Il teorema di Cartan-Dieudonné sulle simmetrie (riflessioni)
versione 9.4.08

Definizione 0.1 *Una isometria di* $\mathbf{A}^n$ *è una funzione* $f\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ *tale che* $\forall P, Q \in \mathbf{A}^n$ *si ha* $|Q-P| = |f(Q) - f(Q)|$*, cioè* f *conserva le distanze tra punti.*

Le isometrie formano un gruppo, dove l'operazione è la composizione.

Definizione 0.2 *Sia* $H \subset \mathbf{A}^n$ *un iperpiano e* π_H *la proiezione ortogonale su* H*. La simmetria rispetto a* H *è definita da* $s_H(x) = -x + 2\pi_H(x)$ *per* $x \in \mathbf{A}^n$*.*

s_H è una isometria, il cui luogo dei punti fissi è H stesso. Se l'equazione di H è $ax - b = 0$ allora abbiamo $s_H(x) = x - 2\frac{ax-b}{|a|^2}a$. In particolare $s_H(x) = Ax + c$ dove A è una matrice ortogonale e $c \in \mathbf{A}^n$.

Ricordiamo che l'asse di due punti distinti $P, Q \in \mathbf{A}^n$ è l'iperpiano H luogo dei punti equidistanti da P e Q. Precisamente abbiamo che $H = \frac{P+Q}{2} + < Q - P >^{\perp}$, cioè H è ortogonale a $Q-P$ e passa per il punto medio $\frac{P+Q}{2}$. In particolare s_H porta P in Q e viceversa.

Proposizione 0.3 *Una isometria* $f\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ *tale che* $Fix(f) = H$ *è un iperpiano, è la simmetria rispetto a* H*.*

Dimostrazione Se $P \notin H$, considero la retta r per P e la sua proiezione ortogonale $\pi_H(P)$. Siccome f fissa H, sarà fissata anche la direzione ortogonale a H, e quindi $f(r)$ è ancora ortogonale a H e passa per $f(\pi_H(P)) = \pi_H(P)$, pertanto $f(r) = r$. Siccome $f(P)$ e P sono equidistanti da $\pi_H(P)$, segue $P - \pi_H(P) = \pi_H(P) - f(P)$, da cui $f(P) = -P + 2\pi_H(P)$ come volevamo.

Teorema 0.4 *Sia* $f\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ *una isometria tale che* $\dim Fix(f) \geq n - c$ *per qualche* $c \in \mathbf{N}$*. Allora* f *è composizione di al più* c *simmetrie rispetto a iperpiani.*

Dimostrazione Per $c = 1$ è la proposizione precedente. Ragioniamo per induzione su c. Se f non è l'identitià allora esiste Q tale che $f(Q) \neq Q$. Sia H l'asse di Q e $f(Q)$ e sia s la simmetria rispetto a H. Abbiamo per costruzione $s(Q) = f(Q)$, da cui $sf(Q) = Q$, cioè $Q \in Fix(sf)$. Affermiamo che $Fix(f) \subseteq Fix(sf)$. Infatti se $Z \in Fix(f)$ abbiamo che Z è equidistante da Q e da $f(Q)$, perché $|f(Q) - Z| = |f(Q) - f(Z) = |Q - Z|$. Quindi $Z \in H$, da cui $s(Z) = Z$ e $Z \in Fix(sf)$. Pertanto $Fix(sf) \supseteq < Fix(f), Q) >$ che ha dimensione $\geq n - (c-1)$ e quindi per ipotesi induttiva $sf = s_1 \cdot s_2 \cdots s_t$ con s_i simmetrie rispetto a iperpiani e $t \leq c - 1$. Segue che $f = s \cdot s_1 \cdot s_2 \cdots s_t$ come volevamo dimostrare.

Teorema 0.5 *(Cartan-Dieudonné) Sia* $f\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ *una isometria. Allora* f *è composizione di al più* $n+1$ *simmetrie rispetto a iperpiani.*

Dimostrazione Possiamo applicare il teorema precedente per $c = n + 1$.

Corollario 0.6 *Sia* $f\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ *una isometria. Allora* $f(x) = Ax + c$ *dove* A *è una matrice ortogonale e* $c \in \mathbf{A}^n$.

(Seconda) Dimostrazione L'enunciato è vero per le riflessioni simmetrie e rimane vero per composizione.

Corollario 0.7 *Sia* $f\colon \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ *una isometria.*

(i) Per ogni $P, Q \in \mathbf{A}^n$ *e per ogni* $t \in \mathbf{R}$ *vale* $f((1-t)P + tQ) = (1-t)f(P) + tf(Q)$.

(ii) Più in generale per ogni $P_1, \ldots, P_k \in \mathbf{A}^n$ *e per ogni* $t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{R}$ *con* $\sum_{i=1}^k t_i = 1$ *vale* $f(\sum_{i=1}^k t_i P_i) = \sum_{i=1}^k t_i f(P_i)$.

(iii) Il luogo dei punti fissi $Fix(f) = \{P | f(P) = P\}$ *è un sottospazio affine.*

Dimostrazione L'enunciato segue dal corollario precedente.

Corollario 0.8 *(i) Sia* $f\colon \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ *una isometria. Allora* f *è composizione di al più* 3 *simmetrie assiali (riflessioni). Se* f *conserva l'orientazione allora è composizione di* 2 *simmetrie assiali oppure è l'identità.*

(ii) Sia $f\colon \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$ *una isometria. Allora* f *è composizione di al più* 4 *simmetrie rispetto a piani. Se* f *non conserva l'orientazione allora è composizione di al più* 3 *simmetrie rispetto a piani.*

Dimostrazione L'enunciato segue dal Teor. 0.5.