere rappresentato come una pencil di matrici  $n \times n$ , ovvero

$$x = e_1 \begin{bmatrix} \lambda_{111} & \cdots & \lambda_{11n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_{1n1} & \cdots & \lambda_{1nn} \end{bmatrix} + e_2 \begin{bmatrix} \lambda_{211} & \cdots & \lambda_{21n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_{2n1} & \cdots & \lambda_{2nn} \end{bmatrix} = e_1 A + e_2 B$$

Utilizzando questa rappresentazione, è possibile verificare che l'usuale azione di  $G_{2nn}$  su  $\mathbb{C}^{2nn}$  può essere riscritta come

$$(L, M, N) \cdot (e_1 A + e_2 B) = M(e_1 \bar{A} + e_2 \bar{B}) N^t$$

dove  $\bar{A} = m_{11}A + m_{12}B$  e  $\bar{B} = m_{21}A + m_{22}B$ .

Supponiamo ora che  $A$  sia invertibile e che  $A^{-1}B$  sia diagonalizzabile, ovvero che

$$A \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ e } A^{-1}B = G^{-1}DG \quad \exists G \in GL_n(\mathbb{C}), \exists D \in M_n(\mathbb{C}) \text{ diagonale} \quad (4.3)$$

Allora potremo scrivere, indicato con  $y$  il tensore rappresentabile come  $e_1 I_n + e_2 D$ :

$$\begin{aligned} x = e_1 A + e_2 B &= A(e_1 I_n + e_2 A^{-1}B) = A(e_1 I_n + e_2 G^{-1}DG) = \\ &= A(e_1 G^{-1}G + e_2 G^{-1}DG) = AG^{-1}(e_1 I_n + e_2 D)G = (I_2, AG^{-1}, G^t) \cdot y \end{aligned}$$

Questo significa che l'elemento  $x$  sta nella stessa orbita di un tensore  $y \in \mathbb{C}^{2nn}$  le cui slices consistono di una matrice identità e di una diagonale; possiamo allora dimostrare che

**Teorema 4.5.**  $\mathbb{C}^{2nn}$  è preomogeneo per l'azione di  $G_{2nn} \iff n \leq 3$ .

*Dimostrazione.*  $\Leftarrow$  Segue direttamente dal teorema 4.1, ma visto che le dimensioni in gioco sono piccole possiamo sfruttare questo caso per illustrare il metodo infinitesimale contenuto nell'algoritmo dell'Appendice A.

Partiamo dal caso  $n = 2$ , e prendiamo basi di  $\mathbb{C}^2$   $\{a_0, a_1\}, \{b_0, b_1\}$  e  $\{c_0, c_1\}$ ; scegliendo come elemento  $x \in \mathbb{C}^{222}$  il tensore

$$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_1$$

la matrice  $8 \times 12$  che rappresenta  $(Df_x)_I$  è (trasposta)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed ha rango massimo; di conseguenza  $(2, 2, 2)$  è preomogenea.

```
i16 : time rank TG
      -- used 0.000222521 seconds
```

```
o16 = 8
```

```
i17 : if rank TG==aa*bb*cc then print("quasi omogeneo") else print ("probabilmen
te non quasi omogeneo")
quasi omogeneo
```

Allo stesso modo, per  $n = 3$  prendiamo basi  $\{a_0, a_1\}$  di  $\mathbb{C}^2$  e  $\{b_0, b_1, b_2\}, \{c_0, c_1, c_2\}$  di  $\mathbb{C}^3$ ; se si sceglie come elemento  $x \in \mathbb{C}^{233}$  il tensore

$$a_0 \otimes b_0 \otimes c_0 + a_0 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_1 \otimes c_1 + a_1 \otimes b_2 \otimes c_2$$

la matrice  $18 \times 22$  che rappresenta  $(Df_x)_I$  è (trasposta)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango massimo; dunque  $(2, 3, 3)$  è preomogenea.

```
i18 : time rank TG
      -- used 0.000287019 seconds

o18 = 18

i19 : if rank TG==aa*bb*cc then print("quasi omogeneo") else print ("probabilmen
te non quasi omogeneo")
quasi omogeneo
```

$\Rightarrow$  Abbiamo visto che un qualsiasi  $x \in \mathbb{C}^{2nn}$  le cui slices soddisfino la (4.3) appartiene alla stessa orbita di un tensore  $y \in \mathbb{C}^{2nn}$  le cui slices consistono di una matrice identità e di una diagonale; il gruppo d'isotropia di  $y$ , cioè  $G_y$ , contiene allora tutti gli elementi di  $G_{2nn}$  del tipo  $(\alpha I_2, \alpha^{-1}\beta D, \beta^{-1}D^{-1})$  con  $D$  diagonale, ovvero gli elementi  $(\alpha I_2, C, C^{-1})$  con  $C$  diagonale. Di conseguenza  $\dim(G_y) \geq n + 1$ , e poiché due elementi nella stessa orbita hanno gruppi d'isotropia tra loro coniugati varrà pure  $\dim(G_x) \geq n + 1$ .

Le matrici invertibili, così come quelle diagonalizzabili, costituiscono un aperto denso di  $M_n(\mathbb{C})$ ; questo implica che i tensori di tipo  $(2, n, n)$  che *non* soddisfano l'ipotesi (4.3) hanno un gruppo d'isotropia di dimensione almeno pari a quella del gruppo d'isotropia dei tensori  $(2, n, n)$  che invece la soddisfano. Per vedere che in effetti è così basta tornare di nuovo al metodo infinitesimale: per gli  $x$  contenuti in un aperto denso, ricordando quanto visto nel capitolo 2 per le dimensioni dell'orbita  $O_x$ , abbiamo  $\dim(O_x) = \text{rank}(Df_x)_I \leq \dim(G_{2nn}) - \dim(G_x) = 4 + 2n^2 - (n + 1)$ ; se  $x$  non è contenuto in quest'aperto significa che è contenuto in un chiuso, e questo implica che la dimensione del suo gruppo d'isotropia può solo essere maggiore o uguale a quella usuale. Di conseguenza nel caso  $(2, n, n)$  la condizione necessaria affinché possa esserci un'orbita aperta diventa

$$4 + 2n^2 - (n + 1) \geq 2n^2 \Rightarrow n \leq 3$$

e quindi la tesi è dimostrata. □

Il motivo per cui le terne  $(2, n, n)$  con  $n > 3$  non sono preomogenee è quindi che il gruppo d'isotropia degli elementi di  $\mathbb{C}^{2nn}$  è più grande che nel caso generale, e per  $n \geq 4$  questa nuova condizione necessaria non è soddisfatta.

### 4.3 L'approccio aritmetico e la classificazione delle terne preomogenee

Quanto più la differenza  $d$  tra la dimensione di  $G_{abc}$  e quella di  $\mathbb{C}^{abc}$  è maggiore, tanto più ci aspettiamo di trovare un'orbita aperta. Un'ulteriore indicazione in tal senso ci viene da quanto evidenziato nella sezione precedente, ovvero dal fatto che quasi tutte le terne  $(2, n, n)$  non sono preomogenee: infatti per queste terne (e per le loro trasformate di castling) vale  $d = 4 + 2n^2 - 2n^2 = 4$ , che è il valore minimo tra tutte le differenze che si ottengono dalle varie terne  $(a, b, c)$  con  $2 \leq a \leq b \leq c \leq 100$  che soddisfano la (4.1). Alla luce di questo, conviene studiare per  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  la funzione  $N(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - abc$  e le soluzioni dell'equazione

$$N(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - abc = n \quad n \in \mathbb{Z} \tag{4.4}$$

Non è difficile, come si vedrà nella prossima sezione, verificare che se  $N(a, b, c)$  assume un valore  $n$  per una terna  $(a, b, c)$  allora assume valore  $n$  anche per le trasformate di castling

di  $(a, b, c)$ , ovvero  $(a, b, ab - c)$ ,  $(a, c, ac - b)$  e  $(b, c, bc - a)$  (questo spiega perché anche per le terne castling-equivalenti a quelle  $(2, n, n)$  valga  $d = 4$ ); pertanto più che sulle singole soluzioni della (4.4) ci concentreremo sulle *classi* di soluzioni, e sui loro *generatori*. Per definire con precisione cos'è un generatore di una classe di soluzioni della (4.4), definiamo l'usuale ordinamento lessicografico su  $\mathbb{N}^3$ : prese  $(a, b, c)$  con  $a \leq b \leq c$  e  $(a', b', c')$  con  $a' \leq b' \leq c'$  diremo che  $(a, b, c) < (a', b', c')$  se

$$\begin{aligned} & a < a' \text{ oppure} \\ & a = a' \text{ e } b < b' \text{ oppure} \\ & a = a', b = b' \text{ e } c < c' \end{aligned}$$

A questo punto è naturale dare la seguente

**Definizione 4.1.** Sia  $(a, b, c)$  una soluzione dell'equazione (4.4) per un qualche  $n$ ;  $(a, b, c)$  è il generatore della sua classe di soluzioni se presa una qualsiasi terna  $(a', b', c')$  castling-equivalente ad  $(a, b, c)$  vale  $(a, b, c) \leq (a', b', c')$ . In questo caso  $(a, b, c)$  verrà anche detta terna minimale.

Il caso in cui nella (4.4) valga  $n \leq 0$  è già stato studiato da A. Hurwitz (si veda [Hur]) come caso particolare dell'equazione

$$x_1^2 + \dots + x_t^2 - x_1 \cdot \dots \cdot x_t = 0 \quad (4.5)$$

che diventa la (4.4) ponendo  $x_t = \dots = x_4 = 1$ ; in particolare Hurwitz dimostra che per ogni  $n \leq 0$  il numero di classi di soluzioni è finito.

Nella definizione precedente è lecito parlare de *il* generatore di una classe di soluzioni, visto che esso è effettivamente unico; per dimostrarlo ricorreremo ai seguenti lemmi:

**Lemma 4.6.** *Siano  $\mathbb{C}^{abc}$  e  $\mathbb{C}^{a'b'c'}$  due elementi adiacenti di uno stesso albero di castling, con  $a \leq b \leq c$ ; allora  $(a, b, c) < (a', b', c') \iff \dim(\mathbb{C}^{abc}) < \dim(\mathbb{C}^{a'b'c'})$ , cioè se e solo se  $abc < a'b'c'$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo valga  $(a', b', c') = (a, b, ab - c)$ , con gli elementi di quest'ultima terna non necessariamente ordinati in modo crescente:

$\Rightarrow$  Se valesse  $ab - c \leq c$  otterremmo  $(a, b, c) \geq (a, b, ab - c)$ , il che è assurdo; di conseguenza deve valere  $ab - c > c$  che, moltiplicando per  $ab$ , diventa  $ab(ab - c) > abc$ .

$\Leftarrow$  Per ipotesi vale  $abc < ab(ab - c)$  ovvero  $c < ab - c$  e di conseguenza vale  $(a, b, c) < (a, b, ab - c)$ .

Quanto appena fatto può ovviamente essere ripetuto per le altre due possibili trasformate di castling di  $(a, b, c)$ . □

**Lemma 4.7.** *Una terna del tipo  $(1, b, c)$  con  $1 \leq b \leq c$  ha al più una trasformata di castling minore di se stessa in  $\mathbb{N}^3$ .*

*Dimostrazione.* Visto che l'unica trasformata di  $(1, 1, 1)$  è  $(0, 1, 1) \notin \mathbb{N}^3$ , possiamo supporre che  $b$  e  $c$  non siano entrambi 1. Le trasformate di  $(1, b, c)$  sono  $(1, b, b - c)$ ,  $(1, c, c - b)$  e  $(b, c, bc - 1)$ , e sfruttando il lemma precedente potremo scrivere:

1.  $(1, b, b - c) < (1, b, c) \iff b - c < c \iff c > \frac{b}{2}$
2.  $(1, c, c - b) < (1, b, c) \iff c - b < b \iff b > \frac{c}{2}$
3.  $(b, c, bc - 1) < (1, b, c) \iff bc - 1 < 1 \iff bc < 2$

La situazione (3) si verifica solo per  $b = c = 1$ , caso che abbiamo escluso; la (1) e la (2) possono verificarsi contemporaneamente, ma l'ipotesi  $c \geq b$  implica che  $(1, b, b - c) \notin \mathbb{N}^3$  e dunque l'unica trasformata di  $(1, b, c)$  che può essere minore di  $(1, b, c)$  ed appartenere a  $\mathbb{N}^3$  è  $(1, c, c - b)$ .  $\square$

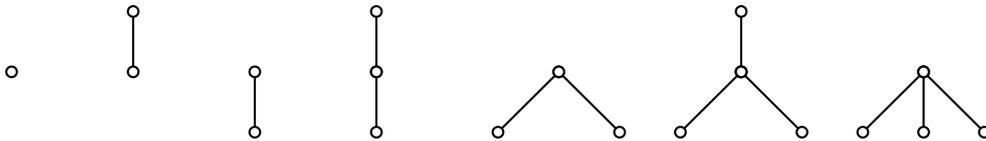
**Proposizione 4.8.** *Ogni terna  $(a, b, c)$  con  $1 \leq a \leq b \leq c$  genera per trasformata di castling non più di una terna minore di essa; in particolare ogni classe di soluzioni della (4.4) ha un unico generatore.*

*Dimostrazione.* La prima parte dell'enunciato vale senz'altro per le terne contenenti un 1, come illustrato dal lemma 4.7; dimostriamola per le terne in cui  $a \geq 2$ .

Se lo spazio  $\mathbb{C}^{abc}$  avesse due trasformate di castling di dimensione minore della sua, per esempio  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^{ab-c}$  e  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^{ac-b}$ , otterremmo che  $ab < 2c$  e  $ac < 2b$ , che insieme implicano  $a^2 < 4$  ovvero  $a = 1$  (assurdo). Di conseguenza  $\mathbb{C}^{abc}$  genera per trasformata di castling al più *uno* spazio vettoriale di dimensione minore della sua, e per il lemma 4.6 questo significa che la terna  $(a, b, c)$  ha al più una trasformata di castling minore di essa.

La seconda parte della proposizione segue direttamente dalla prima: visto che terne  $(a, b, c)$  castling-equivalenti risolvono la (4.4) per uno stesso  $n$ , mi basta dimostrare che l'albero di castling di una qualsiasi terna  $(a, b, c)$  ha un solo elemento minimale, cosa che deriva da quanto appena dimostrato.  $\square$

Le soluzioni della (4.4) possono dunque essere ordinate in alberi ove ogni vertice ha da zero a tre figli, che possono essere disposti nei modi seguenti



In quanto segue studieremo l'equazione (4.4) per particolari valori di  $n$ , per poi passare ad una trattazione più generale; il procedimento per ottenerne le soluzioni ricalca quello utilizzato in [Cas] per ricavare le soluzioni della cosiddetta equazione di Markov:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3abc = 0 \tag{4.6}$$

### 4.3.1 $n=2$

Cominciamo con lo studiare il caso in cui la differenza tra la dimensione di  $G_{abc}$  e quella di  $\mathbb{C}^{abc}$  è la più piccola possibile (tra quelle che consentono a  $\mathbb{C}^{abc}$  di poter essere preomogeneo), ovvero 2. Dimostreremo che

**Teorema 4.9.**  $N(a, b, c) = 2$  se e solo se  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ .

La dimostrazione del teorema si basa sui seguenti lemmi:

**Lemma 4.10.** *Sia  $(a, b, c)$  con almeno due elementi uguali tale che  $N(a, b, c) = 2$ ; allora  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ .*

*Dimostrazione.* Ammettiamo valga  $a = b$ ; sotto quest'ipotesi varrà  $2b^2 + c^2 - b^2c = 2$  cioè  $(2 - c)b^2 + c^2 - 2 = 0$  e quindi varrà  $b = \sqrt{2 + c - \frac{2}{(2-c)}}$ . L'unico  $c$  a dare un  $b$  naturale come risultato è  $c = 1$ , che dà  $b = 1$ ; otteniamo allora la soluzione  $(1, 1, 1)$ .  $\square$

A questo punto restano da esaminare le terne  $(a, b, c)$  tali che  $N(a, b, c) = 2$  con  $a \neq b \neq c \neq a$ ; per esse vale

**Lemma 4.11.** *Sia  $(a, b, c)$  con  $a \neq b \neq c \neq a$  tale che  $N(a, b, c) = 2$ ; applicando ad  $(a, b, c)$  la trasformata di castling si ottiene un'altra terna  $\underline{0} < (a', b', c') < (a, b, c)$  tale che  $N(a', b', c') = 2$ .*

*Dimostrazione.* Visto che la funzione  $N(a, b, c)$  è simmetrica nelle sue variabili possiamo supporre, senza perdita di generalità,  $a < b < c$ . Se definiamo la quadrica  $\phi(x) = x^2 - abx + a^2 + b^2 - 2$  otteniamo che  $c$  è una radice di  $\phi(x)$ , la cui altra radice è un qualche  $c'$  che soddisfa  $cc' = a^2 + b^2 - 2$  e  $c + c' = ab$ ; la prima uguaglianza ci dice che  $c'$  è positivo, mentre la seconda ci garantisce che  $c' = ab - c$  è un intero: di conseguenza otteniamo  $c' \in \mathbb{N}$ .

*Osservazione 18.* Più in generale, la seconda uguaglianza trovata ci dice che se  $(a, b, c)$  è una soluzione della (4.4) per un qualche  $n$  fissato anche le sue trasformate di castling lo sono, come avevamo anticipato.

Se scomponiamo  $\phi(x)$  usando le radici  $c$  e  $c'$  e poi la valutiamo in  $b$  otteniamo

$$\phi(b) = (b - c)(b - c') = b^2(2 - a) + a^2 - 2$$

Nelle nostre ipotesi vale sicuramente  $\phi(b) < 0$ , a meno che  $a = 1, 2$ ; analizziamo allora cosa succede in questi due casi. Se  $a = 1$  allora  $b$  e  $c$  soddisfano  $b^2 + c^2 - bc - 1 = 0$  ovvero  $(b - c)^2 + bc = 1$ , e quest'equazione è risolta solo se  $b = c = 1$  che è escluso dall'ipotesi. Se invece  $a = 2$  allora  $b$  e  $c$  soddisfano  $b^2 + c^2 - 2bc + 2 = 0$  ovvero  $(b - c)^2 = -2$ , il che è chiaramente assurdo.

Di conseguenza possiamo dire che  $\phi(b) = (b - c)(b - c') < 0$ , e poiché  $c > b$  otteniamo che  $b > c' > 0$ ; questo implica  $\underline{0} < (a, b, c') < (a, b, c)$ , quindi la tesi segue ponendo  $a' = a$  e  $b' = b$ .  $\square$

Abbiamo adesso tutto il necessario per dimostrare il teorema 4.9.

*Dimostrazione.* Sia  $(a, b, c)$  una qualsiasi terna tale che  $N(a, b, c) = 2$ ; a partire da essa, possiamo eseguire questa procedura:

1. Controllare se  $a \neq b \neq c \neq a$ .
2. Se la risposta ad 1) è 'no', allora almeno due elementi di  $(a, b, c)$  coincidono e quindi per il lemma 4.10 vale  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ ; in questo caso ci fermiamo
3. Se la risposta ad 1) è 'sì', il lemma 4.11 ci garantisce che possiamo trovare, tramite trasformata di castling, una nuova terna  $\underline{0} < (a', b', c') < (a, b, c)$  tale che  $N(a', b', c') = 2$ ; in tal caso ripartiamo dal punto 1) con  $(a', b', c')$ .

Poiché la condizione  $\underline{0} < (a', b', c') < (a, b, c)$  garantisce che la procedura prima o poi si interrompe, restituendoci come ultima terna  $(1, 1, 1)$ , abbiamo appena dimostrato che tutte le terne che danno  $N(a, b, c) = 2$  derivano da  $(1, 1, 1)$  tramite trasformata di castling; ma è immediato osservare che eseguendo il castling su  $(1, 1, 1)$  si ottiene  $(0, 1, 1)$ , che chiaramente non appartiene a  $\mathbb{N}^3$ . La tesi è dunque dimostrata.  $\square$

Come immediata conseguenza, otteniamo che

**Corollario 4.12.** *Se la terna  $(a, b, c)$  dà  $N(a, b, c) = 2$  allora è preomogenea.*

Il metodo qui esposto per la ricerca delle soluzioni di  $N(a, b, c) = n$  sarà utilizzato anche nelle prossime sezioni, dunque è opportuno evidenziarne i vari passaggi:

1. Si cercano le soluzioni  $(a, b, c)$  con almeno due numeri coincidenti (indichiamo quest'insieme con  $S_1$ ).
2. Si cercano le soluzioni  $(a, b, c)$  con  $a < b < c$  che danno per trasformata di castling  $c' \leq 0$ , cioè quelle tali che  $a^2 + b^2 - n \leq 0$ , che saranno minimali (con l'unica eccezione, come vedremo, del caso  $n = 8$ ). Quest'insieme sia  $S_2$ .
3. Si cercano le soluzioni con  $a = 1, 2$  (sia  $S_3$  quest'insieme) per dire che per tutte le altre vale  $\phi(b) < 0$ .
4. A questo punto possiamo dire che una soluzione  $\notin S_1 \cup S_2 \cup S_3$  può essere ricondotta tramite trasformata di castling ad una soluzione  $\in S_1 \cup S_2 \cup S_3$ .

### 4.3.2 $n=3,6$

Studiando l'equazione (4.4) modulo 3 si ottiene che

**Teorema 4.13.** *Non esistono terne  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  tali che  $N(a, b, c) = 3$  o  $N(a, b, c) = 6$ .*

*Dimostrazione.* Sia nel caso  $n = 3$  che in quello  $n = 6$  l'equazione che dovremo studiare è

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc \equiv 0 \pmod{3}$$

Una semplice analisi caso per caso dimostra che l'unica possibilità di avere una soluzione è data da  $(a, b, c) \equiv (0, 0, 0) \pmod{3}$ , come si deduce dalla seguente tabella:

$(a, b, c) \equiv$	$N(a, b, c) \equiv$
(0, 0, 0)	0
(0, 0, 1)	1
(0, 0, 2)	1
(0, 1, 1)	2
(0, 1, 2)	2
(0, 2, 2)	2
(1, 1, 1)	2
(1, 1, 2)	1
(1, 2, 2)	2
(2, 2, 2)	2

Dobbiamo dunque cercare soluzioni della (4.4) con  $n = 3$  o  $n = 6$  della forma  $(a, b, c) = (3\alpha, 3\beta, 3\gamma)$ ; distinguiamo i due casi partendo con  $n = 3$ .

Per  $n = 3$  l'equazione da risolvere diventa  $9(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 27\alpha\beta\gamma = 3$  ovvero  $3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 9\alpha\beta\gamma = 1$ ; il termine a sinistra dell'uguale è un multiplo di 3, mentre 1 non lo è, e quindi non troviamo soluzioni.

Il caso  $n = 6$  è praticamente identico, visto che l'equazione da risolvere diventa  $3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 9\alpha\beta\gamma = 2$ ; il termine a sinistra dell'uguale è un multiplo di 3, mentre 2 non lo è, e quindi non troviamo soluzioni.  $\square$

I ragionamenti esposti nel teorema possono essere ripetuti per ogni  $n$  del tipo  $3 + 9k$  o  $6 + 9k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ : infatti anche in questi casi una soluzione  $(a, b, c)$  deve avere la forma  $(3\alpha, 3\beta, 3\gamma)$ , e le equazioni da soddisfare diventano rispettivamente:

$$3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 9\alpha\beta\gamma - 3k = 1 \text{ per } n = 3 + 9k$$

e

$$3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 9\alpha\beta\gamma - 3k = 2 \text{ per } n = 6 + 9k$$

che chiaramente non hanno soluzioni perché il termine a sinistra dell'uguale è divisibile per 3 mentre quello a destra no; vale di conseguenza il

**Corollario 4.14.** *Per  $n = 3 + 9k, 6 + 9k$  con  $k \in \mathbb{Z}$  non esistono terne  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  tali che  $N(a, b, c) = n$ .*

### 4.3.3 n=4

Cerchiamo adesso le soluzioni di  $N(a, b, c) = 4$ ; sappiamo già che le terne di tipo  $(2, m, m)$  sono soluzioni, ma resta da capire se ve ne siano altre non castling-equivalenti a queste. La risposta è no.

**Teorema 4.15.** *Tutte le terne  $(a, b, c)$  tali che  $N(a, b, c) = 4$  derivano, tramite trasformata di castling, da terne di tipo  $(2, m, m)$  con  $m \in \mathbb{N}$ .*

*Osservazione 19.* Questo teorema evidenzia che quanto trovato da Hurwitz nel caso  $n \leq 0$  non vale quando  $n > 0$ ; otteniamo infatti che per  $n = 4$  la (4.4) ha infinite classi di soluzioni.

Anche stavolta faremo ricorso a due lemmi:

**Lemma 4.16.** *Sia  $(a, b, c)$  con almeno due elementi uguali tale che  $N(a, b, c) = 4$ ; allora  $(a, b, c) \in \{(2, m, m), (m, m, m^2 - 2) | m \in \mathbb{N}\}$ .*

*Dimostrazione.* Ammettiamo valga  $a = b$ ; sotto quest'ipotesi  $b$  e  $c$  soddisferanno  $2b^2 + c^2 - b^2c - 4 = 0$ , cioè  $c = \frac{1}{2}(b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4(2b^2 - 4)})$ ; visto che il discriminante è esattamente  $(b^2 - 4)^2$ , i valori che troviamo per  $c$  sono  $c = 2$  e  $c = b^2 - 2$ , che danno terne della forma  $(2, b, b)$  e  $(b, b, b^2 - 2)$  rispettivamente. Osserviamo che, per uno stesso  $b$ , le terne di questo tipo sono castling-equivalenti.  $\square$

**Lemma 4.17.** *Sia  $(a, b, c)$  con  $a \neq b \neq c \neq a$  tale che  $N(a, b, c) = 4$ ; applicando ad  $(a, b, c)$  la trasformata di castling si ottiene un'altra terna  $\underline{0} < (a', b', c') < (a, b, c)$  tale che  $N(a', b', c') = 4$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo una terna  $(a, b, c)$  con  $a < b < c$ . Definita la quadrica  $\phi(x) = x^2 - abx + a^2 + b^2 - 4$ ,  $c$  risulta essere una sua radice; l'altra, che indicheremo con  $c'$ , soddisferà  $cc' = a^2 + b^2 - 4$  e  $c + c' = ab$ . Poiché  $c > b > a > 0$ , la prima uguaglianza ci dice che  $c'$  è anch'essa positiva; la seconda uguaglianza invece mostra che  $c' = ab - c$  è un intero e che quindi  $(a, b, c')$  è un'altra soluzione della (4.4) con  $n = 4$ , che deriva da  $(a, b, c)$  tramite trasformata di castling. Se fattorizziamo  $\phi(x)$  usando le radici  $c$  e  $c'$  e la valutiamo in  $b$ , otteniamo

$$(b - a)(b - a') = \phi(b) = 2b^2 + a^2 - b^2a - 4$$

L'espressione a destra dell'uguale risulta essere  $< 0$  sotto le nostre ipotesi. In effetti  $\phi(b) < 0$  purché  $2 < a < b^2 - 2$  (visto che  $\phi(b)$  è semplicemente una parabola), ma questo è sempre vero per quanto abbiamo assunto: infatti  $b > a$  implica automaticamente  $b^2 - 2 > a$  a meno che  $b > b^2 - 2$ , cosa che accade solo per  $b = 0$  (assurdo, poiché  $b \in \mathbb{N}$ ) o  $b = 1$  (assurdo perché  $b > a$ ). D'altra parte, se valesse  $a = 2$  avremmo  $b, c$

che soddisfano  $b^2 + c^2 - 2bc = 0$  cioè  $(b - c)^2 = 0$ , e quindi otterremmo  $b = c$  (di nuovo contraddizione, avendo noi assunto  $c > b$ ). Se invece valesse  $a = 1$  avremmo  $b, c$  che soddisfano  $b^2 + c^2 - bc - 3 = 0$ , cioè  $(b - c)^2 + bc = 3$ ; ma per ipotesi vale  $b, c \geq 2$  e quindi quell'equazione non sarà mai soddisfatta. Questo prova che se  $(a, b, c)$  con  $a < b < c$  dà  $N(a, b, c) = 4$  allora  $\phi(b) < 0$ .

Poiché  $\phi(b) = (b - c)(b - c')$  e  $c > b$ , otteniamo che  $b > c' > 0$ ; questo implica  $\underline{0} < (a, b, c) < (a, b, c')$ , quindi la tesi segue ponendo  $a' = a$  e  $b' = b$ .  $\square$

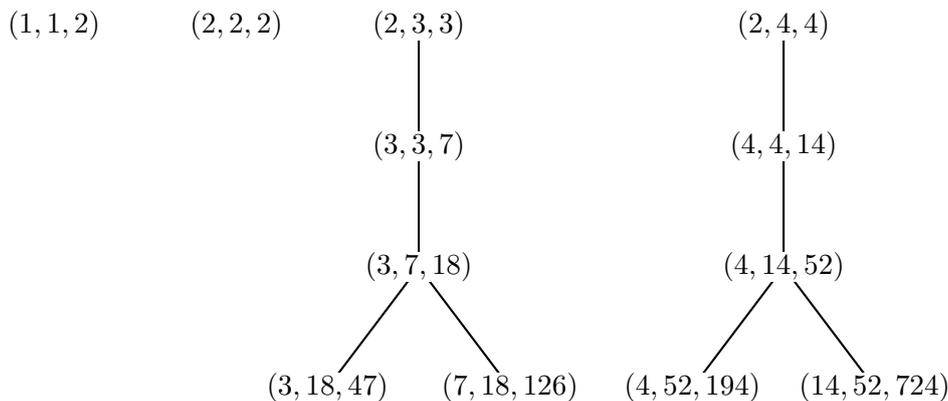
Possiamo ora dimostrare il teorema 4.15.

*Dimostrazione.* Data una qualsiasi terna  $(a, b, c)$  tale che  $N(a, b, c) = 4$  possiamo eseguire la seguente procedura

1. Controllare se  $a \neq b \neq c \neq a$ .
2. Se la risposta ad 1) è 'no', allora almeno due elementi di  $(a, b, c)$  coincidono; ma questo significa, per il lemma 4.16, che  $(a, b, c)$  è del tipo  $(2, m, m)$  oppure  $(m, m, m^2 - 2)$ , e in tal caso ci fermiamo.
3. Se la risposta ad 1) è 'sì', possiamo trovare tramite trasformata di castling, come garantito dal lemma 4.17, una nuova terna  $(a', b', c')$  tale che  $N(a', b', c') = 4$  e  $\underline{0} < (a', b', c') < (a, b, c)$ ; in tal caso, ripartiamo dal punto 1) con  $(a', b', c')$ .

Poiché la condizione  $\underline{0} < (a', b', c') < (a, b, c)$  garantisce che la procedura prima o poi si interrompe, e poiché questo accade solo quando ricadiamo in una soluzione del tipo  $(2, m, m)$  o  $(m, m, m^2 - 2)$ , con le seconde castling-equivalenti alle prime una volta fissato  $m$ , la tesi è dimostrata.  $\square$

Le terne  $(a, b, c)$  tali che  $N(a, b, c) = 4$  possono dunque essere ordinate in infiniti alberi, ciascuno dei quali avente come vertice di base una terna  $(2, m, m)$  come mostrato in figura



Come immediata conseguenza del teorema 4.15 otteniamo un modo molto rapido per verificare se  $\mathbb{C}^{abc}$  è preomogeneo per l'azione di  $G_{abc}$  quando  $N(a, b, c) = 4$ :

**Corollario 4.18.** *Sia  $(a, b, c)$  una terna per cui  $N(a, b, c) = 4$ ; tale terna è preomogenea se e solo se deriva tramite trasformata di castling da  $(2, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$  o  $(2, 3, 3)$ .*

#### 4.3.4 n=5

In questa sezione dimostreremo che

**Teorema 4.19.** *Tutte le terne  $(a, b, c)$  tali che  $N(a, b, c) = 5$  derivano, tramite trasformata di castling, da  $(1, 2, 2)$ .*

**Lemma 4.20.** *Sia  $(a, b, c)$  con almeno due elementi uguali tale che  $N(a, b, c) = 5$ ; allora  $(a, b, c) \in \{(1, 2, 2), (2, 2, 3)\}$ .*

*Dimostrazione.* Ammettiamo valga  $a = b$ ; in tal caso  $b$  e  $c$  dovranno soddisfare  $2b^2 + c^2 - b^2c - 5 = 0$ . Risolvendo rispetto a  $b$  otteniamo  $b = \sqrt{(5 - c^2)/(2 - c)} = \sqrt{2 + c + \frac{1}{(2-c)}}$ , ma l'espressione sotto radice è intera se e solo se  $c = 1, 3$ , ed entrambi questi casi ci forniscono una soluzione: troviamo  $(1, 2, 2)$  e  $(2, 2, 3)$  (e queste terne sono castling-equivalenti).  $\square$

**Lemma 4.21.** *Sia  $(a, b, c)$  con  $a \neq b \neq c \neq a$  tale che  $N(a, b, c) = 5$ ; applicando ad  $(a, b, c)$  la trasformata di castling si ottiene un'altra terna  $\underline{0} < (a', b', c') \leq (a, b, c)$  tale che  $N(a', b', c') = 5$ .*

*Dimostrazione.* Prendiamo una soluzione  $(a, b, c)$  con  $a < b < c$ .  $c$  è radice della quadrica  $\phi(x) = x^2 - abx + a^2 + b^2 - 5$ , il cui altro zero è un  $c'$  tale che  $c' + c = ab$  e  $cc' = a^2 + b^2 - 5$ ; queste uguaglianze ci dicono che  $c' = ab - c$  è un intero ed è non-negativo (visto che  $c > b > a > 0$ ).

*Osservazione 20.* Come in precedenza, la terna  $(a, b, c)$  ci fornisce altre tre soluzioni (non necessariamente distinte) della (4.4) per  $n = 5$ :  $(a', b, c)$ ,  $(a, b', c)$  e  $(a, b, c')$ . Ammettiamo valga  $c' = 0$ , allora  $a$  e  $b$  soddisfano  $a^2 + b^2 = 5$  e quindi otteniamo  $b = 2$  e  $a = 1$ . Ciò significa che la terna da cui  $(a, b, c')$  deriva, che è  $(a, b, c = ab - c')$ , non è altri che  $(1, 2, 2)$ , e poiché per ipotesi  $b \neq c$  questo non può accadere; di conseguenza  $c' \in \mathbb{N}$ .

Scomponendo  $\phi(x)$  e valutandola in  $b$  otteniamo  $(b - c)(b - c') = \phi(b) = 2b^2 + a^2 - b^2a - 5$  e come prima vorremmo mostrare che l'espressione a destra dell'uguale è 'quasi sempre' strettamente negativa. Visto che  $b > a$  possiamo effettuare la maggiorazione  $\phi(b) < 3b^2 - b^2a - 5 = b^2(3 - a) - 5$ , che implica  $\phi(b) < 0$  a meno che  $a = 1, 2$ .

Se  $a = 1$  allora  $b$  e  $c$  soddisfano  $b^2 + c^2 - bc - 4 = 0$ , ovvero  $(b - c)^2 + bc = 4$ ; nelle nostre ipotesi vale  $b, c \geq 2$  e quindi l'unica soluzione è  $(b, c) = (2, 2)$  che però dà  $b$  e  $c$  uguali (assurdo).

Se  $a = 2$  allora  $b$  e  $c$  soddisfano  $b^2 + c^2 - 2bc - 1 = 0$  cioè  $(b - c)^2 = 1$ , che significa  $c = b \pm 1$ ; abbiamo dunque terne  $(a, b, c)$  tali che  $N(a, b, c) = 5$  delle forme  $(2, b - 1, b)$  e  $(2, b, b + 1)$  (visto che la seconda terna è di fatto uguale alla prima, a meno di sostituire  $b + 1$  a  $b$ , possiamo in realtà parlare della forma  $(2, b, b + 1)$ ). Osserviamo che tutte le terne di questa forma sono castling-equivalenti ( $(2, b, b + 1)$  genera  $(2, b + 1, 2(b + 1) - b) = (2, b + 1, b + 2)$  e così via), e questo significa, in particolare, che ogni terna della forma  $(2, b, b + 1)$  può essere ricondotta a  $(1, 2, 2)$  applicandovi la trasformata di castling un opportuno numero di volte.

Ciò che abbiamo scoperto è allora che, data una terna  $(a, b, c) \neq (2, m, m + 1)$  con  $a < b < c$  tale che  $N(a, b, c) = 5$ , otteniamo  $(b - c)(b - c') = \phi(b) < 0$ ; questo implica  $\underline{0} < (a, b, c) < (a, b, c')$ , quindi la tesi segue ponendo  $a' = a$  e  $b' = b$ .  $\square$

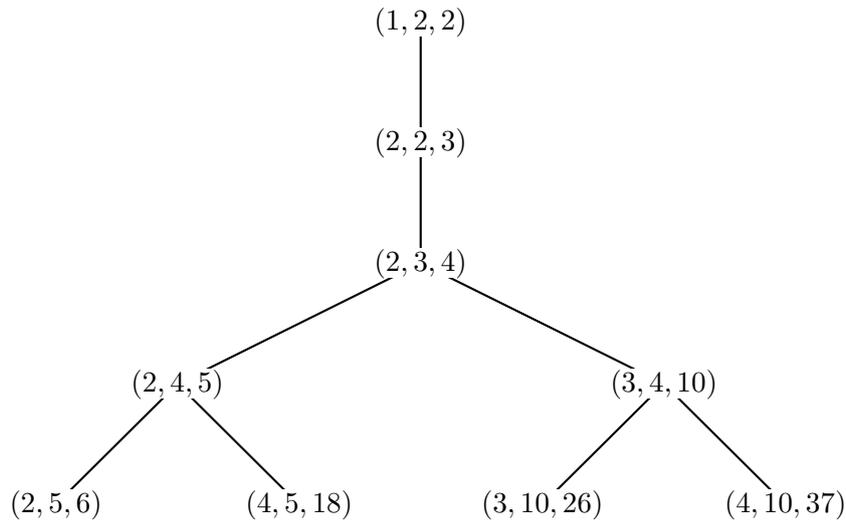
Dimostriamo adesso il teorema 4.19

*Dimostrazione.* Partendo da una qualsiasi terna  $(a, b, c)$  tale che  $N(a, b, c) = 5$  possiamo effettuare la seguente procedura:

1. Controllare se  $a \neq b \neq c \neq a$ .
2. Se la risposta ad 1) è 'no', allora per il lemma 4.20  $(a, b, c)$  è una tra  $(1, 2, 2)$  e  $(2, 2, 3)$ ; in questo caso ci fermiamo.
3. Se la risposta ad 1) è 'sì', controllare se  $(a, b, c) = (2, m, m + 1)$  per qualche  $m \in \mathbb{N}$ .
4. Se la risposta a 3) è 'sì', allora  $(a, b, c)$  deriva da  $(1, 2, 2)$  per trasformata di castling, e ci fermiamo.
5. Se la risposta a 3) è 'no', per il lemma 4.21 possiamo trovare tramite trasformata di castling una terna  $(a', b', c')$  tale che  $\underline{0} < (a', b', c') < (a, b, c)$ ; in tal caso ripartiamo dal punto 1) con  $(a', b', c')$ .

Poiché la condizione  $\underline{0} < (a', b', c') < (a, b, c)$  garantisce che la procedura precedente prima o poi termina, e poiché questo accade solo quando arriviamo alle terne  $(1, 2, 2)$  o  $(2, 2, 3)$  (con la seconda castling-equivalente alla prima), la tesi è dimostrata.  $\square$

Le terne tali che  $N(a, b, c) = 5$  possono dunque essere disposte in un unico albero, riportato in figura



Poiché come abbiamo visto lo spazio  $\mathbb{C}^{122} \simeq \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  è preomogeneo per l'azione di  $G_{122} \simeq GL_2(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C})$ , otteniamo immediatamente che

**Corollario 4.22.** *Lo spazio  $\mathbb{C}^{abc}$  è preomogeneo per l'azione di  $G_{abc}$  per ogni  $(a, b, c)$  tale che  $N(a, b, c) = 5$ .*

### 4.3.5 $n=8$

In questa sezione dimostreremo che

**Teorema 4.23.**  *$N(a, b, c) = 8$  solo per terne castling-equivalenti a  $(1, 1, 3)$  o a  $(2, 2, 4)$ .*

Poiché la terna  $(2, 2, 4)$  soddisfa la disuguaglianza di Kac, e poiché lo spazio  $\mathbb{C}^{113}$  è preomogeneo per l'azione di  $G_{113}$ , come immediata conseguenza del teorema otteniamo che

**Corollario 4.24.** *Lo spazio  $\mathbb{C}^{abc}$  è preomogeneo per l'azione di  $G_{abc}$  per ogni  $(a, b, c)$  tale che  $N(a, b, c) = 8$ .*

Faremo di nuovo ricorso a due lemmi:

**Lemma 4.25.** *Sia  $(a, b, c)$  con almeno due elementi uguali tale che  $N(a, b, c) = 8$ ; allora  $(a, b, c) \in \{(1, 1, 3), (2, 2, 4)\}$ .*

*Dimostrazione.* Ammettiamo valga  $a = b$ ; allora  $b$  e  $c$  soddisfano  $2b^2 + c^2 - b^2c - 8 = 0$ , e risolvendo in  $b$  otteniamo  $b = \sqrt{(8 - c^2)/(2 - c)} = \sqrt{2 + c + \frac{4}{(2-c)}}$ . L'espressione sotto radice è un intero se e solo se  $c \in \{1, 3, 4, 6\}$ , e tra queste possibilità gli unici valori di  $c$  a dare un  $b$  intero sono  $c = 3, 4$ : scegliendo  $c = 3$  troviamo la soluzione  $(1, 1, 3)$  mentre  $c = 4$  dà  $(2, 2, 4)$ .  $\square$

Osserviamo che stavolta il lemma ci fornisce due terne *non* castling-equivalenti fra loro.

**Lemma 4.26.** *Sia  $(a, b, c)$  con  $a \neq b \neq c \neq a$  tale che  $N(a, b, c) = 8$ ; applicando ad  $(a, b, c)$  la trasformata di castling si ottiene un'altra terna  $\underline{0} < (a', b', c') < (a, b, c)$  tale che  $N(a', b', c') = 8$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo una terna  $(a, b, c)$  tale che  $N(a, b, c) = 8$  con  $a < b < c$ ;  $c$  è una radice di  $\phi(x) = x^2 - abx + a^2 + b^2 - 8$ , la cui altra radice è un qualche  $c'$  tale che  $c' + c = ab$  e  $c'c = a^2 + b^2 - 8$ . Dalle uguaglianze precedenti ricaviamo  $c' = ab - c$  (e quindi  $c'$  è un intero) e  $c' > 0$ , a meno che  $a = 1, b = 2$ ; in tal caso infatti otteniamo  $c'c = -3$  con  $c > 0$  e quindi  $c' < 0$ . Ma se  $(1, 2, c)$  è una soluzione allora  $c$  soddisferà  $c^2 - 2c - 3 = 0$  cioè  $(c + 1)(c - 3) = 0$  e quindi (dovendo valere  $c > 0$ ) varrà  $c = 3$ . Di conseguenza se  $c' < 0$  significa che la soluzione  $(a, b, c')$  è castling-equivalente a  $(1, 2, 3)$ ; quest'ultima soluzione, inoltre, è anche castling-equivalente a  $(1, 1, 3)$ .

Scomponendo  $\phi(x)$  e valutandola in  $b$  otteniamo  $(b - c)(b - c') = \phi(b) = 2b^2 + a^2 - b^2a - 8$ , e vorremmo nuovamente provare che l'espressione a destra dell'uguale è 'quasi sempre' strettamente negativa. Poiché  $b > a$  possiamo effettuare la maggiorazione  $\phi(b) < 3b^2 - b^2a - 8 = b^2(3 - a) - 8$ , che implica  $\phi(b) < 0$  a meno che  $a = 1, 2$ .

Se  $a = 1$  allora  $b$  e  $c$  soddisfano  $b^2 + c^2 - bc - 7 = 0$ , e quindi  $c = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{28 - 3b^2})$ ; il discriminante è non-negativo solo per  $b = 2, 3$  (il caso  $b = 1$  è escluso dall'ipotesi  $a \neq b$ ) dunque dobbiamo esaminare due casi.  $(a, b) = (1, 2)$  significa, come osservato in precedenza,  $c = 3$  (e quindi ci siamo ricondotti alla soluzione  $(1, 1, 3)$ );  $(a, b) = (1, 3)$  implica  $c^2 - 3c + 2 = 0$  cioè  $(c - 1)(c - 2) = 0$  ovvero  $c = 2$  ( $c = 1$  darebbe  $a = c$ , assurdo), e troviamo di nuovo la soluzione  $(1, 2, 3)$ .

Se  $a = 2$  allora  $b$  e  $c$  soddisfano  $b^2 + c^2 - 2bc - 4 = 0$  cioè  $(b - c)^2 = 4$ , che significa  $b = c \pm 2$ ; abbiamo dunque trovato soluzioni delle forme  $(2, b - 2, b)$  e  $(2, b, b + 2)$ . In analogia col caso  $n = 5$ , in realtà la forma è una sola (scegliamo  $(2, b, b + 2)$ ), tuttavia stavolta due generiche soluzioni di questa forma *non* sono castling-equivalenti (basta considerare, ad esempio,  $(2, 3, 5)$  e  $(2, 4, 6)$ ); affinché lo siano, il  $b$  che le definisce deve avere in entrambe la stessa parità. Inoltre,  $b = 1$  dà la terna  $(1, 2, 3)$ , castling-equivalente a  $(1, 1, 3)$ . Tutto questo significa che le terne da noi ottenute finora possono essere organizzate in due alberi distinti: quelle generate da  $(1, 1, 3)$  e quelle generate da  $(2, 2, 4)$ .

Ciò che abbiamo stabilito è quindi che, data una terna  $(a, b, c) \neq (2, m, m + 2)$  con  $a < b < c$  tale che  $N(a, b, c) = 8$ , otteniamo  $(b - c)(b - c') = \phi(b) < 0$ ; poiché  $c > b$  deve valere  $b > c' > 0$ . Questo implica  $\underline{0} < (a, b, c') < (a, b, c)$ , quindi la tesi segue ponendo  $a' = a$  e  $b' = b$ .  $\square$

I casi  $N(a, b, c) = 4, 5, 8$  sono in realtà molto particolari; si tratta infatti di casi in cui  $N(a, b, c)$  ha la forma  $t^2 + 4$  per qualche  $t \in \mathbb{N}$ . In queste situazioni ponendo  $a = 2$  l'equazione (4.4) diventa  $b^2 + c^2 - 2bc - t^2 = 0$ , cioè  $(b - c)^2 = t^2$  e quindi otteniamo

soluzioni della forma  $(2, b, b + t)$ ; non è difficile verificare che due generiche soluzioni di questa forma sono tra loro castling-equivalenti se e solo se i  $b$  che le generano hanno la stessa classe di resto modulo  $t$  (nei casi in cui  $t > 0$ ). Questo significa che le terne generate da  $(2, b, b + t)$  possono essere raggruppate in  $t$  alberi.

Osserviamo anche che la terna ottenuta per  $b = 1$  (cioè  $(1, 2, t + 1)$ ) genera sempre una terna del tipo  $(1, t - 1, t + 1)$ , che sarà maggiore di  $(1, 2, t + 1)$  se e solo se  $t - 1 > 2$ , ovvero se e solo se  $t < 3$ ; dovendo anche valere  $t > 1$  (altrimenti  $(1, t - 1, t + 1) \notin \mathbb{N}^3$ ), otteniamo che l'unico caso in cui  $(1, t - 1, t + 1) < (1, 2, t + 1)$  è  $t = 2$ , ovvero proprio  $n = 8$  (infatti come abbiamo visto  $(1, 1, 3)$  e  $(1, 2, 3)$  sono castling-equivalenti).

Infine, notiamo come il caso  $n = 4$ , corrispondente a  $t = 0$ , sia un caso limite: abbiamo infatti ottenuto infiniti alberi di soluzioni di  $N(a, b, c) = 4$ .

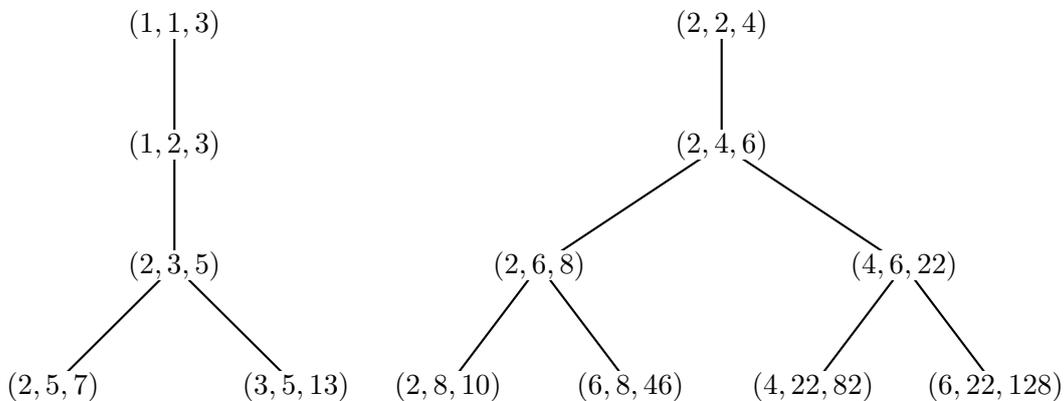
Adesso possiamo dimostrare il teorema 4.23

*Dimostrazione.* Partendo da una qualsiasi terna  $(a, b, c)$  tale che  $N(a, b, c) = 8$  possiamo eseguire la seguente procedura:

1. Controllare se  $a \neq b \neq c \neq a$ .
2. Se la risposta ad 1) è 'no', allora almeno due elementi di  $(a, b, c)$  coincidono, e quindi per il lemma 4.25  $(a, b, c) \in \{(1, 1, 3), (2, 2, 4)\}$ ; in tal caso ci fermiamo.
3. Se la risposta ad 1) è 'sì', controllare se  $(a, b, c) = (2, m, m + 2)$  per qualche  $m \in \mathbb{N}$ .
4. Se la risposta a 3) è 'sì', allora  $(a, b, c)$  è castling-equivalente ad  $(1, 1, 3)$  o a  $(2, 2, 4)$ ; in tal caso ci fermiamo.
5. Se la risposta a 3) è 'no', possiamo trovare tramite trasformata di castling un'ulteriore terna  $\underline{0} < (a', b', c') < (a, b, c)$  tale che  $N(a', b', c') = 8$  (grazie al lemma 4.26); in tal caso ripartiamo dal punto 1) con  $(a', b', c')$ .

Poiché la condizione  $\underline{0} < (a', b', c') < (a, b, c)$  garantisce che questa procedura prima o poi si interrompe, e poiché questo accade solo quando ricadiamo in  $(1, 1, 3)$  o in  $(2, 2, 4)$ , la tesi è dimostrata.  $\square$

Alla luce di quanto visto, le terne tali che  $N(a, b, c) = 8$  possono essere disposte in due alberi, come mostrato in figura



### 4.3.6 Il caso generale

Nei casi  $N(a, b, c) = 5, 8$ , i generatori delle soluzioni della (4.4) risultano preomogenei, o perché la terna contiene un 1 o perché soddisfa la disuguaglianza di Kac (4.2); viene da chiedersi se questa proprietà si mantenga all'aumentare di  $n$ . Visto che ripetere la procedura precedente ogni volta sarebbe stato decisamente gravoso, abbiamo effettuato quest'analisi utilizzando un algoritmo (riportato nell'Appendice B): l'algoritmo cerca le soluzioni della (4.4) al variare di  $n$  con  $a \leq b \leq c$  all'interno di un range fissato dall'utente; dopodiché individua e stampa i generatori delle classi di soluzioni e controlla se sono o meno preomogenei. Osserviamo che non è detto che l'algoritmo individui *tutte* le classi di soluzioni della (4.4) (per quello ci serve la procedura illustrata nei casi  $n = 2, 4, 5, 8$ ), ma d'altra parte questo non è il suo scopo principale; a noi interessano solo le informazioni circa la preomogeneità o meno dei generatori. Ebbene, per valori di  $n$  compresi tra 6 e 1000 e con  $2 \leq a \leq b \leq c \leq 1000$ , ciò che otteniamo è che tutti i generatori o contengono un 1 o soddisfano la disuguaglianza di Kac (4.2).

Questo ci ha condotto a pensare che fosse possibile *dimostrare* che quando  $n \geq 5$  i generatori delle classi di soluzioni della (4.4) devono soddisfare tale proprietà; ed in effetti è proprio così. La dimostrazione si basa sul seguente

**Lemma 4.27.** *Siano  $(a, b, c)$  tali che  $2 \leq a \leq b \leq c$  e  $N(a, b, c) \geq 5$ ; allora  $ab \leq 2c$ .*

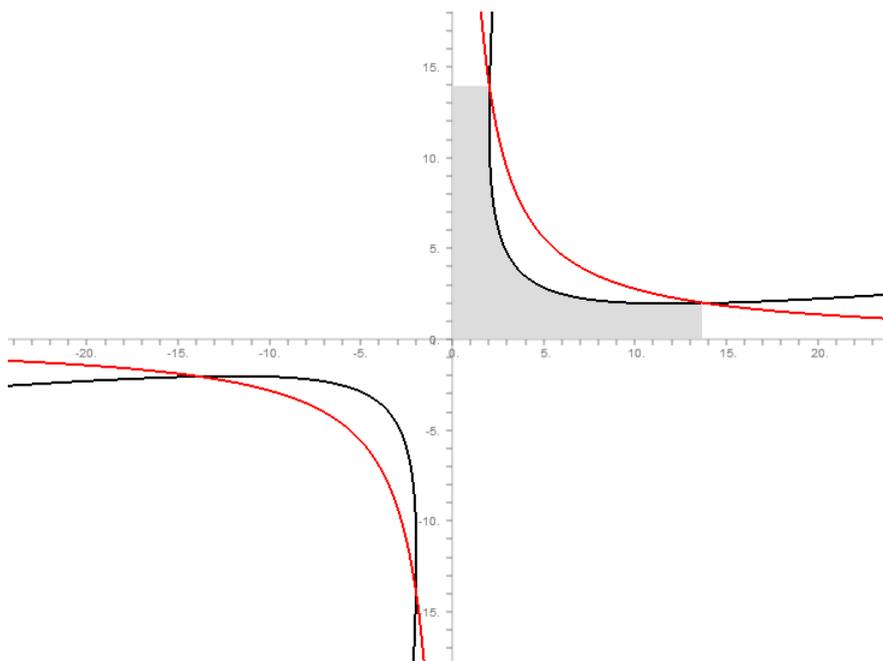
*Dimostrazione.* Cominciamo con l'osservare che possiamo supporre  $c \geq 3$ : questo perché sotto le nostre ipotesi l'unica terna ammissibile con  $c \leq 2$  è  $(2, 2, 2)$ , che dà  $N(a, b, c) = 4$ .

Consideriamo ora le coniche

$$Q_1 : a^2 + b^2 + c^2 - abc - 5 = 0$$

$$Q_2 : ab - 2c = 0$$

trattando  $c$  come un parametro (in figura è raffigurato il caso in cui  $c = 12$ , con  $Q_1$  tracciata in nero e  $Q_2$  in rosso); entrambe sono iperboli non degeneri, con  $Q_2$  equilatera.



L'origine  $(a, b) = (0, 0)$  appartiene alla parte di piano  $P_1$  in cui  $a^2 + b^2 + c^2 - abc \geq 5$  se e solo se  $c \geq \sqrt{5}$ , ma questo è senz'altro vero visto che abbiamo supposto  $c \geq 3$ ; d'altra parte l'origine appartiene anche alla parte di piano  $P_2$  in cui  $ab - 2c \leq 0$ . Ciò che vorremmo dimostrare è che se  $(a, b)$  con  $c \geq a, b \geq 0$  appartiene a  $P_1$  allora appartiene anche a  $P_2$ , ovvero che  $(a, b)$  si trova nella zona tratteggiata in figura; per far questo, è sufficiente dimostrare che i due punti di intersezione tra  $Q_1$  e  $Q_2$  che si trovano nel primo quadrante hanno rispettivamente ordinata e ascissa maggiori di  $c$ .

Le due iperboli, riscritte in forma canonica, sono rispettivamente

$$Q'_1 : (1 - \frac{c}{2})a'^2 + (1 + \frac{c}{2})b'^2 + c^2 - n = 0$$

$$Q'_2 : a'^2 - b'^2 - 4c = 0$$

I punti di intersezione tra  $Q'_1$  e  $Q'_2$  sono in  $(\pm\sqrt{\frac{c^2+4c+5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{c^2-4c+5}{2}})$ ; detti  $x = \sqrt{\frac{c^2+4c+5}{2}}$  e  $y = \sqrt{\frac{c^2-4c+5}{2}}$ , i punti di intersezione tra  $Q_1$  e  $Q_2$  nel primo quadrante sono (applicando il cambio di base)  $(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y)$  e  $(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y)$ . Dobbiamo dimostrare che l'ordinata del primo e l'ascissa del secondo (che coincidono) sono maggiori o uguali a  $c$ .

$\frac{1}{2}\sqrt{c^2+4c+5} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2-4c+5} \geq c$  se e solo se  $\sqrt{c^2+4c+5} + \sqrt{c^2-4c+5} \geq 2c$  cioè se e solo se (elevando al quadrato e svolgendo i conti)  $\sqrt{(c^2+5)^2 - 16c^2} \geq 5 - c^2$ ; poiché abbiamo supposto  $c \geq 3$  l'ultimo termine è minore di 0 e quindi per concludere ci basta verificare che quanto sotto radice è non negativo. Quel termine è  $c^4 - 6c^2 + 25$  ovvero, con la sostituzione  $z = c^2$ ,  $z^2 - 6z + 25$ ; quest'espressione descrive una parabola con concavità rivolta verso l'alto, e poiché il discriminante è minore di 0 questa parabola ha sempre ordinata non-negativa. Di conseguenza il lemma è dimostrato.  $\square$

Possiamo adesso dimostrare che

**Teorema 4.28.** *Lo spazio  $\mathbb{C}^{abc}$  è preomogeneo per l'azione di  $G_{abc}$  quando  $N(a, b, c) = n$  con  $n \geq 5$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $(a, b, c)$  con  $2 \leq a \leq b \leq c$  il generatore di una classe di soluzioni di  $N(a, b, c) = n$  con  $n \geq 5$ ; allora il lemma 4.27 ci garantisce che  $ab \leq 2c$ , ovvero  $ab - c \leq c$ .

Se valesse  $ab - c = c$  allora avremmo  $(a, b, c) = (a, b, \frac{ab}{2})$ , ma tale terna può essere soluzione dell'equazione solo per  $n \leq 4$ : infatti in questo caso si ha  $N(a, b, c) = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{4}$ , che è  $\leq 4$  se e solo se  $b^2(1 - \frac{a^2}{4}) + a^2 - 4 \leq 0$ , e questo è sicuramente vero per  $a = 2$  (caso che dà le terne  $(2, b, b)$ ); se  $a \geq 3$  allora  $(1 - \frac{a^2}{4}) < 0$  e quindi la tesi è vera purché  $b^2 \geq \frac{4-a^2}{1-\frac{a^2}{4}} = 4$ , e questo vale per ipotesi.

Di conseguenza deve valere  $ab - c < c$ , ma poiché  $(a, b, c)$  è un generatore deve valere  $ab - c \leq 0$  (se così non fosse avremmo  $0 < (a, b, ab - c) < (a, b, c)$  e quindi quest'ultima terna non sarebbe minimale). Si ottiene quindi  $-ab \geq -c$  e questo implica che  $c^2 + b^2 - abc = c^2 + b^2 + c(-ab) \geq c^2 + b^2 - c^2 = b^2 \geq 1$  poiché  $b \geq 2$  per ipotesi. Ma questo significa che la terna  $(a, b, c)$  soddisfa la disuguaglianza di Kac, e quindi è preomogenea.  $\square$

Possiamo dunque riassumere quanto scoperto nel seguente teorema, che fornisce una classificazione completa delle terne  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$  preomogenee.

**Teorema 4.29.** Consideriamo l'usuale azione di  $G_{abc}$  su  $\mathbb{C}^{abc}$  e sia  $N(a, b, c) = m$ :

1. Se  $m \leq 1$  allora  $\mathbb{C}^{abc}$  non è preomogeneo.
2. Se  $m = 2$  allora  $\mathbb{C}^{abc}$  è preomogeneo.
3. Il caso  $m = 3$  non può verificarsi (si veda il teorema 4.13).
4. Se  $m = 4$  allora  $\mathbb{C}^{abc}$  è castling-equivalente a  $\mathbb{C}^{2nn}$  per un unico  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , ed è preomogeneo se e solo se  $n \leq 3$ .
5. Se  $m \geq 5$  allora  $\mathbb{C}^{abc}$  è preomogeneo.

Come anticipato ad inizio capitolo, solo nel caso 4) è necessario ricorrere alla trasformazione di castling per determinare se  $\mathbb{C}^{abc}$  è preomogeneo o no; in tutti gli altri casi è sufficiente calcolare  $N(a, b, c)$ .

## Capitolo 5

# Il caso con quattro o più fattori

Come già detto nell'introduzione, la classificazione degli spazi vettoriali preomogenei fornita da Sato e Kimura in [SK] comprende anche il caso del prodotto tensoriale  $\mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_n}$  su cui agisce  $GL_{a_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{a_n}(\mathbb{C})$ , con  $n$  qualsiasi: analogamente a quanto succede nel caso a tre fattori, dato uno spazio  $\mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_n}$  si deve risalire, usando la trasformata di castling, al corrispondente spazio minimale  $\mathbb{C}^{a'_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a'_n}$ ; quest'ultimo risulta essere preomogeneo, supponendo  $1 \leq a'_1 \leq \cdots \leq a'_n$ , se e solo se  $a'_1 \cdots a'_{n-1} \leq a'_n$  oppure se  $(a'_1, \dots, a'_n) = (1, \dots, 1, 2, 2, 2), (1, \dots, 1, 2, 3, 3)$ .

E' naturale chiedersi se anche per il caso ad  $n$  fattori non sia possibile ottenere una classificazione più semplice, che riduca al minimo la necessità di ricorrere alla trasformata di castling.

La prima cosa da osservare è che in questi casi il collegamento con la teoria della rappresentazione del quiver  $\Theta_n$  viene meno, visto che gli elementi di  $\mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_n}$  non possono essere visti come rappresentazioni di tale quiver nel modo naturale esposto nella sezione 3.2; conseguenza di questo è la mancanza di una condizione sufficiente per la preomogeneità che ricalchi quella fornita dal teorema di Kac 3.4. Possiamo invece ancora sfruttare l'usuale condizione sufficiente per la preomogeneità, esposta nella proposizione 2.5, e il metodo infinitesimale illustrato nella sezione 4.1 e contenuto nell'algoritmo dell'Appendice A. Soprattutto, come anticipato in precedenza e come vedremo nelle prossime due sezioni, possiamo continuare ad usare la trasformata di castling, ed essa manterrà intatte tutte le proprietà illustrate finora.

### 5.1 4 fattori

Ammettiamo che  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^d$  sia preomogeneo per l'azione di  $GL_a(\mathbb{C}) \times GL_b(\mathbb{C}) \times GL_c(\mathbb{C}) \times GL_d(\mathbb{C})$ , e chiamiamo  $V = \mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c$  (che ha dimensione  $abc$ ) e  $G = GL_a(\mathbb{C}) \times GL_b(\mathbb{C}) \times GL_c(\mathbb{C})$ ; allora avremo  $V \otimes \mathbb{C}^d$  preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_d(\mathbb{C})$  e quindi, supponendo  $abc \geq d$  e sfruttando la proposizione 2.6, otterremo che  $V^* \otimes \mathbb{C}^{abc-d} \simeq \mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^{abc-d}$  è preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_{abc-d}(\mathbb{C}) = GL_a(\mathbb{C}) \times GL_b(\mathbb{C}) \times GL_c(\mathbb{C}) \times GL_{abc-d}(\mathbb{C})$ . Tramite trasformata di castling siamo dunque passati dalla quadrupla preomogenea  $(a, b, c, d)$  alla quadrupla preomogenea  $(a, b, c, abc-d)$ . Poiché ci sono 4 modi possibili di raggruppare 3 elementi della quadrupla  $(a, b, c, d)$ , in generale da essa deriveranno le 4 trasformate  $(a, b, c, abc-d)$ ,  $(a, b, d, abd-c)$ ,  $(a, c, d, acd-b)$  e  $(b, c, d, bcd-a)$ ; come nel caso a tre fattori, tra queste le uniche quadruple ammissibili sono quelle contenenti elementi  $\geq 0$ .

*Osservazione 21.* D'ora in avanti, per alleggerire le notazioni, indicheremo con  $\mathbb{C}^{abcd}$  lo spazio  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^d$  e con  $G_{abcd}$  il gruppo  $GL_a(\mathbb{C}) \times GL_b(\mathbb{C}) \times GL_c(\mathbb{C}) \times GL_d(\mathbb{C})$ ; inoltre

parleremo indifferentemente di spazio preomogeneo  $\mathbb{C}^{abcd}$  o di quadrupla preomogenea  $(a, b, c, d)$ , e quindi potremo pensare di applicare la trasformata di castling direttamente alle quadruple.

La trasformata di castling ‘a quattro fattori’ conserva tutte le proprietà che aveva nel caso a tre fattori; definiamo sulle quadruple  $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$  l’usuale ordine lessicografico, e diamo nuovamente la definizione di generatore:

**Definizione 5.1.** Una quadrupla  $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$  è il generatore del suo albero di castling se presa una qualsiasi quadrupla  $(a', b', c', d')$  a lei castling-equivalente vale  $(a, b, c, d) \leq (a', b', c', d')$ . In tal caso  $(a, b, c, d)$  è anche detta quadrupla minimale.

Gli alberi di castling hanno ancora un unico generatore; infatti

**Lemma 5.1.** Siano  $\mathbb{C}^{abcd}$  e  $\mathbb{C}^{a'b'c'd'}$  due elementi adiacenti di uno stesso albero di castling, con  $a \leq b \leq c \leq d$ ; allora  $(a, b, c, d) < (a', b', c', d') \iff \dim(\mathbb{C}^{abcd}) < \dim(\mathbb{C}^{a'b'c'd'})$ , cioè se e solo se  $abcd < a'b'c'd'$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo valga  $(a', b', c', d') = (a, b, c, abc - d)$ , con gli elementi di quest’ultima quadrupla non necessariamente ordinati in modo crescente:

$\Rightarrow$  Se valesse  $abc - d \leq d$  otterremmo  $(a, b, c, d) \geq (a, b, c, abc - d)$ , il che è assurdo; di conseguenza deve valere  $abc - d > d$  che, moltiplicando per  $abc$ , diventa  $abc(abc - d) > abcd$ .

$\Leftarrow$  Per ipotesi vale  $abcd < abc(abc - d)$  ovvero  $d < abc - d$  e di conseguenza vale  $(a, b, c, d) < (a, b, c, abc - d)$ .

Quanto appena fatto può essere ripetuto per le altre tre possibili trasformate di castling di  $(a, b, c, d)$ .  $\square$

**Lemma 5.2.** Una quadrupla del tipo  $(1, b, c, d)$  con  $1 \leq b \leq c \leq d$  ha al più una trasformata di castling minore di se stessa in  $\mathbb{N}^4$ .

*Dimostrazione.* Visto che l’unica trasformata di  $(1, 1, 1, 1)$  è  $(0, 1, 1, 1) \notin \mathbb{N}^4$ , possiamo supporre che  $b, c$  e  $d$  non siano tutti 1. Le trasformate di  $(1, b, c, d)$  sono  $(1, b, c, bc - d)$ ,  $(1, b, d, bd - c)$ ,  $(1, c, d, cd - 1)$  e  $(b, c, d, bcd - 1)$ , e sfruttando il lemma precedente potremo scrivere:

1.  $(1, b, c, bc - d) < (1, b, c, d) \iff bc - d < d \iff d > \frac{bc}{2}$
2.  $(1, b, d, bd - c) < (1, b, c, d) \iff bd - c < c \iff c > \frac{bd}{2}$
3.  $(1, c, d, cd - b) < (1, b, c, d) \iff cd - b < b \iff b > \frac{cd}{2}$
4.  $(b, c, d, bcd - 1) < (1, b, c, d) \iff bcd - 1 < 1 \iff bcd < 2$

La situazione (4) si verifica solo per  $b = c = d = 1$ , caso che abbiamo escluso. Possono verificarsi contemporaneamente due o più delle tre condizioni (1)-(3)? Se ad esempio valessero sia la (1) che la (2) otterremmo  $d > \frac{bc}{2} > \frac{b^2d}{4}$  ovvero  $b = 1$ , e la nostra quadrupla iniziale sarebbe  $(1, 1, c, d)$ ; in tal caso avremmo  $(1, 1, c, c - d) < (1, 1, c, d)$  e  $(1, 1, d, d - c) < (1, 1, c, d)$ . Ma  $(1, 1, c, c - d) \notin \mathbb{N}^4$  e dunque l’unica quadrupla a poter essere minore di  $(1, 1, c, d)$  è  $(1, 1, d, d - c)$ . Poiché se anche si verificano più di una tra le condizioni (1) e (3) troviamo che al più una quadrupla di  $\mathbb{N}^4$  può risultare minore di  $(1, b, c, d)$ , la tesi è dimostrata.  $\square$

**Proposizione 5.3.** Ogni quadrupla  $(a, b, c, d)$  con  $1 \leq a \leq b \leq c \leq d$  genera per trasformata di castling non più di una quadrupla minore di se stessa; in particolare ogni albero di castling ha un unico generatore.

*Dimostrazione.* La prima parte dell'enunciato vale senz'altro per le quadruple contenenti un 1, come illustrato dal lemma 5.2; dimostriamola per le quadruple in cui  $a \geq 2$ .

Se lo spazio  $\mathbb{C}^{abcd}$  avesse due trasformate di castling di dimensione minore della sua, per esempio  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^c \otimes \mathbb{C}^{abc-d}$  e  $\mathbb{C}^a \otimes \mathbb{C}^b \otimes \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^{abd-c}$ , otterremmo che  $abc < 2d$  e  $abd < 2c$ , che insieme implicano  $a^2b^2 < 4$  ovvero  $a = b = 1$  (assurdo). Di conseguenza  $\mathbb{C}^{abcd}$  genera per trasformata di castling al più *uno* spazio vettoriale di dimensione minore della sua, e per il lemma 5.1 questo significa che la quadrupla  $(a, b, c, d)$  ha al più una trasformata di castling minore di lei; dunque gli alberi di castling hanno un solo generatore.  $\square$

Prendiamo ora una quadrupla  $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$  con  $a \leq b \leq c \leq d$ , e cerchiamo di capire quando  $\mathbb{C}^{abcd}$  è preomogeneo per l'azione di  $G_{abcd}$ . Sicuramente il gruppo d'isotropia di un qualsiasi tensore in  $\mathbb{C}^{abcd}$  conterrà gli elementi del tipo  $(\alpha I_a, \alpha^{-1} \beta I_b, \beta^{-1} \gamma I_c, \gamma^{-1} I_d)$  ove  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ , e quindi avrà dimensione almeno pari a 3; se definiamo  $N(a, b, c, d) =: a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - abcd$ , la condizione necessaria affinché la quadrupla  $(a, b, c, d)$  possa essere preomogenea è allora

$$N(a, b, c, d) \geq 3 \quad (5.1)$$

mentre l'unica condizione sufficiente che abbiamo è

$$d \geq abc \quad (5.2)$$

*Osservazione 22.* Anche in questo caso, se  $N(a, b, c, d) = n$  e  $(a', b', c', d')$  è castling-equivalente ad  $(a, b, c, d)$  otteniamo  $N(a', b', c', d') = n$ ; c'è dunque ancora una corrispondenza biunivoca tra alberi di castling e classi di soluzioni di  $N(a, b, c, d) = n$ , ed il generatore di una classe di soluzioni sarà il generatore dell'albero di castling ad essa corrispondente.

Visto che  $\mathbb{C}^{1bcd} \simeq \mathbb{C}^{bcd}$ , e che per il caso a tre fattori abbiamo ottenuto una classificazione completa nel capitolo 4, abbiamo analizzato le quadruple  $(a, b, c, d)$  con  $2 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 100$  che soddisfano la condizione necessaria ma non quella sufficiente; ciò che si verifica è che tutte le quadruple che soddisfano la (5.1) risultano preomogenee, con l'ovvia eccezione di quelle castling-equivalenti ad  $(1, 2, n, n)$  con  $n \geq 4$ . Il fatto che le uniche quadruple non preomogenee siano queste non è sorprendente, come mostra il seguente

**Lemma 5.4.** *Sia  $(a, b, c, d)$  con  $2 \leq a \leq b \leq c \leq d$  una quadrupla minimale tale che  $N(a, b, c, d) \geq 3$ ; allora  $d \geq abc$ . In particolare  $(a, b, c, d)$  è preomogenea.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $d < abc$ .

1. Se valesse  $\frac{abc}{2} < d < abc$  otterremmo  $0 < abc - d < abc - \frac{abc}{2} = \frac{abc}{2} < d$  e quindi  $0 < (a, b, c, abc - d) < (a, b, c, d)$ ; ma allora  $(a, b, c, d)$  non sarebbe una quadrupla minimale (assurdo). Può allora valere solo  $d \leq \frac{abc}{2}$ .
2. Poiché  $a \leq b \leq c \leq d$  possiamo effettuare la maggiorazione  $N(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - abcd \leq 4d^2 - abcd = d(4d - abc)$ ; il termine a destra dell'uguale è negativo o nullo per  $d \leq \frac{abc}{4}$  (il che è assurdo per ipotesi), dunque può valere solo  $\frac{abc}{4} < d \leq \frac{abc}{2}$ .
3. Da  $c \geq b \geq a \geq 2$  segue che  $a^2b^2c^2 \geq 16c^2 = \frac{16}{3}3c^2 \geq \frac{16}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$  e di conseguenza

$$N(a, b, c, d) \leq \frac{3}{16}a^2b^2c^2 + d^2 - abcd$$

Il termine a destra è, in funzione di  $d$ , una parabola con concavità rivolta verso l'alto, ed è di conseguenza negativo o nullo quando  $d$  è compreso tra le radici dell'equazione, cioè

$$r = \frac{1}{2} \left[ abc \pm \sqrt{a^2b^2c^2 - \frac{3}{4}a^2b^2c^2} \right] = \frac{abc}{2} \left[ 1 \pm \frac{1}{2} \right]$$

$r_+ = \frac{3}{4}abc > \frac{abc}{2}$  ed  $r_- = \frac{abc}{4}$ , dunque l'intervallo  $[r_-, r_+]$  in cui  $N(a, b, c, d)$  è negativo contiene l'intervallo  $[\frac{abc}{4}, \frac{abc}{2})$  in cui si trova il nostro  $d$ ; ma allora  $N(a, b, c, d) \leq 0$ , il che è assurdo.

Poiché il supporre  $d < abc$  ci conduce sempre ad una contraddizione la tesi è dimostrata.  $\square$

Questo lemma ci dice che per le quadruple minimali  $(a, b, c, d)$  con elemento minimo  $\geq 2$  la condizione necessaria è anche sufficiente, e quindi tali quadruple e le loro trasformate di castling sono preomogenee; le quadruple che restano da esaminare sono dunque quelle che soddisfano la (5.1) e derivano da quadruple minimali del tipo  $(1, b, c, d)$ . Ma è immediato osservare che  $N(1, b, c, d) = m \geq 3$  equivale a  $N(b, c, d) = m - 1 \geq 2$  e quindi possiamo sfruttare il teorema 4.29 per stabilire se  $(1, b, c, d)$  è preomogenea o meno; la procedura è la seguente: sia  $(a, b, c, d)$  con  $1 \leq a \leq b \leq c \leq d$  tale che  $N(a, b, c, d) = m \geq 3$

1. Risalire alla quadrupla minimale  $(a', b', c', d')$  cui  $(a, b, c, d)$  è castling-equivalente (valga  $a' \leq b' \leq c' \leq d'$ ).
2. Se  $a' \geq 2$  allora  $(a', b', c', d')$  è preomogenea per il lemma precedente, e quindi è preomogenea anche  $(a, b, c, d)$ .
3. Se  $a = 1$  allora  $N(b, c, d) = m - 1 \geq 2$  quindi possiamo usare il teorema 4.29 per stabilire se  $(b, c, d)$ , e di conseguenza  $(1, b, c, d)$ , è preomogenea o no.

Il risultato che abbiamo ottenuto può essere espresso in una forma simile a quella del teorema 4.29: vale infatti il seguente

**Teorema 5.5.** *Sia  $(a, b, c, d)$  una quadrupla tale che  $N(a, b, c, d) = m$ :*

1. *Se  $m \leq 2$  allora  $\mathbb{C}^{abcd}$  non è preomogeneo.*
2. *Se  $m = 3$  o  $m = 4$  allora  $\mathbb{C}^{abcd}$  è preomogeneo.*
3. *Se  $m = 5$  dobbiamo distinguere due casi: se  $(a, b, c, d)$  è castling-equivalente ad una quadrupla minimale  $(a', b', c', d')$  con  $a' \geq 2$  allora  $\mathbb{C}^{abcd}$  è preomogeneo; altrimenti  $(a, b, c, d)$  è castling-equivalente ad una quadrupla del tipo  $(1, 2, n, n)$  per un unico  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , e quindi  $\mathbb{C}^{abcd}$  è preomogeneo se e solo se  $n \leq 3$ .*
4. *Se  $m \geq 6$  allora  $\mathbb{C}^{abcd}$  è preomogeneo.*

*Dimostrazione.* La condizione necessaria affinché  $\mathbb{C}^{abcd}$  possa essere preomogeneo è  $N(a, b, c, d) \geq 3$ , dunque se  $m \leq 2$  lo spazio è sicuramente non preomogeneo. Nel seguito, poiché  $N(a, b, c, d)$  è invariante per trasformata di castling, supporremo che  $(a, b, c, d)$  sia minimale.

Sia  $(a, b, c, d)$  con  $a \leq b \leq c \leq d$  tale che  $N(a, b, c, d) = 3$ : se  $a = 1$  allora  $N(b, c, d) = 2$  e per il teorema 4.9 questo significa  $(b, c, d) = (1, 1, 1)$ ; ma allora  $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$ , che è chiaramente preomogenea. Poiché se  $a \geq 2$  la preomogeneità è garantita dal lemma

5.4, otteniamo che tutte le quadruple per cui  $N(a, b, c, d) = 3$  sono preomogenee. Valga invece  $N(a, b, c, d) = 4$ : se  $a = 1$  allora  $N(b, c, d) = 3$ , ma abbiamo dimostrato con il teorema 4.13 che questo non può accadere; di conseguenza deve valere  $a \geq 2$  e quindi per il lemma 5.4  $(a, b, c, d)$  è preomogenea. Questo dimostra il punto 2).

Il punto 4) è analogo al 2): se  $N(a, b, c, d) = m \geq 6$  e  $a \geq 2$  la quadrupla è preomogenea per il lemma 5.4, mentre se  $a = 1$  allora  $N(b, c, d) = m - 1 \geq 5$  e quindi  $(b, c, d)$  (e con lei  $(a, b, c, d)$ ) è preomogenea per il teorema 4.29.

Il punto 3) si dimostra nel modo medesimo: se  $a \geq 2$  concludiamo con il lemma 5.4; se  $a = 1$  allora  $N(b, c, d) = 4$  e quindi per il teorema 4.15  $(b, c, d) = (2, n, n)$  per qualche  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Quest'ultima terna (e con essa  $(1, 2, n, n)$ ) è dunque preomogenea se e solo se  $n \leq 3$ .  $\square$

Quanto fatto in questa sezione può essere generalizzato ad un qualsiasi numero di fattori.

## 5.2 n fattori

In tutta questa sezione supporremo  $n \geq 4$ .

Anche in questo caso cominciamo col dimostrare che la trasformata di castling è ancora utilizzabile: ammettiamo che  $\mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_n}$  sia preomogeneo per l'azione di  $GL_{a_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{a_n}(\mathbb{C})$ , e chiamiamo  $V = \mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_{n-1}}$  (di dimensione  $a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$ ) e  $G = GL_{a_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{a_{n-1}}(\mathbb{C})$ ; allora  $V \otimes \mathbb{C}^{a_n}$  è preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_{a_n}(\mathbb{C})$ , e per la proposizione 2.6, supponendo  $a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \geq a_n$ , anche  $V^* \otimes \mathbb{C}^{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} - a_n} \simeq \mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_{n-1}} \otimes \mathbb{C}^{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} - a_n}$  è preomogeneo per l'azione di  $G \times GL_{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} - a_n}(\mathbb{C}) = GL_{a_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{a_{n-1}}(\mathbb{C}) \times GL_{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} - a_n}(\mathbb{C})$ . Siamo dunque passati, tramite trasformata di castling, dalla  $n$ -upla preomogenea  $(a_1, \dots, a_n)$  alla  $n$ -upla preomogenea  $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} - a_n)$ . Visto che ci sono  $n$  modi di raggruppare  $n - 1$  fattori dello spazio  $\mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_n}$  in un solo spazio vettoriale  $V$ , in generale dalla  $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  deriveranno  $n$  trasformate di castling, tra le quali le uniche ammissibili saranno quelle appartenenti a  $\mathbb{N}^n$ .

*Osservazione 23.* Definiremo di nuovo  $\mathbb{C}^{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} = \mathbb{C}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{a_n}$  e  $G_{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} = GL_{a_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{a_n}(\mathbb{C})$ , e parleremo indifferentemente di spazi preomogenei  $\mathbb{C}^{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$  e di  $n$ -uple preomogenee  $(a_1, \dots, a_n)$ .

Ordiniamo le  $n$ -uple secondo l'ordine lessicografico, e definiamo nuovamente la definizione di  $n$ -upla minimale (o generatore):

**Definizione 5.2.** Una  $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$  è il generatore del suo albero di castling se presa una qualunque  $n$ -upla  $(a'_1, \dots, a'_n)$  a lei castling-equivalente vale  $(a_1, \dots, a_n) \leq (a'_1, \dots, a'_n)$ . In tal caso  $(a_1, \dots, a_n)$  verrà anche detta  $n$ -upla minimale.

Ancora una volta il generatore di un albero di castling è unico, e la dimostrazione si basa sui lemmi seguenti:

**Lemma 5.6.** Siano  $\mathbb{C}^{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$  e  $\mathbb{C}^{a'_1 \cdot \dots \cdot a'_n}$  due elementi adiacenti di uno stesso albero di castling, con  $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ ; allora  $(a_1, \dots, a_n) < (a'_1, \dots, a'_n) \iff \dim(\mathbb{C}^{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}) < \dim(\mathbb{C}^{a'_1 \cdot \dots \cdot a'_n})$ , cioè se e solo se  $a_1 \cdot \dots \cdot a_n < a'_1 \cdot \dots \cdot a'_n$ .

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $q = a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$  e supponiamo valga  $(a'_1, \dots, a'_n) = (a_1, \dots, a_{n-1}, q - a_n)$ , con gli elementi di quest'ultima quadrupla non necessariamente ordinati in modo crescente:

$\Rightarrow$  Se valesse  $q - a_n \leq a_n$  otterremmo  $(a_1, \dots, a_n) \geq (a_1, \dots, a_{n-1}, q - a_n)$ , il che è assurdo; di conseguenza deve valere  $q - a_n > a_n$  che, moltiplicando per  $a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$ , diventa  $a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}(q - a_n) > a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ .

$\Leftarrow$  Per ipotesi vale  $a_1 \cdot \dots \cdot a_n < a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}(q - a_n)$  ovvero  $a_n < q - a_n$  e di conseguenza vale  $(a_1, \dots, a_n) < (a_1, \dots, a_{n-1}, q - a_n)$ .

Quanto appena fatto può essere ripetuto per le altre  $n - 1$  possibili trasformate di castling di  $(a_1, \dots, a_n)$ .  $\square$

**Lemma 5.7.** *Una quadrupla del tipo  $(1, a_2, \dots, a_n)$  con  $1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  ha al più una trasformata di castling minore di se stessa in  $\mathbb{N}^n$ .*

*Dimostrazione.* Visto che l'unica trasformata di  $(1, \dots, 1)$  è  $(0, 1, \dots, 1) \notin \mathbb{N}^n$ , possiamo supporre che  $a_2, \dots, a_n$  non siano tutti 1. Sfruttando il lemma precedente potremo scrivere

$$(a_2, \dots, a_n, a_2 \cdot \dots \cdot a_n - 1) < (1, a_2, \dots, a_n) \iff a_2 \cdot \dots \cdot a_n - 1 < 1 \iff a_2 \cdot \dots \cdot a_n < 2 \quad (5.3)$$

e, presi  $i_2, \dots, i_{n-1} \in \{2, \dots, n\}$  e detto  $i_n$  l'elemento di  $\{2, \dots, n\}$  escluso da tale scelta

$$(1, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_{n-1}} - a_{i_n}) < (1, a_2, \dots, a_n) = (1, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}) \iff \\ a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_{n-1}} - a_{i_n} < a_{i_n} \iff a_{i_n} > \frac{a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_{n-1}}}{2} \quad (5.4)$$

La situazione (5.3) si verifica solo per  $a_2 = \dots = a_n = 1$ , caso che abbiamo escluso. Può la situazione (5.4) verificarsi per due diverse scelte degli  $i_2, \dots, i_{n-1} \in \{2, \dots, n\}$ ? Se così fosse, detti  $j_2, \dots, j_{n-2}$  gli elementi di  $\{2, \dots, n\}$  scelti in entrambi i casi, otterremmo  $a_{j_2}^2 \cdot \dots \cdot a_{j_{n-2}}^2 < 4$  che implica  $a_{j_2} = \dots = a_{j_{n-2}} = 1$ . Se chiamiamo  $j_{n-1}$  e  $j_n$  gli elementi di  $\{2, \dots, n\}$  scelti in uno solo dei due casi in esame, otteniamo che  $(1, \dots, 1, a_{j_{n-1}}, a_{j_{n-1}} - a_{j_n}) < (1, a_2, \dots, a_n)$  e  $(1, \dots, 1, a_{j_n}, a_{j_n} - a_{j_{n-1}}) < (1, a_2, \dots, a_n)$ . Ma al più uno tra  $a_{j_n} - a_{j_{n-1}}$  e  $a_{j_{n-1}} - a_{j_n}$  può appartenere ad  $\mathbb{N}$ ! Di conseguenza se anche la situazione (5.4) si verifica per più scelte degli  $i_2, \dots, i_{n-1} \in \{2, \dots, n\}$ , troviamo al più una  $n$ -upla castling-equivalente a  $(1, a_2, \dots, a_n)$  e minore di lei. La tesi è dunque dimostrata.  $\square$

**Proposizione 5.8.** *Ogni  $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  con  $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$  genera per trasformata di castling non più di una  $n$ -upla minore di se stessa; in particolare ogni albero di castling ha un unico generatore.*

*Dimostrazione.* La prima parte dell'enunciato vale senz'altro per le  $n$ -uple contenenti un 1, come illustrato dal lemma 5.7; dimostriamola per le  $n$ -uple in cui  $a_1 \geq 2$ .

Se lo spazio  $\mathbb{C}^{a_1 \dots a_n}$  avesse due trasformate di castling di dimensione minore della sua, per esempio  $\mathbb{C}^{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{a_{n-1}} \otimes \mathbb{C}^{a_1 \dots a_{n-1} - a_n}$  e  $\mathbb{C}^{a_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{a_n} \otimes \mathbb{C}^{a_2 \dots a_n - a_1}$ , otterremmo che  $a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} < 2a_n$  e  $a_2 \cdot \dots \cdot a_n < 2a_1$ , che insieme implicano  $a_2^2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}^2 < 4$  ovvero  $a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$  (assurdo). Di conseguenza  $\mathbb{C}^{a_1 \dots a_n}$  genera per trasformata di castling al più *uno* spazio vettoriale di dimensione minore della sua, e per il lemma 5.6 questo significa che la  $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  ha al più una trasformata di castling minore di lei; dunque gli alberi di castling hanno un solo generatore.  $\square$

Prendiamo ora una  $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$  con  $a_1 \leq \dots \leq a_n$  e cerchiamo di determinare quando  $\mathbb{C}^{a_1 \dots a_n}$  è preomogeneo per l'azione di  $G_{a_1 \dots a_n}$ ; definito  $N(a_1, \dots, a_n) = a_1^2 + \dots + a_n^2 - a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ , le condizioni rispettivamente necessaria e sufficiente per la preomogeneità di tale  $n$ -upla sono

$$N(a_1, \dots, a_n) \geq n - 1 \quad (5.5)$$

e

$$a_n \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \quad (5.6)$$

*Osservazione 24.* Ovviamente avremo ancora la corrispondenza biunivoca tra classi di soluzioni di  $N(a_1, \dots, a_n) = m$  e alberi di castling (i.e. classi di castling-equivolenza).

Analogamente a quanto succede per quattro fattori, la condizione necessaria risulta quasi sempre essere sufficiente; infatti:

**Lemma 5.9.** *Sia  $(a_1, \dots, a_n)$  con  $2 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$  una  $n$ -upla minimale tale che  $N(a_1, \dots, a_n) \geq n - 1$ ; allora  $a_n \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$ . In particolare  $(a_1, \dots, a_n)$  è preomogenea.*

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $q = a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$  e ammettiamo per assurdo che  $a_n < q$

1. Se  $\frac{q}{2} < a_n < q$  allora  $0 < q - a_n < q - \frac{q}{2} = \frac{q}{2} < a_n$  e quindi  $\underline{0} < (a_1, \dots, q - a_n) < (a_1, \dots, a_n)$ ; ma allora  $(a_1, \dots, a_n)$  non è minimale (assurdo). Deve dunque valere  $a_n \leq \frac{q}{2}$ .
2. Sfruttando l'ipotesi  $2 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$  possiamo effettuare la maggiorazione  $N(a_1, \dots, a_n) \leq na_n^2 - qa_n = a_n(na_n - q)$ , e questo termine è negativo o nullo se  $a_n \leq \frac{q}{n}$ ; deve allora valere  $\frac{q}{n} < a_n \leq \frac{q}{2}$ .
3.  $a_i \geq 2$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , dunque  $q^2 \geq 4^{n-2}a_{n-1}^2 = \frac{4^{n-2}}{n-1}(n-1)a_{n-1}^2 \geq \frac{4^{n-2}}{n-1}(a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2)$  poiché  $a_{n-1} \geq a_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n-2$ ; possiamo dunque scrivere

$$N(a_1, \dots, a_n) \leq \frac{n-1}{4^{n-2}}q^2 + a_n^2 - qa_n$$

Il discriminante dell'equazione al secondo termine è  $\frac{4^{n-3}-n+1}{4^{n-3}}q^2$ , che è non negativo per  $n \geq 4$ ; di conseguenza l'equazione ammette radici, che sono

$$r = \frac{1}{2} \left[ q \pm \sqrt{q^2 - \frac{n-1}{4^{n-3}}q^2} \right]$$

ovvero

$$r_+ = \frac{q}{2} \left[ 1 + \sqrt{\frac{4^{n-3} - n + 1}{4^{n-3}}} \right]$$

$$r_- = \frac{q}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{4^{n-3} - n + 1}{4^{n-3}}} \right]$$

Sicuramente  $r_+ \geq \frac{q}{2}$ , ma vale anche  $r_- \geq \frac{q}{n}$ ? Svolgendo i conti si ottiene che condizione necessaria e sufficiente affinché così sia è che  $4^{n-2} \geq n^2$ , cosa che per  $n \geq 4$  è vera. Di conseguenza  $(\frac{q}{n}, \frac{q}{2}] \subseteq [r_-, r_+]$  e poiché per gli  $a_n$  in quest'ultimo intervallo vale  $N(a_1, \dots, a_n) \leq 0$  otteniamo che anche quando  $\frac{q}{n} < a_n \leq \frac{q}{2}$  si ha  $N(a_1, \dots, a_n) \leq 0$ .

Poiché l'aver supposto  $a_n < q$  ci ha condotto ad un assurdo, la tesi è dimostrata.  $\square$

Anche in questo caso, sfruttando questo lemma si perviene ad una classificazione simile a quella contenuta nei teoremi 4.29 e 5.5; prima di enunciarla, dimostriamo i seguenti lemmi:

**Lemma 5.10.** *Se  $N(a_1, \dots, a_n) = n - 1$  allora l' $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  è preomogenea.*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $n$ , partendo dal caso  $n = 4$ . Visto che  $N(a_1, \dots, a_n)$  è invariante per trasformati di castling, possiamo supporre che  $(a_1, \dots, a_n)$  sia minimale. Se  $a_1 \geq 2$  la tesi segue immediatamente dal lemma 5.9; se invece  $a_1 = 1$ ,  $N(1, a_2, a_3, a_4) = 3$  implica  $N(a_2, a_3, a_4) = 2$ , e per il teorema 4.9 otteniamo  $(a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 1)$ ; di conseguenza  $(a_1, \dots, a_n) = (1, 1, 1, 1)$ , che è chiaramente preomogenea.

Ammettiamo ora vera la tesi per  $(n - 1) > 4$  qualsiasi e dimostriamola per  $n$ . Se  $a_1 \geq 2$  la tesi segue ancora dal lemma 5.9; se invece  $a_1 = 1$  abbiamo  $N(1, a_2, \dots, a_n) = n - 1$  da cui  $N(a_2, \dots, a_n) = n - 2$ . Per ipotesi induttiva quest'ultima  $(n - 1)$ -upla è preomogenea, e dunque lo è pure  $(1, a_2, \dots, a_n)$ .  $\square$

**Lemma 5.11.** *Se  $N(a_1, \dots, a_n) = n$  allora l' $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  è preomogenea.*

*Dimostrazione.* Di nuovo supponiamo di considerare  $n$ -uple minimali, e procediamo per induzione su  $n$  partendo da  $n = 4$ . Se  $a_1 = 1$  allora  $N(a_2, a_3, a_4) = 3$ , ma questo non può accadere per il teorema 4.13; di conseguenza deve valere  $a_1 \geq 2$ , e quindi la tesi segue dal lemma 5.9.

Ammettiamo ora vera la tesi per  $(n - 1) > 4$  e dimostriamola per  $n$ . Se  $a_1 \geq 2$  essa segue ancora dal lemma 5.9; se invece  $a_1 = 1$  otteniamo  $N(a_2, \dots, a_n) = n - 1$  che, per ipotesi induttiva, significa che  $(a_2, \dots, a_n)$  è preomogenea. Ma allora è preomogenea anche  $(1, a_2, \dots, a_n)$  e abbiamo concluso.  $\square$

**Lemma 5.12.** *Se  $N(a_1, \dots, a_n) = n + 1$  l' $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  è preomogenea, a meno che non sia castling-equivalente a  $(1, \dots, 1, 2, k, k)$  con  $k \geq 4$ .*

*Dimostrazione.* Di nuovo supponiamo di considerare  $n$ -uple minimali, e procediamo per induzione su  $n$  partendo da  $n = 4$ . Se  $a_1 \geq 2$  la quadrupla è preomogenea per il lemma 5.9; se invece  $a_1 = 1$  otteniamo che  $N(a_2, a_3, a_4) = 4$ , da cui segue, per il teorema 4.15,  $(a_2, a_3, a_4) = (2, k, k)$  per qualche  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Questa terna è preomogenea se e solo se  $k \leq 3$ , e lo stesso varrà quindi per  $(1, 2, k, k)$ .

Ammettiamo ora vera la tesi per  $(n - 1) > 4$  e dimostriamola per  $n$ . Se  $a_1 \geq 2$  possiamo usare il lemma 5.9 per concludere; se invece  $a_1 = 1$  otteniamo  $N(a_2, \dots, a_n) = n$ . Per ipotesi induttiva questo significa che  $(a_2, \dots, a_n)$  è preomogenea (e in tal caso lo è pure  $(1, a_2, \dots, a_n)$ ) o  $(a_2, \dots, a_n) = (1, \dots, 1, 2, k, k)$  con  $k \geq 4$  e quindi non è preomogenea; nel secondo caso non è preomogenea nemmeno  $(1, a_2, \dots, a_n)$  e abbiamo concluso.  $\square$

**Lemma 5.13.** *Se  $N(a_1, \dots, a_n) = m$  con  $m \geq n + 2$  allora l' $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  è preomogenea.*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $n$ , partendo da  $n = 4$  e supponendo  $(a_1, \dots, a_n)$  minimale. Se  $a_1 \geq 2$  la tesi segue dal lemma 5.9. Se invece  $a_1 = 1$  otteniamo  $N(a_2, a_3, a_4) = m - 1 \geq n + 1 = 5$  e quindi  $(a_2, a_3, a_4)$  risulta preomogenea per il teorema 4.29; ma allora è preomogenea anche  $(1, a_2, a_3, a_4)$ .

Supponiamo vera la tesi per  $(n - 1) > 4$  e dimostriamola per  $n$ . Se  $a_1 \geq 2$  concludiamo col lemma 5.9. Se invece  $a_1 = 1$  otteniamo  $N(a_2, \dots, a_n) = m - 1 \geq (n + 2) - 1 = n + 1$  e quindi per ipotesi induttiva  $(a_2, \dots, a_n)$  è preomogenea. Ma allora è preomogenea anche  $(1, a_2, \dots, a_n)$  e la tesi è dimostrata.  $\square$

I lemmi precedenti costituiscono la dimostrazione del seguente

**Teorema 5.14.** *Valga  $n \geq 4$  ed  $N(a_1, \dots, a_n) = m$ :*

1. *Se  $m \leq n - 2$  allora  $\mathbb{C}^{a_1 \dots a_n}$  non è preomogeneo.*
2. *Se  $m = n - 1$  o  $m = n$  allora  $\mathbb{C}^{a_1 \dots a_n}$  è preomogeneo.*
3. *Se  $m = n + 1$  dobbiamo distinguere due casi: se  $(a_1, \dots, a_n)$  è castling-equivalente ad una  $n$ -upla minimale  $(a'_1, \dots, a'_n)$  con  $a'_1 \geq 2$  allora  $\mathbb{C}^{a_1 \dots a_n}$  è preomogeneo; altrimenti  $(a_1, \dots, a_n)$  è castling-equivalente ad una  $n$ -upla del tipo  $(1, \dots, 1, 2, k, k)$  per un unico  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , e quindi  $\mathbb{C}^{a_1 \dots a_n}$  è preomogeneo se e solo se  $k \leq 3$ .*
4. *Se  $m \geq n + 2$  allora  $\mathbb{C}^{a_1 \dots a_n}$  è preomogeneo.*

Così come nel caso a tre fattori, c'è un'unica situazione in cui è necessario ricorrere alla trasformata di castling per decidere se  $\mathbb{C}^{a_1 \dots a_n}$  è preomogeneo o no; in tutte le altre è sufficiente calcolare  $N(a_1, \dots, a_n)$ .

## Appendice A

# Algoritmo per il calcolo di $\dim(O_x)$

```
--INPUT: una terna di numeri (a,b,c)
--OUTPUT: dimensione dello spazio tangente di una generica
--        orbita in  $C^{abc}$ 

---set triplet values
aa=2, bb=30, cc=30
---KK=QQ
KK=ZZ/31991
R=KK[x_(0,0)..x_(aa-1,aa-1),y_(0,0)..y_(bb-1,bb-1),z_(0,0)..z_(cc-1,cc-1),
      a_0..a_(aa-1),b_0..b_(bb-1),c_0..c_(cc-1)]
S=KK[a_0..a_(aa-1)]**KK[b_0..b_(bb-1)]**KK[c_0..c_(cc-1)]
use R
---next is general tensor
f=sub(random({1,1,1},S),R);
---next can be uncommented to check specific tensors
---f=a_0*b_0*c_0
xyz=sub(basis({1,1,1},S),R);
---derivative with respect to x
xx=matrix{{x_(0,0)..x_(aa-1,aa-1)}};
dx=apply(aa,i->(a_i=>sum(aa,j->a_j*x_(i,j))));
---derivative with respect to y
yy=matrix{{y_(0,0)..y_(bb-1,bb-1)}};
dy=apply(bb,i->(b_i=>sum(bb,j->b_j*y_(i,j))));
---derivative with respect to z
zz=matrix{{z_(0,0)..z_(cc-1,cc-1)}};
dz=apply(cc,i->(c_i=>sum(cc,j->c_j*z_(i,j))));
time tg=diff(xyz,diff(transpose xx,sub(f,dx))||diff(xyz,diff(transpose yy,sub(f,dy))||
      diff(xyz,diff(transpose zz,sub(f,dz))));
TG=sub(tg,KK);
time rank TG
if rank TG==aa*bb*cc then print("quasi omogeneo") else print
      ("probabilmente non quasi omogeneo")
```

*Osservazione 25.* L'assegnazione  $\mathbf{TG}=\text{sub}(\mathbf{tg},\mathbf{KK})$  dice al programma di 'immergere' gli elementi di  $\mathbf{tg}$  nel campo  $\mathbf{KK}$ ; sebbene quest'immersione sembri superflua (dato che gli elementi di  $\mathbf{tg}$  stanno *già* in  $\mathbf{KK}$ ), in realtà ai fini pratici è fondamentale. Macaulay2 infatti è programmato per manipolare polinomi: senza quell'assegnazione non si accorgerebbe che gli elementi di  $\mathbf{tg}$  sono in realtà scalari, e nel calcolare il rango di  $\mathbf{tg}$  li moltiplicherebbe tra loro utilizzando lo stesso algoritmo che usa per moltiplicare polinomi, aumentando considerevolmente il tempo macchina necessario.

## Appendice B

# Ricerca delle soluzioni dell'equazione (4.4)

Qui di seguito riportiamo l'algoritmo utilizzato per trovare le classi di soluzioni della (4.4) al variare di  $n$  all'interno di un intervallo di  $\mathbb{Z}$  specificato dall'utente; il suo funzionamento può essere riassunto nei seguenti passi:

1. Controlla se  $n = 3 + 9k, 6 + 9k$  per qualche  $k \in \mathbb{N}$ , e se così è passa direttamente ad esaminare il caso  $n + 1$  (visto che per gli  $n$  di quel tipo sappiamo che non ci sono soluzioni intere).
2. Controlla se  $n = t^2 + 4$  per qualche  $t \in \mathbb{N}$ , e se così è memorizza i  $t$  generatori del tipo  $(2, x, x + t)$  nelle prime righe della matrice  $M$ , ciascuno ordinato in modo crescente.
3. Cerca le soluzioni della (4.4) per  $a, b, c$  all'interno di un range specificato dall'utente e le memorizza (ciascuna ordinata in modo crescente) nelle righe libere di  $M$ ; se vale  $n = t^2 + 4$ , evita di riscrivere le soluzioni  $(2, x, x + t)$  e  $(1, t - 1, t + 1)$ .
4. Per ognuna delle soluzioni  $(a, b, c)$  con  $a \leq b \leq c$  trovate al punto 2, esegue la trasformata di castling che dà una soluzione minore (ovvero  $(a, b, ab - c)$ ) finché non ricade in una terna minimale; alla fine di questa procedura, in  $M$  saranno memorizzati solo generatori delle classi di soluzioni (in generale ripetuti molte volte).
5. Ordina i generatori memorizzati in  $M$  secondo l'ordinamento lessicografico di  $\mathbb{N}^3$ , dopodiché scorre le righe di  $M$ ; la prima viene conservata, mentre le successive vengono confrontate con l'ultima di quelle conservate e mantenute a loro volta in  $M$  solo se sono diverse da quest'ultima. In questo modo in  $M$  rimarranno solo generatori non ripetuti.
6. Scorre le righe di  $M$  e le stampa. Se  $n \leq 1$  le terne sono sicuramente non preomogenee, mentre se  $n \geq 2$  potrebbero esserlo; in tal caso controlla se i generatori contengono un 1 o se soddisfano la disuguaglianza di Kac (4.2).

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
void azzera(int mat[100][100], int d1, int d2);
int controllo_quadrati(int n, int M[3][100]);
void trova_soluzioni(int n, int t, int M[3][100], int soglia, int punt);
int castling(int mat[100][100]);
void ordina_matrice(int M[100][100]);
```

```

void pulire(int M[100][100]);
int main ()
{
int n, t=0, punt=0, M[100][100], soglia=500, m[100][100], col, j, a, b, c, d;
for(n=0;n<=100;n++)
{
printf("\n\n n=%d \n", n);
azzer(M,3,100);
if(n==4) {printf("\n Ci sono infinite classi di soluzioni, ciascuna generata da (2,b,b) \n");
continue;}
if(n==5) {printf("\n C'è una sola classe di soluzioni, generata da (1,2,2) \n");
continue;}
//Controllo se n=3+9k,6+9k per un qualche k.
if((n%9==3)||(n%9==6)) {printf("\n Non ci sono soluzioni intere");
continue;}
//Controllo se n=t^2+4 per un qualche t.
t=controllo_quadrati(n,M);
punt=punt+t;
//Memorizzo in M anche le soluzioni non banali dell'equazione (senza sovrascrivere
//i generatori già trovati).
trova_soluzioni(n,t,M,soglia,punt);
if(M[0][0]==0) {printf("\n Non ho trovato soluzioni per a,b,c<=%d \n", soglia);
continue;}
//Faccio il 'castling discendente' delle soluzioni trovate, per risalire ai loro
//generatori. Esamino anche i casi (2,n,n+t) perché a volte non sono minimali.
punt=0;
while(M[0][punt]!=0)
{
azzer(m,3,100);
m[0][0]=M[0][punt];
m[1][0]=M[1][punt];
m[2][0]=M[2][punt];
col=castling(m);
//Ora in m ho le trasformate di castling discendenti della terna memorizzata
//nella punt-esima colonna di M; l'ultima di queste trasformate sarà quindi
//il generatore minimale della soluzione da cui sono partito. La memorizzo
//in M al posto della soluzione di partenza e ripeto il tutto.
M[0][punt]=m[0][col];
M[1][punt]=m[1][col];
M[2][punt]=m[2][col];
punt=punt+1;
}
//Adesso in M ho tutti i generatori minimali delle soluzioni trovate, ma la
//maggior parte saranno ripetuti. Allora "pulisco" la matrice M, eliminando
//i doppi.
pulire(M);
//Ora posso stampare i generatori minimali (e verificare se gli spazi tensoriali
//ad essi associati sono preomogenei usando la disuguaglianza di Kac).
if(n<2) {
printf("\n Le terne seguenti sono sicuramente non preomogenee \n");
j=0;
while(M[0][j]!=0)
{
printf("\n %d", M[0][j]);
printf("\t %d", M[1][j]);
printf("\t %d", M[2][j]);
}
}
}
}

```

```

        j=j+1;
    }
}
else {
    j=0;
    while(M[0][j]!=0)
    {
        a=M[0][j];
        b=M[1][j];
        c=M[2][j];
        d=c*c+b*b-a*b*c;
        printf("\n %d", a);
        printf("\t %d", b);
        printf("\t %d", c);
        if((a==1)||(b==1)||(c==1)) printf("\t Senz'altro preomogeneo");
        else {
            if(d>=1) printf("\t Soddisfa la disuguaglianza di Kac");
            else printf("\t Non soddisfa la disuguaglianza di Kac");
        }
        j=j+1;
    }
}
punt=0;
}
return(0);
}

void azzera(int mat[100][100], int d1, int d2)
{
    int i, j;
    for(i=0;i<d1;i++)
        for(j=0;j<d2;j++)
            mat[i][j]=0;
}

int controllo_quadrati(int n, int M[3][100])
{
    int t, j;
    //Controllo se n è del tipo "t^2+4", caso in cui so esistere t generatori
    //quasi sempre minimali del tipo (2,x,x+t) per 1<=x<=t.
    for(t=0;t<n;t++)
        if (t*t+4==n) break;
    if(t==n) t=0;
    //Se davvero n=t^2+4, memorizzo i generatori e (nel programma principale)
    //"aggiorno" la variabile punt.
    for(j=1;j<=t;j++)
    {
        if(j==1) {
            M[0][j-1]=j;
            M[1][j-1]=2;
            M[2][j-1]=j+t;
        }
        else{
            M[0][j-1]=2;
            M[1][j-1]=j;
            M[2][j-1]=j+t;
        }
    }
}

```

```

    }
}
return(t);
}

void trova_soluzioni(int n, int t, int M[3][100], int soglia, int punt)
{
    int a, b, c, cont=0;
    //Trovo le soluzioni di  $a*a+b*b+c*c-a*b*c==n$ 
    for(a=1;a<=soglia;a++)
        for(b=a;b<=soglia;b++)
            for(c=b;c<=soglia;c++)
                {
                    //Se  $n=t^2+4$  la soluzione (1,t-1,t+1) deriva da (2,1,t+1) e quindi la salto.
                    //Se  $n=t^2+4$  so da quale generatore derivano le soluzioni in cui uno tra
                    //a,b,c è 2, quindi le salto.
                    if(a*a+b*b+c*c-a*b*c==n) {
                        if((t!=0)&&(((a==2) || (b==2) || (c==2)) || ((a==1)&&(b==t-1)&&(c==t+1)))) break;
                        M[0][punt+cont]=a;
                        M[1][punt+cont]=b;
                        M[2][punt+cont]=c;
                        cont=cont+1;
                    }
                }
}

void pulire(int M[100][100])
{
    int i=1, p=0, j;
    //Ordino lessicograficamente i generatori presenti in M.
    ordina_matrice(M);
    //Memorizzo in cima ad M i generatori tra loro diversi.
    while(M[0][i]!=0)
    {
        if((M[0][i]!=M[0][p]) || (M[1][i]!=M[1][p]) || (M[2][i]!=M[2][p])) {
            p=p+1;
            M[0][p]=M[0][i];
            M[1][p]=M[1][i];
            M[2][p]=M[2][i];
        }

        i=i+1;
    }
    //Azzero il resto di M (contenente adesso solo doppiioni).
    for(i=0;i<3;i++)
        for(j=p+1;j<100;j++)
            M[i][j]=0;
}

void ordina_matrice(int M[100][100])
{
    int j, p, q, l=1, dep;
    //Ordino rispetto al primo numero.
    l=1;
    while(M[0][l]!=0)
    {
        p=1;

```

```

while((p>0)&&(M[0][p]<M[0][p-1]))
{
    for(q=0;q<3;q++)
    {
        dep=M[q][p];
        M[q][p]=M[q][p-1];
        M[q][p-1]=dep;
    }
    p=p-1; }
l=l+1;
}
//Ordino rispetto al secondo numero.
l=1;
while(M[1][l]!=0)
{
    p=1;
    while((p>0)&&(M[1][p]<M[1][p-1])&&(M[0][p]<=M[0][p-1]))
    {
        for(q=0;q<3;q++)
        {
            dep=M[q][p];
            M[q][p]=M[q][p-1];
            M[q][p-1]=dep;
        }
        p=p-1;
    }
    l=l+1;
}
//Ordino rispetto al terzo numero.
l=1;
while(M[2][l]!=0)
{
    p=1;
    while((p>0)&&(M[2][p]<M[2][p-1])&&(M[1][p]<=M[1][p-1])&&(M[0][p]<=M[0][p-1]))
    {
        for(q=0;q<3;q++)
        {
            dep=M[q][p];
            M[q][p]=M[q][p-1];
            M[q][p-1]=dep;
        }
        p=p-1;
    }
    l=l+1;
}
}

int castling(int m[100][100])
{
    int i=0, r, j=0, l, p, dep, s[3][100], a, b, c, A, B, C;
    do
    {
        azzera(s,3,100);
        r=0;
        //Faccio le trasformate della terna attualmente in esame e

```

```

//le memorizzo nella matrice s.
s[0][0]=m[0][i];
s[1][0]=m[1][i];
s[2][0]=m[0][i]*m[1][i]-m[2][i];
s[0][1]=m[1][i];
s[1][1]=m[2][i];
s[2][1]=m[1][i]*m[2][i]-m[0][i];
s[0][2]=m[2][i];
s[1][2]=m[0][i];
s[2][2]=m[2][i]*m[0][i]-m[1][i];
//Ordino ciascuna trasformata memorizzata nella matrice s in ordine crescente
j=0;
for(j=0;j<3;j++)
{
for(l=1;l<3;l++)
{
p=1;
while((p>0)&&(s[p][j]<s[p-1][j]))
{
dep=s[p][j];
s[p][j]=s[p-1][j];
s[p-1][j]=dep;
p--;
}
}
}
//Cerco la terna discendente (se c'è) e la memorizzo nella prima
//colonna libera di m (la (i+1)-esima); per farlo scorro le colonne
//di s e le confronto con la terna memorizzata nella colonna i-esima di m.
//Una terna di s è da scartare se contiene un numero non-positivo (ed
//avendo ordinato s mi basta controllare il primo elemento di ciascuna
//colonna di s). Una terna di s va scartata anche se è ascendente rispetto
//a quella nella riga i-esima di m.
A=m[0][i];
B=m[1][i];
C=m[2][i];
for(j=0;j<3;j++)
{
a=s[0][j];
b=s[1][j];
c=s[2][j];
if((a>0)&&((a<A)||((a==A)&&(b<B))||((a==A)&&(b==B)&&(c<C)))) break;
else r=r+1;
}
if(r!=3) {
m[0][i+1]=s[0][j];
m[1][i+1]=s[1][j];
m[2][i+1]=s[2][j];
i=i+1;
}
}
while(r!=3);
return(i);
}

```

# Bibliografia

- [BGP] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, V. A. Ponomarev, Coxeter functors and Gabriel's theorem. *Russian Math. Surveys* **28**, 17-32, 1973
- [Bor] A. Borel, *Linear algebraic groups*. Springer, New York, 1991
- [Bra] M. C. Brambilla, Simplicity of generic Steiner bundles. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **8-b**, n° 3, 723-735, 2005
- [Bri] M. Brion, Representations of quivers. Disponibile all'indirizzo [https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/notes\\_quivers\\_rev.pdf](https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/notes_quivers_rev.pdf)
- [Cas] J. W. S. Cassels, *An introduction to diophantine approximation*. Cambridge University Press, 1957
- [DW] H. Derksen, J. Weyman, Quiver representations. *Notices Amer. Math. Soc.*, **52(2)**, 200-206, 2005
- [Fae] D. Faenzi, A one-day tour of representations and invariants of quivers. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, Vol **71(1)**, 3-34, 2013
- [Gab] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I. *Manusc. Math.* **6**, 71-103, 1972
- [GS] D. Grayson, M. Stillman, MACAULAY2: Software per la ricerca in geometria algebrica e algebra commutativa. Disponibile all'indirizzo <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>
- [Hur] A. Hurwitz, *Archiv. Math. Phys* (3), 11, 1907
- [Kac] V. G. Kac, Infinite roots system, representations of graphs and invariant theory. *Invent. Math.*, **56(1)**, 57-92, 1980
- [KR] H. Kraft, Ch. Riedtmann, Geometry of representations of quivers, *Representations of Algebras*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **116**, 109-145, Cambridge Univ. Press, 1986
- [Man] L. Manivel, Prehomogeneous spaces and projective geometry. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, Vol **71(1)**, 35-118, 2013
- [Ott] G. Ottaviani, An introduction to the hyperdeterminant and to the rank of multidimensional matrices, in I. Peeva (ed.), *Commutative Algebra, Expository Papers Dedicated to David Eisenbud on the Occasion of His 65th Birthday*, 609-638, Springer, New York 2013
- [Par1] P. G. Parfenov, Tensor products with a finite number of orbits. *Russian Math Surveys* **53**, no. 3, 635-636, 1998

- [Par2] P. G. Parfenov, Orbits and their closures in the spaces  $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{k_r}$ . Sb. Math. **192**, no. 1-2, 89-112, 2001
- [SK] M. Sato, T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. Nagoya Math. J. **65**, 1-155, 1977