



Università degli Studi di Firenze

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Varietà Duali Proiettive

Projective Dual Varieties

Relatore:
Prof. Giorgio Ottaviani

Candidato:
Elisabetta Rocchi

Anno Accademico 2022-2023

Indice

Introduzione	1
1 Varietà duale	2
1.1 Prime definizioni e proprietà	2
1.2 Discriminante	3
2 Il caso delle curve piane	3
2.1 La curva duale	3
2.2 Implementazione su M2	5
2.3 Formule di Plücker	7
2.4 La formula di E. Schläffi per le cubiche piane e lisce	9
3 Teorema di Bidualità	11
3.1 Riformulazione della tesi	11
3.2 Varietà Lagrangiane	11
3.3 Dimostrazione del Teorema	13
4 Varietà duali e proiezioni	14
5 Varietà Determinantali	17
5.1 Varietà duale delle matrici di rango $\leq \mathbf{r}$	17
5.2 La Varietà di Segre e il suo discriminante	18
Riferimenti Bibliografici	19

Introduzione

Se $C \subset \mathbb{P}^2$ è una curva piana posso associare a ogni punto liscio $p \in C$ la sua retta tangente l_p . Ogni retta di \mathbb{P}^2 può essere vista come un punto del piano duale $(\mathbb{P}^2)^*$. Ottengo un'applicazione $C \rightarrow (\mathbb{P}^2)^*$ che porta p in l_p la cui (chiusura dell') immagine C^\vee si dice *curva duale* ed è un oggetto classico molto studiato in geometria proiettiva. Il risultato più importante in quest'area è il teorema di Bidualità: iterando questa costruzione una seconda volta, si ottiene una curva isomorfa alla curva C , cioè $C \cong (C^\vee)^\vee$.

In questa tesi abbiamo definito per ogni varietà algebrica irriducibile $X \subset \mathbb{P}^n$ la sua varietà duale $X^\vee \subset (\mathbb{P}^n)^*$ generalizzando il caso in cui X è una curva piana. Abbiamo dimostrato il teorema analogo di Bidualità $X \cong (X^\vee)^\vee$ seguendo l'argomento simplettico di [GKZ].

Abbiamo affrontato il problema di come trovare le equazioni che definiscono la duale. Nel caso di curve parametrizzate non è difficile trovare una parametrizzazione anche per la curva duale, in generale è più complesso. Ci siamo dunque fatti aiutare dal software di calcolo simbolico Macaulay2, sfruttando la teoria dell'eliminazione si riesce a implementare alcuni codici che consentono di trovare l'equazione della curva duale. Succede spesso che, partendo da una curva liscia, se ne trovi una duale con singolarità infatti, come vedremo, punti di flesso di C danno origine a cuspidi di C^\vee e bitangenti di C a nodi di C^\vee . Le Formule di Plücker, conseguenza del Teorema di Bidualità, definiscono le relazioni tra grado e numero di singolarità delle due curve in questione.

Quando la Varietà Duale X^\vee è un'ipersuperficie allora il polinomio che la identifica si chiama Discriminante di X e si indica con Δ_X , negli ultimi capitoli incontreremo più volte questo oggetto. Nel capitolo 4 parleremo del rapporto tra X^\vee e $\pi(X)^\vee$ dove π è la proiezione di X su qualche sottospazio. In termini di discriminanti si dimostra che $\Delta_{\pi(X)}$ è un fattore di Δ_X . L'ultimo capitolo tratta invece il caso delle Varietà Determinantalì cioè le varietà di matrici di rango $\leq r$. In questo caso si riesce a descrivere il discriminante, che è l'usuale determinante, e a determinare chi sono le varietà duali.

Nella tesi daremo per buone alcune nozioni di base di Geometria algebrica e sull'utilizzo del software di calcolo simbolico Macaulay2 ([M2]), abbreviato con M2. In particolare si può fare riferimento a [CLO1] e [CLO2].

1 Varietà duale

1.1 Prime definizioni e proprietà

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} di dimensione $n+1$, per semplicità indichiamo con \mathbb{P} il proiettivo di V , $\mathbb{P}^n(V)$. Indichiamo poi con V^* lo spazio duale di V e \mathbb{P}^* il proiettivo di V^* che si dice spazio proiettivo duale di \mathbb{P} . Manteniamo questa notazione per tutto il testo.

Tra gli spazi \mathbb{P} e \mathbb{P}^* esiste una relazione, detta *dualità proiettiva*, che permette di identificare i punti di \mathbb{P}^* con gli iperpiani di \mathbb{P} nel modo seguente: sia $[f] \in \mathbb{P}^*$ a questo corrisponde l'iperpiano $H = \mathbb{P}(\ker(f)) \subset \mathbb{P}$. Viceversa preso un punto $p \in \mathbb{P}$ otteniamo un iperpiano di \mathbb{P}^* prendendo i punti che corrispondono a tutti gli iperpiani di \mathbb{P} che passano per p . In generale se $L = \mathbb{P}(K) \subset \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo si chiama sottospazio duale di L e si indica con L^\vee l'insieme dei punti $[f] \in \mathbb{P}^*$ tali che $K \subseteq \ker(f)$, cioè $\mathbb{P}(K^\perp)$. In accordo con il caso particolare punto-iperpiano vale $\dim(L^\vee) = \text{codim}(L) - 1$, infatti $\dim(K^\perp) = \text{codim}_V(K) = \text{codim}_\mathbb{P}(L)$. Vediamo come questa corrispondenza si estende al caso delle varietà proiettive.

Nel seguito assumiamo che $X \subset \mathbb{P}$ sia una varietà algebrica proiettiva definita dalle equazioni (f_1, \dots, f_r) e indichiamo con $J(f_1, \dots, f_r)$ la matrice jacobiana. Un punto $x_o \in X$ si dice *liscio* se il rango di questa è uguale alla $\text{codim}(X)$ quando valutata in x_o ; chiamiamo X_{sm} l'insieme di questi punti.

Definizione 1.1 (Spazio tangente). *Si definisce spazio tangente a X in $x_o \in X_{sm}$ e si indica con $T_{x_o}X$ l'insieme dei punti $y \in \mathbb{P}$ che soddisfano $J(f_1, \dots, f_r)|_{x_o} \cdot y = 0$.*

Definizione 1.2 (Varietà duale). *Sia X una varietà algebrica proiettiva, diciamo che un iperpiano $H \subset \mathbb{P}$ è tangente a X_{sm} in x_o se $T_{x_o}X \subset H$. Si definisce varietà duale di X e si indica con X^\vee la chiusura di Zariski di $\{H \subset \mathbb{P} \text{ iperpiano} \mid \exists x \in X_{sm} \text{ e } H \text{ tangente a } X \text{ in } x\}$.*

Ricordiamo che data una varietà proiettiva $X \subset \mathbb{P}$ è possibile definire una varietà conica $Y \subset V$ prendendo 0 e tutti i punti che proiettati in \mathbb{P} stanno in X , tale varietà si chiama *cono affine* di X . Analogamente si può definire il cono affine di X^\vee che indicheremo con $Y^\vee \subset V^*$. Ad esempio, usando la notazione precedente, K è il cono affine di $L = \mathbb{P}(K)$ e K^\perp quello di L^\vee .

Definizione 1.3. *Sia $W_X^0 \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}^*$ l'insieme delle coppie (x, H) dove $x \in X_{sm}$ e H è un iperpiano tangente a X in x . Chiamiamo W_X la chiusura di Zariski di questo insieme.*

Proposizione 1.4. *Se X è irriducibile allora X^\vee è irriducibile.*

Dimostrazione. Poiché X è irriducibile anche X_{sm} lo è. Per definizione di W_X si ha $pr_2(W_X) = X^\vee$, inoltre $pr_1 : W_X^0 \rightarrow X_{sm}$ è un fibrato le cui fibre sono spazi proiettivi. Dunque se X_{sm} è irriducibile lo è anche W_X^0 e di conseguenza anche W_X e X^\vee sono irriducibili. \square

Vediamo subito un teorema molto importante che ci limitiamo per ora a enunciare, la dimostrazione sarà argomento del capitolo 3.

Teorema 1.5 (Teorema di Bidualità). *Sia $X \subset \mathbb{P}$ una varietà proiettiva, allora $(X^\vee)^\vee = X$. Inoltre, se z è un punto liscio di X e H è un punto liscio di X^\vee , allora H è tangente a X in z se e solo se z , visto come un iperpiano in \mathbb{P}^* , è tangente a X^\vee in H .*

Definizione 1.6. Sia $X \subset \mathbb{P}$ una varietà algebrica irriducibile, si dice che è rigata da spazi proiettivi di dimensione r se esiste un aperto di Zariski $U \subset X$ che è unione di sottospazi proiettivi r -dimensionali.

Corollario 1.7. Se X^\vee non è un'ipersuperficie, diciamo $\text{codim}(X^\vee) = r + 1$ con $r > 0$, allora X è rigata da spazi proiettivi di dimensione r .

Dimostrazione. Per il teorema di bidualità possiamo dimostrare l'enunciato duale. Sia allora $\text{codim}(X) = r + 1$, $\forall x \in X_{sm}$ l'insieme degli iperpiani tangenti a X in x , cioè gli iperpiani per x che contengono $T_x X$, forma uno spazio proiettivo di dimensione $n - 1 - \dim(T_x X) = n - 1 - \dim(X) = r$. \square

Deduciamo da questo corollario che le varietà duali sono tipicamente ipersuperfici.

1.2 Discriminante

Assumiamo per adesso che $X \subset \mathbb{P}(V^*)$ sia una varietà irriducibile e supponiamo che $X^\vee \subset \mathbb{P}(V)$ sia un'ipersuperficie (X^\vee è irriducibile per la proposizione 1.4).

Definizione 1.8. Nelle ipotesi precedenti si chiama discriminante di X e si indica con Δ_X il polinomio su V che definisce la varietà duale, cioè $X^\vee = \{\Delta_X = 0\}$.

Quando X^\vee non è un'ipersuperficie si pone, per convenzione, $\Delta_X = 1$.

Vediamo una definizione equivalente. Sia $Y \subset V^*$ il cono affine su X , interpretiamo i punti di V come funzionali lineari $f : V^* \rightarrow \mathbb{C}$, si ha che $f \in X^\vee$ se $f|_Y$ ha un punto critico p , cioè f si annulla in p insieme a tutte le derivate prime $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (segue dalla condizione di tangenza a X). Δ_X è un polinomio irriducibile che si annulla su tali f .

Proposizione 1.9. Nelle stesse ipotesi precedenti, assumiamo che X sia liscia e prendiamo (z_0, \dots, z_n) coordinate omogenee su \mathbb{P} , (a_0, \dots, a_n) su \mathbb{P}^* . Sia f un punto liscio di X^\vee . L'iperpiano di V^* definito da $\{f = 0\}$ è tangente a X in un unico punto z definito da $(\frac{\partial \Delta_X}{\partial a_0}(f), \dots, \frac{\partial \Delta_X}{\partial a_n}(f))$.

Dimostrazione. Chiamiamo $H = \{f = 0\} \subset \mathbb{P}$ l'iperpiano che corrisponde a f . Segue dal teorema di bidualità 1.5 che H è tangente a X in z se e solo se l'iperpiano di \mathbb{P}^* corrispondente a z è tangente a X^\vee in f . Poiché f è un punto liscio per ipotesi e Δ_X è il polinomio che definisce X^\vee , tale iperpiano visto come punto di \mathbb{P} è proprio $(\frac{\partial \Delta_X}{\partial a_0}(f), \dots, \frac{\partial \Delta_X}{\partial a_n}(f))$. \square

2 Il caso delle curve piane

2.1 La curva duale

Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ una curva irriducibile, che non sia una retta, definita dal polinomio omogeneo $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ dove si è scelto x_0, x_1, x_2 coordinate omogenee su \mathbb{P}^2 . Dalla proposizione 1.4 e dal corollario 1.7 segue che la duale $X^\vee \subset (\mathbb{P}^2)^*$ è ancora una curva irriducibile. Dunque se prendiamo u_0, u_1, u_2 coordinate omogenee su $(\mathbb{P}^2)^*$ la duale sarà data da un'equazione del tipo $G(u_0, u_1, u_2) = 0$ con G polinomio irriducibile di grado ≥ 2 .

Esempio 2.1. Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ una conica liscia definita dalla matrice 3×3 e non singolare $A = (a_{ij})$, cioè di equazione

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_i x_j = 0$$

La retta tangente alla conica in $x' \in X$ è data dall'equazione $(Ax', x) = 0$ e il punto di $(\mathbb{P}^2)^*$ che corrisponde a questa è $u' = Ax'$. Dunque in questo caso è facile vedere che l'equazione di X^\vee è $(A^{-1}u, u) = 0$, cioè la duale è la conica definita dalla matrice A^{-1} .

Al contrario di quanto succede nell'esempio 2.1, in generale non è facile trovare l'equazione che definisce $X^\vee \subset (\mathbb{P}^2)^*$, useremo allo scopo la teoria dell'eliminazione. Supponiamo però di avere una parametrizzazione di X , in questo caso si riesce facilmente a trovarne una per la duale. Lavoriamo nello spazio affine $\mathbb{C}^2 = \{x_2 = 1\}$, una generica retta qui ha la forma $px_0 + qx_1 = 1$ con p, q coefficienti. Assumiamo che la parametrizzazione locale di X sia data da $x_0 = x(t), x_1 = y(t)$. Lo spazio duale $(\mathbb{C}^2)^*$ si ottiene ponendo $u_2 = -1$. Una parametrizzazione della curva duale è data da $u_0 = p(t), u_1 = q(t)$ dove $p(t)x_0 + q(t)x_1 = 1$ è l'equazione della retta tangente a X in $(x(t), y(t))$, cioè $y'(t)(x_0 - x(t)) - x'(t)(x_1 - y(t)) = 0$. Allora è facile vedere che

$$p(t) = \frac{y'(t)}{y'(t)x(t) - x'(t)y(t)} \quad q(t) = \frac{-x'(t)}{y'(t)x(t) - x'(t)y(t)} \quad (2.1)$$

Verifichiamo il teorema di bidualità usando queste formule per trovare la curva duale di $u_0 = p(t), u_1 = q(t)$. Indicando con $u(t), v(t)$ la parametrizzazione si ha

$$u(t) = \frac{q'}{q'p - p'q} \quad v(t) = \frac{-p'}{q'p - p'q}$$

dove si è omissa la dipendenza dal parametro t . Sostituendo $p(t), q(t)$ con le equazioni in (2.1) e calcolando le derivate si ottiene

$$u(t) = \frac{x(x'y'' - x''y')}{\frac{y'}{y'x - x'y}x(x'y'' - x''y') + \frac{x'}{y'x - x'y}y(x''y' - x'y'')} = \frac{x(y'x - x'y)}{y'x - x'y} = x(t)$$

Procedendo allo stesso modo si trova $v(t) = y(t)$ e questo conclude la verifica della bidualità.

Esempio 2.2. Consideriamo il caso in cui la curva $X \subset \mathbb{P}^2$ sia data dall'equazione $x_0^a + x_1^a = 1$ con $a \geq 2$ fissato, una parametrizzazione di questa è $x(t) = t, y(t) = \sqrt[a]{1 - t^a}$. Usando le formule in 2.1 e svolgendo i conti si ottiene la parametrizzazione della curva duale:

$$p(t) = t^{a-1} \quad q(t) = (1 - t^a)^{\frac{a-1}{a}}$$

E' facile vedere che $\forall t$ è soddisfatta $u_0^b + u_1^b = 1$ con $b = \frac{a}{a-1}$ e dunque l'equazione della duale è analoga a quella di partenza ma con esponente diverso. Osserviamo inoltre che vale $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ da cui segue la bidualità.

2.2 Implementazione su M2

Manteniamo la notazione del paragrafo precedente. Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ una curva definita dal polinomio omogeneo $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. La retta tangente a X in $x \in X_{sm}$ è data da $F_x(x)x_0 + F_y(x)x_1 + F_z(x)x_2 = 0$ e il punto di $(\mathbb{P}^2)^*$ che corrisponde a questa è $(F_{x_0}(x), F_{x_1}(x), F_{x_2}(x))$ e dunque è un punto della curva duale. Sebbene questo non è di aiuto immediato per trovare esplicitamente X^\vee possiamo sfruttarlo per implementare un codice su M2 che ci permette di ottenere l'equazione cercata.

Lavoriamo in $\mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, u_0, u_1, u_2]$, le prime tre coordinate saranno quelle di \mathbb{P}^2 mentre le ultime le usiamo per lo spazio duale. In input si ha l'equazione di una curva piana $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Come abbiamo già visto un punto della duale si ottiene calcolando il gradiente di F in un punto che sta sulla curva. Sia $I = (F(x_0, x_1, x_2), u_i - F_{x_i}(x_0, x_1, x_2) \quad i = 0, 1, 2)$ l'ideale generato da queste condizioni; nel caso in cui la curva di partenza è liscia l'equazione finale si ottiene eliminando x_0, x_1, x_2 da I , se invece presenta delle singularità dobbiamo prima saturare I con l'ideale corrispondente a questi punti poiché nella definizione compaiono solo i punti lisci.

Esempio 2.3. *Riportiamo qui sotto il codice che si usa per calcolare la duale di una conica liscia e verifichiamo anche quanto è stato fatto nell'esempio 2.1. La conica di partenza è quella definita dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

```
R=QQ[x_0..x_2,u_0..u_2]
A=matrix{{0,1/2,1/2},{1/2,4,1/2},{1/2,1/2,0}}
xx=matrix{{x_0,x_1,x_2}}
F=transpose(xx)*A*xx --è il polinomio che definisce X
codim ideal diff(xx,F) --viene 3, X non è singolare
uu=matrix{{u_0,u_1,u_2}}
I=eliminate({x_0,x_1,x_2},ideal(diff(xx,F)-uu)+ideal(F))
G=(gens I)_(0,0) --è l'equazione che definisce la conica duale
codim ideal diff(uu,G) --viene 3, anche la duale non è singolare
f=eliminate({u_0,u_1,u_2},ideal(diff(uu,G)-xx)+ideal G)
f==F --viene true, questo verifica il teorema di bidualità
B=diff(uu,diff(transpose uu, G)) --matrice associata alla conica G
B*A --viene un multiplo della matrice identità
```

Il codice sopra verifica il teorema di bidualità e il fatto che la matrice associata alla conica duale è l'inversa di A (il prodotto viene un multiplo dell'identità ma non è un problema visto che una conica è definita a meno di multipli da una matrice 3×3).

Esempio 2.4. *Svolgiamo un esercizio analogo al 2.3 ma prendiamo una conica di partenza singolare, quella definita dalla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 6 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Il codice è uguale a quello dell'esercizio precedente eccetto per il fatto che quando si calcola l'ideale I occorre saturare per i punti singolari di X , cioè

```
I=eliminate({x_0,x_1,x_2},saturate(ideal(uu-diff(xx,F)+
ideal(F),ideal diff(xx,F))
```

Come curva duale otteniamo due punti $(1/2, 1, -1/2)$ e $(1/3, 1, 2/3)$ che corrispondono alle due rette che danno la conica di partenza, infatti preso un punto non singolare sulla conica l'unico iperpiano tangente alla conica in quel punto è la retta stessa a cui appartiene.

Esempio 2.5. Usiamo M2 per trovare la curva duale di $x_0^2x_2 - x_1^3 = 0$.

```
R=QQ[x_0..x_2,u_0..u_2]
F=x_0^2*x_2-x_1^3
xx=matrix{{x_0,x_1,x_2}}
ideal diff(xx,F) --la conica ha come unico punto singolare
--(0,0,1)
uu=matrix{{u_0,u_1,u_2}}
I=eliminate({x_0,x_1,x_2},saturate(ideal(uu-diff(xx,F)+
ideal(F),ideal diff(xx,F)) --occorre saturare perchè la
--curva di partenza è singolare
G=(gens I)_(0,0)
ideal diff(uu,G) --(0,0,1) è l'unico punto singolare
--della duale
```

Osserviamo che il punto $(0,0,1)$ è un punto singolare di X^\vee e proviene dal punto $(1,0,0)$ che invece è un punto liscio di X , in particolare un flesso. Mettiamoci nei piani affini corrispondenti per capire cosa succede, cioè $\{x_0 = 1\}$ e $\{u_2 = 1\}$, di seguito le rispettive immagini.

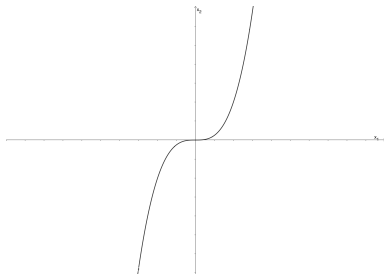


Figura 1: Curva X

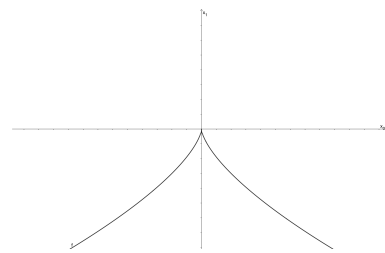


Figura 2: Curva X^\vee

Nel primo caso si trova la curva $x_2 - x_1^3 = 0$, l'origine è un flesso ordinario di questa, cioè un punto liscio la cui retta tangente ha ordine di intersezione esattamente 3 con X . La duale nel piano affine ha equazione $4u_1^3 + 27u_0^2 = 0$ e l'origine è una cuspidale semplice, cioè un punto del secondo ordine con un'unica retta tangente.

Se avessimo preso come curva $x_2 = x_1^k$ con $k > 3$ avremmo trovato un flesso di ordine $k - 1$ e una cuspidale non semplice nella duale.

Esempio 2.6. Vediamo cosa succede per la curva $x_1^2x_2^2 = x_0^2(x_0 - x_2)^2$. Studiando il sistema delle derivate parziali si trovano tre punti singolari $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$;

per vedere di che tipo di singolarità si tratta ci basta vedere come è fatta la matrice hessiana in questi punti, i primi due sono nodi semplici con rette tangenti $x \pm y = 0$ e $x \pm y - z = 0$ rispettivamente, mentre il punto $(0,1,0)$ è una cuspidine non semplice. Riportiamo di seguito il grafico della curva nei piani affini $\{x_2 = 1\}$ (C) e $\{x_1 = 1\}$ (D) dove si vedono queste singolarità.

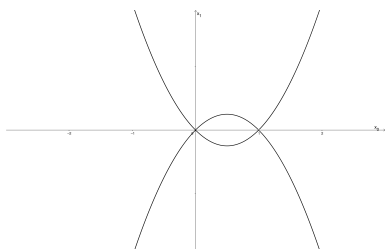


Figura 3: Curva C

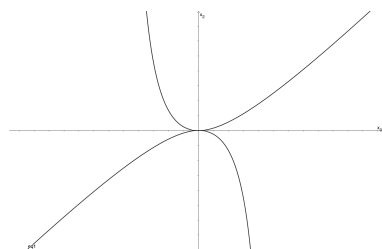


Figura 4: Curva D

Calcolando l'equazione della curva duale con $M2$ si ottiene $u_0^4 - 2u_0^2u_1^2 + u_1^4 - 16u_0u_1^2u_2 - 16u_1^2u_2^2 = 0$, cerchiamo di capire cosa succede alle singolarità della curva di partenza. Al punto $(0,0,1)$ corrispondono due punti della duale dati dai coefficienti delle due rette tangenti, cioè $(1,1,0)$ e $(1,-1,0)$. Quando calcoliamo le rette tangenti alla duale in questi punti ci si accorge che tali rette coincidono: $u_2 = 0$. La stessa cosa succede per il punto $(1,0,1)$ a cui corrispondono i punti $(1,1,-1)$ e $(1,-1,-1)$ e la retta tangente è $u_0 + u_2 = 0$. Infine per quanto riguarda la cuspidine questa corrisponde al punto $(0,0,1)$ che è ancora una cuspidine. I seguenti grafici mostrano nell'affine i punti della duale di cui si è discusso.

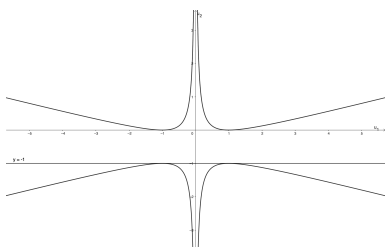


Figura 5: Curva C^\vee

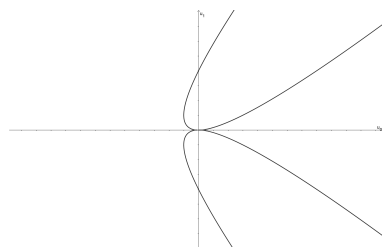


Figura 6: Curva D^\vee

2.3 Formule di Plücker

Indichiamo con X una curva liscia. Come si è visto nell'esempio 2.5 è possibile che partendo da una curva liscia si ottenga una curva duale con singolarità, in realtà succede spesso perché punti lisci di X possono essere fonte di singolarità per X^\vee . Infatti, facendo riferimento allo stesso esempio, abbiamo visto che a punti di flesso corrispondono cuspidine; invece rette tangenti a X in più punti distinti, danno origine a nodi, cioè punti singolari con più rette tangenti (si veda esempio 2.6). In particolare si osserva che a flessi ordinari corrispondono cuspidine semplici e a bitangenti semplici corrispondono nodi ordinari, cioè punti del secondo ordine con due rette tangenti. Il numero e il tipo di singolarità di X^\vee sono dati dalle formule di Plücker.

Teorema 2.7. *Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ una curva liscia di grado d , allora X^\vee ha grado $d(d-1)$. Inoltre la duale ha $3d(d-2)$ cuspidi e $\frac{1}{2}d(d-2)(d^2-9)$ nodi. Analogamente una generica curva piana liscia di grado d ha $3d(d-2)$ flessi e $\frac{1}{2}d(d-2)(d^2-9)$ bitangenti.*

Vedremo la dimostrazione di questo teorema come conseguenza delle formule generali. Notiamo intanto che questo enunciato non ci permette di sfruttare la stessa formula su X^\vee per il semplice fatto che la curva ottenuta non è liscia, infatti, pensando al grado, non sarebbe soddisfatto il teorema di Bidualità. Dunque l'ipotesi di liscenza è essenziale. Le formule generali risolvono questo problema poiché ammettono una curva di partenza con singolarità.

Teorema 2.8 (Formule di Plücker). *Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ una curva irriducibile di grado d e genere g con singolarità ordinarie, in particolare k cuspidi e v nodi; supponiamo che anche X^\vee abbia singolarità ordinarie. Indichiamo con d^\vee, k^\vee, v^\vee il grado, il numero di cuspidi e il numero di nodi di X^\vee . Allora valgono le seguenti formule*

$$d^\vee = d(d-1) - 3k - 2v \quad g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - v - k \quad (2.2)$$

$$d = d^\vee(d^\vee - 1) - 3k^\vee - 2v^\vee \quad g = \frac{(d^\vee - 1)(d^\vee - 2)}{2} - v^\vee - k^\vee \quad (2.3)$$

Osservazione: una curva X e la sua duale X^\vee hanno stesso genere. Consideriamo l'applicazione $X \rightarrow X^\vee$ che manda un punto $p \in X$ nella retta tangente in p a X . Se X non è una retta tale mappa è ben definita eccetto che in un numero finito di punti (i nodi), inoltre segue dal teorema di bidualità 1.5 che l'inversa può essere definita allo stesso modo e dunque anche in questo caso i punti in cui si hanno problemi sono in numero finito. Segue che X e X^\vee sono birazionalmente equivalenti e dunque hanno stesso genere essendo questo un invariante birazionale.

Dimostrazione. Ci basterà dimostrare la validità delle formule in (2.2), le altre seguono dal teorema di bidualità.

Per quanto riguarda il grado d^\vee dobbiamo calcolare il numero di intersezioni della curva X^\vee con una generica retta di $(\mathbb{P}^2)^*$, analogamente possiamo prendere un generico punto p di \mathbb{P}^2 e contare il numero di punti di X le cui rette tangenti passano per p . Indichiamo con $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ l'equazione che definisce la curva e prendiamo $p = (0, 0, 1)$. Preso $q \in X$ la retta tangente ha equazione $\nabla F(q) \cdot (x - q) = 0$, imponendo che passi per p e usando la formula di Eulero per polinomi omogenei si trova

$$0 = F_{x_0}(q)q_0 + F_{x_1}(q)q_1 + F_{x_2}(q)(q_2 - 1) = -F_{x_2}(q)q_2 + F_{x_2}(q)(q_2 - 1) = F_{x_2}(q)$$

Dunque i punti cercati devono soddisfare $\{F = 0\}$ e $\{F_{x_2} = 0\}$. Osserviamo che sia cuspidi che nodi di X soddisfano queste equazioni mentre noi dobbiamo contare i punti lisci. Poiché queste due curve si incontrano con molteplicità 3 nelle cuspidi e 2 nei nodi, usando il Teorema di Bezout si trova $d^\vee = d(d-1) - 3k - 2v$.

Daremo solo un accenno della dimostrazione per la formula del genere, i dettagli possono essere trovati al capitolo 2, sezione 4 di [GH]. Consideriamo la mappa proiezione $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ da un punto p , questo è un rivestimento di grado d della curva X . Indichiamo con b il numero dei punti di ramificazione di π , questi soddisfano $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$ e dunque procedendo come sopra si ha $b = d(d-1) - 3k - 2v + k$ dove si è aggiunto

k perché ogni cuspidè è un punto di ramificazione. Si usa poi $2 - 2g = 2d - b$ (segue dalla caratteristica di Eulero Poincarè e dalle proprietà dei rivestimenti) e si trova la formula per g . □

Osservazione: Se conosciamo i punti singolari della varietà X queste formule ci permettono di trovare k^\vee e v^\vee . Ci basterà ricavare d^\vee dalla (2.2) e sostituire in (2.3), uguagliando poi le formule per g si ottengono due equazioni in due incognite. Vediamo queste formule nel caso particolare del teorema 2.7, quelle generali richiedono più conti.

Dimostrazione. (teorema 2.7) Poiché X è liscia possiamo riscrivere le formule (2.2) nel modo seguente:

$$d^\vee = d(d-1) \quad g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Sostituiamo d^\vee in (2.3) e otteniamo

$$d = d^4 - 2d^3 + d - 3k^\vee - 2v^\vee \quad g = \frac{(d^2 - d - 1)(d^2 - d - 2)}{2} - k^\vee - v^\vee$$

Dalla prima si trova $3k^\vee = d^4 - 2d^3 - 2v^\vee$ (1). Uguagliando le due formule per g

$$k^\vee + v^\vee = \frac{(d^2 - d - 1)(d^2 - d - 2) - (d-1)(d-2)}{2} = \frac{d^4 - 2d^3 - 3d^2 + 6d}{2} \quad (2)$$

Ricaviamo da questa v^\vee e sostituiamo in (1)

$$3k^\vee = d^4 - 2d^3 + 2k^\vee - 6d + 3d^2 + 2d^3 - d^4 = 2k^\vee + 3d(d-2)$$

da cui $k^\vee = 3d(d-2)$. Infine sostituendo in (2) questo ultimo risultato si trova $v^\vee = \frac{d}{2}(d-2)(d^2-9)$. □

2.4 La formula di E. Schläfli per le cubiche piane e lisce

Sia $X \subset \mathbb{P}^2$ una cubica liscia definita dal polinomio $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, indichiamo con H_F la matrice hessiana di F . Prendiamo come coordinate omogenee su $(\mathbb{P}^2)^*$ p_0, p_1, p_2 , dalle formule di Plücker segue che X^\vee ha grado 6, sia $G(p_0, p_1, p_2) = 0$ l'equazione di questa. Chiamiamo poi

$$V(p, x) = \det \begin{bmatrix} 0 & p_0 & p_1 & p_2 \\ p_0 & & & \\ p_1 & & H_F(x) & \\ p_2 & & & \end{bmatrix}$$

Teorema 2.9. (Formula di Schläfli) Nella notazione precedente, l'equazione che definisce X^\vee è, a meno di una costante,

$$G(p_0, p_1, p_2) = \det \begin{bmatrix} 0 & p_0 & p_1 & p_2 \\ p_0 & & & \\ p_1 & & H_V(p) & \\ p_2 & & & \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

dove con H_V si indica la matrice hessiana di $V(p, x)$ rispetto x_0, x_1, x_2 .

Indichiamo con $g(p_0, p_1, p_2)$ il determinante in 2.4 e osserviamo che è un polinomio di grado 6 poiché ogni coefficiente di $H_V(p)$ è di grado 2 in p . Per dimostrare il teorema ci basta far vedere che g non è identicamente nullo e si annulla sui punti di X^\vee .

Indichiamo con A il tensore associato alla cubica X , cioè $A_{ijk} = F_{ijk}$, e sempre con A indichiamo la forma trilineare associata a questa matrice $A(x, y, z) = \sum_{i,j,k} F_{ijk} x_i y_j z_k$. Un punto $x \in X$ se e solo se $A(x, x, x) = 0$. $\forall x \in \mathbb{P}^2$ sia $K_x = \{x' \in \mathbb{P}^2 \text{ t.c. } A(x, x', x') = 0\} = \{x' \in \mathbb{P}^2 \text{ t.c. } \sum_{ij} F_{ij}(x) x'_i x'_j = 0\}$ la prima polare di X in x (la seconda uguaglianza segue applicando la formula di Eulero per polinomi omogenei). Infine se $p = (p_0, p_1, p_2) \in (\mathbb{P}^2)^*$ chiamiamo $l_p = \sum_{i=0}^2 p_i x_i \subset \mathbb{P}^2$ la retta duale.

Lemma 2.10. • $V(p, x) = 0 \iff l_p$ è tangente a K_X

- Fissato p , $C_p(x) = V(p, x)$ è ancora una conica e vale: $g(p) = 0 \iff l_p$ è tangente a C_p

Lemma 2.11. Sia $p \in \mathbb{P}^*$ e supponiamo che l_p sia tangente a X in x non di flesso, allora C_p contiene x ed è tangente a X in x .

Per le dimostrazioni si rimanda al capitolo 1 sezione 2D [GKZ]. Il secondo di questi lemmi con la seconda parte del primo provano che g si annulla sui punti di X^\vee .

Ci resta da far vedere che g non è identicamente nullo. Poiché ogni cubica piana non singolare è proiettivamente equivalente ad una cubica della forma $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3cx_0x_1x_2 = 0 \exists c \in \mathbb{C}$ (si veda [AD]) ci basterà dimostrare che g non è identicamente nullo per queste cubiche. Riportiamo di seguito il codice di M2 che calcola $g(p_0, p_1, p_2)$ al variare di $c \in \mathbb{C}$.

```
R=QQ[x_0..x_2,p_0..p_2,c]
f=x_0^3+x_1^3+x_2^3+3*x_1*x_2*x_0*c
xx=matrix{{x_0,x_1,x_2}}
Hf=diff(xx,diff(transpose xx,f)) --hessiana di f
V=matrix{{0,p_0,p_1,p_2}}|(matrix{{p_0},{p_1},{p_2}}|Hf)
HV=diff(xx,diff(transpose xx,det (V))) --hessiana di V
g=matrix{{0,p_0,p_1,p_2}}|(matrix{{p_0},{p_1},{p_2}}|HV)
det g --rende il polinomio g(p_0,p_1,p_2), dipende da c
for i from 0 to 4 do print (i,factor sub(contract(c^i,det g),c=>0))
--per visualizzare i coefficienti relativi a c^i
```

Facendo girare il codice si ottiene:

$$\begin{aligned}
g(p_0, p_1, p_2) = & (1296)(2(p_0^6 + p_1^6 + p_2^6) - (p_0^3 + p_1^3 + p_2^3)^2) + \\
& - 15(p_0 p_1 p_2)^2 c + \\
& - 6(p_0 p_1 p_2)(p_0^3 + p_1^3 + p_2^3) c^2 + \\
& - 2[(p_0^3 + p_1^3 + p_2^3)^2 - (p_0^6 + p_1^6 + p_2^6)] c^3 + \\
& - 3(p_2 p_1 p_0)^2 c^4
\end{aligned}$$

Adesso è facile vedere che $\forall c \in \mathbb{C}$ tale polinomio non è identicamente nullo. Ad esempio si può osservare che il monomio $p_0^4 p_1 p_2$ ha come coefficiente $-6c^2$, per avere un polinomio identicamente nullo dovrei avere $c = 0$ ma sostituendo si vede che non è così. Questo conclude la dimostrazione del teorema 2.9.

3 Teorema di Bidualità

In questo capitolo dimostriamo il teorema 1.5, ci arriveremo per passi, vediamo prima come può essere riformulato e altre premesse utili. Seguiamo la dimostrazione del [GKZ].

3.1 Riformulazione della tesi

Notazione: Sia M una varietà algebrica liscia e TM il fibrato tangente di M . Se $Z \subset X$ è una sottovarietà algebrica liscia e TZ il fibrato tangente di Z , allora TZ è un sottofibrato di $TM|_Z$ e il quoziente di tali fibrati si chiama fibrato normale di Z in M , $T_Z M$. Indichiamo con T^*M il fibrato cotangente di M (cioè il fibrato duale di TM) e T_Z^*M il fibrato conormale di Z in M (cioè il fibrato duale di $T_Z M$). Per chiarimenti si veda capitolo 6, §1.2 di [S].

Con riferimento alla definizione 1.3 ricordiamo che

1. $pr_2(W_X) = X^\vee$
2. $pr_1 : W_X^0 \rightarrow X_{sm}$ è un fibrato proiettivo. In particolare preso $x \in X_{sm}$ scegliere un iperpiano H tangente a X in x equivale a scegliere un iperpiano di \mathbb{P} passante per x che contiene lo spazio tangente a X in x , cioè $T_x X \subset H \subset T_x \mathbb{P}$. Allora $H \subset \frac{T_x \mathbb{P}}{T_x X}$ e (x, H) è un covettore dello spazio conormale $(T_{X_{sm}}^* \mathbb{P})_x$. Questa fibrazione ci permette dunque di identificare W_X^0 con $P(T_{X_{sm}}^* \mathbb{P})$.

Per 1 possiamo riformulare il teorema di bidualità dicendo che

$$W_X = W_{X^\vee} \tag{3.1}$$

Definizione 3.1. Sia $X \subset \mathbb{P}$ una varietà proiettiva e $Y \subset V$ il suo cono affine. Indichiamo con $Con(Y)$ la chiusura del fibrato conormale $T_{Y_{sm}}^* V$ nel fibrato cotangente T^*V .

Siano Y e Y^\vee i coni affini rispettivamente di X e X^\vee , dal punto 2 segue che la tesi può essere riformulata in termini di spazi vettoriali affermando che

$$Con(Y) = Con(Y^\vee) \tag{3.2}$$

3.2 Varietà Lagrangiane

Definizione 3.2 (Varietà simplettica). Una varietà simplettica è una coppia (S, w) tale che S è una varietà algebrica e $w : TS \times TS \rightarrow \mathbb{C}$ una 2-forma che gode delle seguenti proprietà:

- $dw = 0$ (w è chiusa)
- $\forall p \in S$ w definisce un prodotto antisimmetrico non-degenere su $T_p S$. Analogamente: $\forall Y \in T_p S$ $w(X, Y) = 0 \Rightarrow X = 0$

Osservazione: L'ultimo punto della definizione è equivalente ad affermare che $\forall p \in S$ la coppia $(T_p S, w|_{T_p S \times T_p S})$ è uno spazio vettoriale simplettico.

Definizione 3.3 (Sottovarietà lagrangiana). *Una sottovarietà irriducibile Λ di S si dice Lagrangiana se $\dim(\Lambda) = \dim(S)/2$ e $\forall p \in \Lambda_{sm}$ $T_p\Lambda$ è un sottospazio lagrangiano di T_pS , cioè w si annulla quando ristretta a questo spazio.*

Sia M una varietà algebrica liscia di dimensione m allora il fibrato cotangente T^*M gode di una naturale forma simplettica che può essere definita come segue: indichiamo con $(x_1, \dots, x_m, \xi_1, \dots, \xi_m)$ un punto del fibrato cotangente tale che le prime m coordinate sono parametri locali su M e le ξ_i rappresentano le coordinate di un funzionale del duale di T_pM rispetto alla base duale di $\{\frac{\partial}{\partial x_i} | i \in (1, \dots, m)\}$ che indicheremo con $\{d_{x_i} | i \in (1, \dots, m)\}$, allora si ha

$$w = \sum_{i=1}^m dx_i \wedge d\xi_i \quad (3.3)$$

dove $\{dx_i, i = 1, \dots, m\} \cup \{d\xi_i, i = 1, \dots, m\}$ danno la base di $T_{(p,\xi)}^*(T^*M) \forall p \in M$ e $\xi \in T_p^*M$.

Osservazione: Ogni forma antisimmetrica e non-degenere può essere rappresentata tramite una matrice antisimmetrica e non singolare di dimensione $2m \times 2m$. Se indichiamo con $\{x_i, \xi_i, i = 1, \dots, m\}$ i vettori della base canonica di $T_{(p,\xi)}^*T^*M$ si ha $w(x_i, x_j) = w(\xi_i, \xi_j) = 0$ e $w(x_i, \xi_j) = \delta_{ij}$. Dunque nel nostro caso la matrice che rappresenta w è $\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ dove con I si indica la matrice identità $m \times m$.

Lemma 3.4. *La forma w definita è invariante per cambiamenti di coordinate.*

Dimostrazione. Ricordiamo che se A , matrice $m \times m$, rappresenta un cambio di base per uno spazio vettoriale V di dimensione m allora $(A^T)^{-1}$ è la matrice che rappresenta il rispettivo cambio di base su V^* (si intende tra le basi duali). Calcoliamo dunque w dopo aver effettuato un cambio di coordinate:

$$\begin{aligned} w(Ax, (A^T)^{-1}\xi) &= (Ax \ (A^T)^{-1}\xi) \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Ax \\ (A^T)^{-1}\xi \end{pmatrix} = \\ &= (x^T \ \xi^T) \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^T)^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \\ &= (x^T \ \xi^T) \begin{bmatrix} 0 & A^T(A^T)^{-1} \\ -AA^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = w(x, \xi) \end{aligned}$$

□

Diamo adesso un importante esempio di sottovarietà lagrangiana di T^*M . Sia $Z \subset M$ una sottovarietà irriducibile, al solito indichiamo con Z_{sm} la parte liscia di Z , allora $Con(Z)$ definito in 3.1 è una sottovarietà lagrangiana di T^*M . Senza perdita di generalità possiamo assumere che x_1, \dots, x_r siano coordinate locali su Z , allora la base dello spazio conormale a Z si riduce a $\{dx_i | i \in (r+1, \dots, m)\}$ da cui deduciamo subito $\dim(Con(Z)) = m$. Inoltre $x_{r+1} = \dots = x_m = 0$ e $\xi_1 = \dots = \xi_r = 0$ su $Con(Z)$ e dunque è facile vedere che w si annulla sui punti di $T_pCon(Z) \forall p \in Con(Z)$. Osserviamo inoltre che $Con(Z)$ è conica, cioè invariante per dilatazioni delle fibre. Il risultato opposto è fondamentale per la dimostrazione del teorema.

Proposizione 3.5. *Sia $\Lambda \subset T^*M$ una sottovarietà conica e lagrangiana rispetto a w allora $\Lambda = \text{Con}(Z)$ dove $Z = pr_1(\Lambda) \subset M$.*

Dimostrazione. Osserviamo subito che Z è irriducibile poiché proiezione di una varietà irriducibile, inoltre $\dim(\text{Con}(Z)) = \dim(\Lambda) = \dim(M)$ per quanto osservato sopra. Allora per dimostrare l'uguaglianza sarà sufficiente mostrare che vale una delle due inclusioni, facciamo vedere che $\Lambda \subset \text{Con}(Z)$.

Prendiamo un punto $z \in Z_{sm}$ e facciamo vedere che $pr_1^{-1}(z) \cap \Lambda \subset (T_Z^*M)_z$. Un punto in questa retroimmagine è del tipo (z, ξ) dove la seconda parte rappresenta un funzionale $: T_z M \rightarrow \mathbb{C}$; per mostrare che $\xi \in (T_z Z)^\perp$ dobbiamo far vedere che si annulla su $T_z Z$, cioè $\xi(v) = 0 \quad \forall v \in T_z Z$.

Possiamo pensare $(z, \xi) \in T_{(z,0)}\Lambda$ dove $(z, 0)$ è il vettore che ha le ultime m componenti tutte nulle: Λ contiene $(z, k\xi) \quad \forall k \in \mathbb{C}$ poiché conica, questi punti formano un sottospazio lineare contenuto in Λ . In particolare $(z, 0) \in \Lambda$ e $T_{(z,0)}\Lambda$ contiene tutto questo sottospazio lineare, da cui segue $(z, \xi) \in T_{(z,0)}\Lambda$.

Consideriamo ora l'immersione di M in T^*M come sezione nulla e restringiamola a Z . Questa induce un'immersione tra i tangenti rispettivamente di z e $(z, 0)$, cioè $T_z Z \rightarrow T_{(z,0)}(Z, 0) \subset T_{(z,0)}\Lambda$ (dove l'inclusione segue dalla definizione di Z e dal fatto che Λ è conica), questa mappa porta $v \in T_z Z$ in $(v, 0)$ che dunque $\in T_{(z,0)}\Lambda$.

Essendo Λ lagrangiana rispetto a w si ha $w|_{T_{(z,0)}\Lambda \times T_{(z,0)}\Lambda}$ si annulla:

$$0 = w((z, \xi), (v, 0)) = \begin{pmatrix} z & \xi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = -\xi(v)$$

Abbiamo allora provato che $pr_1^{-1}(z) \cap \Lambda \subset (T_Z^*M)_z \quad \forall z \in Z_{sm}$. Prendendo la chiusura di Zariski e ricordando che $\text{Con}(Z)$ è la chiusura del fibrato conormale di Z , si ottiene $\Lambda \subset \text{Con}(Z)$ che è quello che volevamo. \square

3.3 Dimostrazione del Teorema

Dimostrazione. Riprendiamo dal paragrafo 2.1 e dimostriamo $\text{Con}(Y) = \text{Con}(Y^\vee)$. Ora $Y \subset V$ e dunque prendendo $M = V$ dal paragrafo precedente si ha che $\text{Con}(Y) \subset T^*V$ è lagrangiana. Identifichiamo $T^*V = V \times V^* = T^*V^*$ e osserviamo che se x_0, \dots, x_n sono coordinate su V e ξ_0, \dots, ξ_n su V^* allora $\sum_{i=0}^n dx_i \wedge d\xi_i$ è la forma su T^*V mentre $\sum_{i=0}^n d\xi_i \wedge dx_i$ quella su T^*V^* . Segue che $\text{Con}(Y) \subset T^*V^*$ è ancora lagrangiana. Inoltre poiché $Y \subset V$ è il cono affine di X , è invariante per dilatazioni di V e dunque $\text{Con}(Y)$ è invariante per dilatazioni delle fibre di $T^*V^* \rightarrow V^*$. Possiamo applicare la proposizione precedente a $\text{Con}(Y) \subset T^*V^*$ sottovarietà lagrangiana e conica e otteniamo $\text{Con}(Y) = \text{Con}(Z)$ dove $Z = pr_2(\text{Con}(Y)) \subset V^*$. Ricordando $pr_2(\text{Con}(Y)) = Y^\vee$ si ha la tesi. \square

Ripensiamo adesso alla varietà $W_X \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}^*$, abbiamo dimostrato che vale la (3.1) dunque come pr_1 anche $pr_2 : W_X^0 \rightarrow (X^\vee)_{sm}$ è un fibrato proiettivo.

Proposizione 3.6. • *se X è liscia allora W_X è liscia.*

- *se X^\vee è un'ipersuperficie allora $pr_2 : W_X \rightarrow X^\vee$ è un isomorfismo birazionale.*

Dimostrazione. La prima parte segue dal fatto che pr_1 è un fibrato proiettivo su $X_{sm} = X$. Se X^\vee è un'ipersuperficie allora $\dim(W_X) = \dim(X^\vee) = n - 1$ e le fibre di pr_2 hanno dimensione zero e sono lineari, cioè sono punti. \square

Nel caso in cui X sia liscia e X^\vee un'ipersuperficie, W_X fornisce una risoluzione per le singolarità di X^\vee .

4 Varietà duali e proiezioni

Al solito sia \mathbb{P} uno spazio proiettivo di dimensione n , prendiamo $L \subset \mathbb{P}$ un sottospazio proiettivo tale che $\dim(L) = k < n$ e consideriamo la proiezione $\pi_L : (\mathbb{P} - L) \rightarrow \mathbb{P}/L$. Il quoziente \mathbb{P}/L ha dimensione $n - k - 1$, lo pensiamo in \mathbb{P} come un sottospazio H della stessa dimensione che abbia intersezione vuota con L . Preso un punto $p \in (\mathbb{P} - L)$ indichiamo con $\langle L, p \rangle$ il sottospazio generato da L e da p che avrà dimensione $k + 1$; la mappa proiezione manda il punto p in $H \cap \langle L, p \rangle$. Tale intersezione consiste in un punto, infatti

$$\begin{aligned} \dim(H \cap \langle L, p \rangle) &= \dim(H) + \dim(\langle L, p \rangle) - \dim(H + \langle L, p \rangle) = \\ &= n - k - 1 + k + 1 - n = 0 \end{aligned}$$

Lo spazio duale di \mathbb{P}/L , $(\mathbb{P}/L)^*$, si può identificare con gli iperpiani di \mathbb{P}/L sfruttando la dualità proiettiva di cui si è parlato nel capitolo 1. In questo capitolo ci sarà utile pensarli come iperpiani di \mathbb{P} che contengono L .

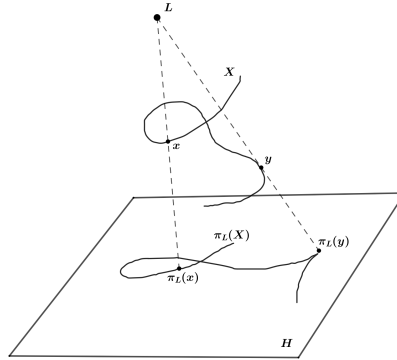


Figura 7: Proiezione di una curva da un punto

Teorema 4.1. *Sia $X \subset \mathbb{P}$ una varietà algebrica tale che $X \cap L = \emptyset$ e $\dim(X) < \dim(\mathbb{P}/L)$. Allora*

$$(\pi_L(X))^\vee \subset L^\vee \cap X^\vee \tag{4.1}$$

Inoltre se $\pi_L : X \rightarrow \pi_L(X)$ è un isomorfismo di varietà algebriche allora vale l'uguaglianza in (4.1).

Dimostrazione. Ricordiamo che $L^\vee \cap X^\vee \subset \mathbb{P}^*$

$$L^\vee \cap X^\vee = \overline{\{\text{iperpiani di } \mathbb{P} \text{ tangenti a } L\}} \cap \overline{\{\text{iperpiani di } \mathbb{P} \text{ tangenti a } X_{sm}\}}$$

Poiché L è un sottospazio il primo insieme coincide con gli iperpiani di \mathbb{P} che contengono L .

Descriviamo adesso $(\pi_L(X))^\vee \subset (P/L)^*$

$$(\pi_L(X))^\vee = \overline{\{\text{iperpiani in } \mathbb{P}/L \text{ tangenti a } (\pi_L(X))_{sm}\}}$$

Pensando \mathbb{P}/L immerso in \mathbb{P} e sfruttando il fatto che ogni punto nell'immagine proviene da almeno un punto di X , come è ovvio, si ottiene la (4.1).

Supponiamo adesso che π_L sia un isomorfismo, questo induce $\pi_L : X_{sm} \rightarrow \pi_L(X)_{sm}$ che è ancora un isomorfismo. Indichiamo con $X_0^\vee = \{H \in X^\vee \mid \exists x \in X_{sm} \text{ t.c. } T_x X \subset H\}$ e analogamente per $\pi_L(X)_0^\vee$. Ripercorrendo i passaggi della prima parte e sfruttando il fatto che ogni punto di $\pi_L(X)_{sm}$ ha un'unica retroimmagine in X_{sm} si ottiene $X_0^\vee \cap L^\vee = \pi_L(X)_0^\vee$. E' ovvio che $\overline{X_0^\vee} = X^\vee$ e analogamente $\overline{\pi_L(X)_0^\vee} = \pi_L(X)^\vee$, dunque

$$\pi_L(X)^\vee = \overline{\pi_L(X)_0^\vee} = \overline{X_0^\vee \cap L^\vee}$$

Per concludere dobbiamo dimostrare $\overline{X_0^\vee \cap L^\vee} = X^\vee \cap L^\vee$. L'inclusione \subseteq è sempre vera, infatti se un iperpiano H è limite di una famiglia di iperpiani tangenti a X e contenenti L allora H anche contiene L . L'altra inclusione richiede più lavoro, vediamola nel lemma seguente.

Lemma 4.2. *Sia $H(t), t \in \mathbb{C}$ una famiglia di iperpiani parametrizzata da t tale che $H(t)$ sia tangente a X in $x(t)$ liscio e supponiamo che $L \subset H(0)$. Allora esiste un'altra famiglia di iperpiani $H'(t), t \in \mathbb{C}$ tale che:*

- $H'(0) = H(0)$
- $\forall t \neq 0$ $H(t)$ è tangente a X in $x(t)$ e $L \subset H(t)$

Dimostrazione. Indichiamo con $x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) \in X$. $\pi_L : X \rightarrow \pi_L(X)$ induce un isomorfismo tra gli spazi tangenti in ogni punto di X , con un abuso di notazione pensiamo $T_{x(t)}X$ come sottospazi di \mathbb{P} per $x(t)$, allora si ha $T_{x(t)}X \cap L = \emptyset$. Indichiamo poi con $T(t) = T_{x(t)}X$ e con $T(0) = \lim_{t \rightarrow 0} T(t)$, poiché il punto $x(0)$ potrebbe essere singolare si ha $T(0) \subset T_{x(0)}X$, in ogni caso $T(0)$ non interseca L . Osserviamo che $\forall t$ $\dim(\langle L, T(t) \rangle) = \dim(L) + \dim(X) + 1 < n$ e $H(0) \supset \langle L, T(0) \rangle$, dunque la famiglia cercata si costruisce prendendo $\forall t$ $H'(t) \supset \langle L, T(t) \rangle$ e $H'(0) = H(0)$. Ad esempio si può scegliere $L' \subset \mathbb{P}$ sottospazio proiettivo tale che $\dim(L') = n - \dim(X) - 2$ e $L \subset L'$, una famiglia di iperpiani si ottiene prendendo $H'(t) = \langle L', T(t) \rangle$. \square

Questo conclude anche la dimostrazione del teorema 4.1. \square

Osservazione: nella seconda parte del teorema 4.1 l'ipotesi π_L isomorfismo è fondamentale. Sia $y \in X$ un punto critico di questa mappa tale che $L \subset T_y X$, ogni iperpiano che contiene $\langle y, L \rangle$ appartiene a X^\vee , dunque $X^\vee \cap L^\vee$ oltre a $\pi_L(X)^\vee$ contiene anche $\pi_L(y)^\vee$.

Sia adesso $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V^*)$ e $L = \mathbb{P}(W^*) \subset \mathbb{P}$. Consideriamo la successione esatta

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} W \rightarrow 0$$

dove i indica l'immersione e π la proiezione. Questa successione induce la successione esatta tra gli spazi duali data da

$$0 \rightarrow W^* \xrightarrow{\pi^*} V^* \xrightarrow{i^*} K^* \rightarrow 0$$

Segue che $V^*/W^* \simeq K^*$ e dunque $\mathbb{P}(K^*) \simeq \mathbb{P}/L$. Inoltre π_L è indotta da i^* .

Corollario 4.3. Sia $X \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(V^*)$ e $L = \mathbb{P}(W^*)$ tale che $X \cap L = \emptyset$ e $\dim(X) < \dim(\mathbb{P}/L)$, allora $\Delta_{\pi_L(X)}$ è un fattore di $\Delta_X|_K$ (vedi definizione 1.8).

Dimostrazione. Poichè $X^\vee \subset \mathbb{P}(V^*)$ allora Δ_X è una funzione su V , analogamente $\Delta_{\pi_L(X)}$ è una funzione su K essendo $\pi_L(X) \subset \mathbb{P}(K^*)$. Poichè $K \subset V$ e $\pi_L(X)^\vee \subset X^\vee$ dal teorema, la tesi è immediata. \square

Esempio 4.4. (cubica gobba) Il codice seguente verifica il corollario 4.3 per la cubica gobba $C \subset \mathbb{P}^3$ che viene proiettata sull'iperpiano $\{x_1 = 0\}$ dal punto $(0, 1, 0, 0)$.

```
R=QQ[x_0..x_3,u_0..u_3,y_0..y_2]
m=matrix{{x_0,x_1,x_2},{x_1,x_2,x_3}}
C=minors(2,m)--ideale associato alla cubica gobba
M=matrix{{x_0,x_1,x_2,x_3},{0,1,0,0},{y_0,0,y_1,y_2}}
C1=C+minors(3,M)
f=(gens eliminate({x_0,x_1,x_2,x_3},saturate(C,
    ideal(x_0,x_1,x_2,x_3))))_(0,0)
--questa è la proiezione di C su {x_1=0}

--calcolo della duale della proiezione in P^2
yy=matrix{{y_0,y_1,y_2}}
codim ideal(diff(yy,f))--viene 2, è singolare
uu=matrix{{u_0,u_2,u_3}}
I=eliminate({y_0,y_1,y_2},saturate
    (ideal(diff(yy,f)-uu,f),ideal diff(yy,f)))
--il generatore è la curva duale della proiezione

--calcolo della duale della curva di partenza C
xx=matrix{{x_0..x_3}}
J=diff(transpose xx, gens C)
uu=matrix{{u_0..u_3}}
Ju=J|transpose uu
g=eliminate({x_0,x_1,x_2,x_3},saturate(minors(3,Ju)+C,
    (ideal xx)*(ideal uu)))
gp=(gens g)_(0,0) --polinomio che rappresenta la duale di C
factor sub(gp, u_1=>0)--fattori di C duale
```

Implementando su M2 si ottiene come proiezione la curva $y_1^3 - y_0 y_2^2 = 0$ e come duale di questa in \mathbb{P}^2 (coordinate omogenee u_0, u_2, u_3) la curva di equazione $4u_2^3 + 27u_0 u_3^2 = 0$. Poichè C^\vee è definita da $(u_0)(4u_2^3 + 27u_0 u_3^2) = 0$ (ultimo comando) risulta evidente che $\Delta_{\pi(C)}$ è un fattore di Δ_C come volevamo.

Consideriamo adesso il caso in cui $X \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{M}$ dove \mathbb{M} indica uno spazio proiettivo di dimensione maggiore. Siano $X_{\mathbb{P}}^\vee \subset \mathbb{P}^*$ e $X_{\mathbb{M}}^\vee \subset \mathbb{M}^*$ le varietà duali di X immersa nei due spazi. Cerchiamo di capire che relazione c'è tra queste e i rispettivi discriminanti. \mathbb{P}^* lo possiamo immergere in \mathbb{M}^* , inoltre la successione $0 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{M}}^\vee \xrightarrow{i} \mathbb{M}^* \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^* \rightarrow 0$ è esatta dunque $\mathbb{P}^* = \mathbb{M}^*/\mathbb{P}_{\mathbb{M}}^\vee$.

Proposizione 4.5. Nella notazione precedente $X_{\mathbb{M}}^\vee$ è il cono su $X_{\mathbb{P}}^\vee$ con vertice $\mathbb{P}_{\mathbb{M}}^\vee$.

Dimostrazione. Ci basta considerare $\pi : (\mathbb{M}^* - \mathbb{P}_{\mathbb{M}}^{\vee}) \rightarrow \mathbb{P}^*$ e osservare che $\forall y \in X_{\mathbb{P}}^{\vee}$ $\pi^{-1}(y) \in X_{\mathbb{M}}^{\vee}$. \square

Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V^*)$ e $\mathbb{M} = \mathbb{P}(E^*)$, il discriminante di $X_{\mathbb{P}}$ è una funzione su V mentre quello di $X_{\mathbb{M}}$ è una funzione su E .

Corollario 4.6. *Nella notazione precedente si ha $\Delta_{X_{\mathbb{M}}}(f) = \Delta_{X_{\mathbb{P}}}(\pi(f))$.*

Esempio 4.7. *(quadriche) Sia $X \subset \mathbb{P}$ un'ipersuperficie quadrica definita da $(Ax, x) = 0$ con A è una forma bilineare simmetrica. Nel caso in cui X sia liscia, cioè A non-degenere, analogamente al caso delle coniche (esempio 2.1) l'equazione che definisce X^{\vee} è $(A^{-1}x, x) = 0$. Se invece X è singolare la forma bilineare A è degenere, chiamiamo $K = \ker(A) \subset V$, questa ne induce una non-degenere $\bar{A} : V/K \rightarrow V^*$. Osserviamo che in questo caso X è il cono su $\{(\bar{A}x, x) = 0\} \subset \mathbb{P}(V/K)$ con vertice K . Dal corollario 4.6 segue che la duale $X^{\vee} \subset \mathbb{P}(K^{\perp}) \subset \mathbb{P}^*$ è definita dalla forma non-degenere \bar{A}^{-1} nel sottospazio $\mathbb{P}(K^{\perp})$ in accordo con la proposizione 4.5.*

5 Varietà Determinantali

5.1 Varietà duale delle matrici di rango $\leq r$

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in \mathbb{C} . Chiamiamo $Y_r = \{A \in V \text{ t.c. } \text{rank}(A) \leq r\}$, $X_r = \mathbb{P}(Y_r)$ è la varietà proiettiva definita dai minori $(r+1) \times (r+1)$.

Lo spazio V^* può essere identificato con V nel modo seguente: $f : V \rightarrow \mathbb{C} \in V^*$ corrisponde alla matrice $A \in V$ se e solo se $\forall B \in V$ $f(B) = (A, B) := \text{Tr}(AB^T) = \sum_{ij} a_{ij}b_{ij}$. In questo senso possiamo pensare $X_r^{\vee} \subset \mathbb{P}(V)$.

Proposizione 5.1. *Con la notazione precedente, se $m \leq n$, si ha:*

$$X_r^{\vee} = X_{m-r}$$

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema dobbiamo capire come è fatto lo spazio tangente a Y_r nei punti lisci. Si può dimostrare che tutti i punti di Y_{r-1} sono singolari, dunque gli unici punti lisci sono dati dalle matrici di rango esattamente r .

- (Caso $n=m$ e $r=n-1$) X_{n-1} sono le matrici a determinante nullo. Sia dunque A una matrice $n \times n$ di rango $n-1$, indichiamo con A' la matrice dei cofattori di A . Il seguente lemma ci aiuta a capire come è fatto lo spazio tangente in A :

Lemma 5.2. *L'iperpiano tangente $T_A Y_{n-1}$ coincide con le matrici $B \in V$ che soddisfano $(A', B) = 0$.*

Dimostrazione. Una matrice $B \in V$ sta nello spazio tangente in $A \in Y_{n-1}$ se e solo se $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\det(A + tB)) = 0$, dobbiamo allora capire come è fatto il coefficiente di t in $\det(A + tB) = 0$. Svolgendo i conti si trova

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(\det(A + tB)) = (A', B)$$

da cui la tesi. \square

Dunque Y_{n-1}^\vee coincide con la chiusura dell'insieme delle matrici A' (per come si identifica V^* con V). Ricordando che la matrice dei cofattori ha rango 1 se la matrice di partenza ha rango $n-1$ e 0 se lo ha $< n-1$, segue $Y_{n-1}^\vee = Y_1$.

- (Caso generale) Come abbiamo già osservato inizialmente la varietà Y_r è definita dall'annullamento dei minori di ordine $r+1$. Siano I e J due sottoinsiemi rispettivamente di $\{1, \dots, m\}$ e $\{1, \dots, n\}$, entrambi di cardinalità $r+1$; presa una generica $A \in Y_r$ indichiamo con A_{IJ} la matrice $(r+1) \times (r+1)$ che si ottiene da A eliminando tutte le righe che non stanno in I e le colonne che non stanno in J . Dal lemma 5.2 segue che una matrice $B \in T_A Y_r$ se e solo se $(A'_{IJ}, B_{IJ}) = 0 \forall I, J$ poiché si devono annullare tutti i minori di ordine $(r+1) \times (r+1)$ e dunque la varietà Y_r^\vee è generata da tutte le matrici del tipo A'_{IJ} (immerse in V come viene spontaneo) al variare di $A \in Y_r$. E' evidente che se $\text{rank}(A) < r$ allora $\text{rank}(A'_{IJ}) < m-r$ e dunque $A'_{IJ} \in Y_{m-r}$. Se invece non è così, poiché le orbite dell'azione del gruppo $GL(V)$ degli automorfismi di V coincidono con le matrici di rango uguale, per far vedere che questo spazio coincide con Y_{m-r} ci basterà far vedere che per una speciale matrice di rango r vale $A'_{IJ} \in Y_{m-r}$ e inoltre $\exists I, J$ t.c. il rango è proprio $m-r$. Infatti se $B \in V$ ha rango r esiste $\psi : V \rightarrow V \in \text{Aut}(V)$ tale che $\psi(B) = A$, inoltre $\psi(Y_r) = Y_r$ ed è indotto un isomorfismo tra i tangenti $T_B(Y_r)$ e $T_A(Y_r)$. Prendiamo allora

$$A = \begin{bmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove con Id_r si indica la matrice identità $r \times r$. E' facile vedere che se I e J non contengono entrambi l'insieme $\{1, \dots, r\}$ la matrice A_{IJ} ha rango $< r$ e dunque $A'_{IJ} = 0$, se invece lo contengono entrambi troviamo matrici di rango 1, in particolare se $I = \{1, \dots, r\} \cup i$ e $J = \{1, \dots, r\} \cup j$ si ottiene

$$(A'_{IJ})_{kl} = \begin{cases} 1 & k=i, l=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Adesso è evidente che ogni combinazione lineare di queste ha rango $\leq m-r$ e ne esiste una di rango esattamente $m-r$.

□

5.2 La Varietà di Segre e il suo discriminante

Indichiamo con

$$S : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$

l'*immersione di Segre*, definita cioè nel modo seguente: siano (x_0, \dots, x_n) , (y_0, \dots, y_m) e $(z_{ij} | i \in \{0, \dots, n\}, j \in \{0, \dots, m\})$ coordinate omogenee rispettivamente su \mathbb{P}^n , \mathbb{P}^m e $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$

$$S(x, y) = (\dots, x_i y_j, \dots)$$

L'immagine di questo morfismo si chiama *Varietà di Segre*, indichiamola con S . Si dimostra che tale varietà coincide con X_1 quando si pensano gli elementi di $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ come matrici del tipo $Z = (z_{ij})$.

Se $n = m$, la matrice Z è quadrata $(n+1) \times (n+1)$. La varietà duale S^\vee immersa nello spazio delle matrici $(n+1) \times (n+1)$ è X_n per la proposizione 5.1 e dunque il

discriminante della varietà di Segre Δ_S coincide con il determinante di una generica matrice $(n+1) \times (n+1)$.

In analogia al caso delle matrici quadrate è possibile definire un sorta di "determinante" per le matrici a più dimensioni che prende il nome di iperdeterminante. Le varietà di Segre ci permettono di dare un'interpretazione geometrica a questo oggetto.

Ripercorrendo quanto fatto nel caso di matrici quadrate, possiamo definire l'immersione di Segre a partire da tre spazi proiettivi, cioè

$$S : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^t \rightarrow \mathbb{P}^N$$

dove $N = (n+1)(m+1)(t+1) - 1$ e $S(x, y, u) = (\dots, x_i y_j z_k, \dots)$. La Varietà di Segre S continua ad essere l'immagine di questo morfismo. Quello che possiamo fare in questo caso è identificare lo spazio \mathbb{P}^N con le matrici tridimensionali del tipo $Z = (z_{ijk})$. Dal corollario 1.5.10 del [GKZ] segue che se $\max\{n, m, t\} = n \leq m + t$ allora la varietà duale S^\vee è un'ipersuperficie, in questo caso si può dimostrare che il discriminante Δ_S coincide con l'iperdeterminante di una generica matrice tridimensionale in questo spazio.

Lo stesso argomento vale per prodotti di r spazi proiettivi. Se è soddisfatta una condizione analoga a quella per il caso $r = 3$ otteniamo l'iperdeterminante di matrici r -dimensionali.

Riferimenti Bibliografici

- [AD] M. Artebani, I. Dolgachev, *The Hesse Pencil of Plane Cubic Curves*. L'Enseignement Mathématique, EMS Press, 2009.
- [B] W.M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975.
- [CLO1] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideal, Varieties and Algorithms*, Springer, 1992.
- [CLO2] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, Springer, 1998.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, London-New York, 1979.
- [GKZ] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, Springer Science+Business Media, 1994.
- [MS] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Clarendon Press-Oxford, 1998.
- [M2] D. Grayson, M. Stillman, *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry* www.math.uiuc.edu/Macaulay2/.
- [S] I.R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977.