

•  
•  
•

# Varietà di Grassmann in Geometria Algebrica

*Scuola di Dottorato, Gargnano*

*10-14 Aprile 2007*



Giorgio Ottaviani

[ottavian@math.unifi.it](mailto:ottavian@math.unifi.it)

[www.math.unifi.it/ottavian](http://www.math.unifi.it/ottavian)

Università di Firenze



# Presentazione

Studiamo punti di vista diversi sulle  
Grassmanniane

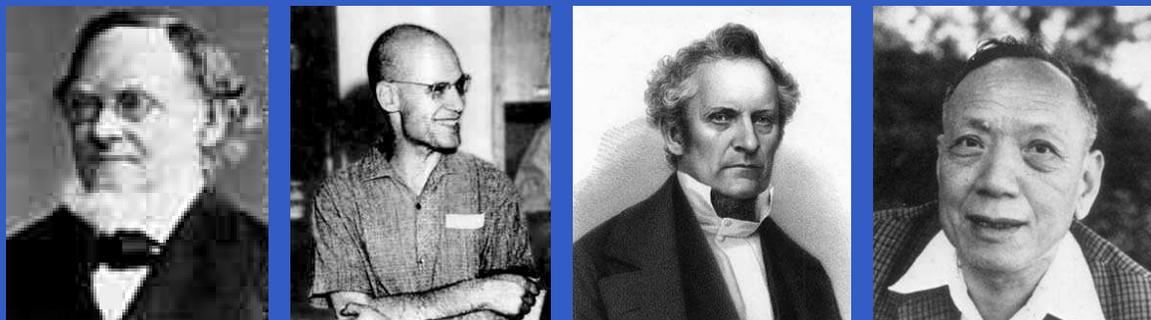
- 1) Tensori e Algebra commutativa
- 2) Topologia, Geometria enumerativa
- 3) Geometria Proiettiva
- 4) Azioni di gruppi, Teoria delle rappresentazioni
- 5) Fibrati vettoriali

# Bibliografia

## Bibliografia generale

- J. Harris, Algebraic Geometry, A first course, Springer
- Ph. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley cap. 1 §5,
- W. Fulton, Young tableaux, LMS
- G. Ottaviani, Rational Homogeneous varieties, Cortona course 1995, available on the web

# Prima lezione



- Grassmanniane come varietà proiettive e come schemi di Hilbert.
- Le relazioni di Plücker.
- Il fibrato universale. Anello di coomologia e di Chow.  
(struttura additiva)
- Il fibrato tangente.

# L'algebra esterna, I

- Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso di dimensione  $n + 1$
- $\mathbf{P}(V)$  è lo spazio proiettivo delle rette di  $V$ .
- $\wedge V$  è l'algebra esterna su  $V$ , definita come il quoziente dell'algebra tensoriale  $T(V)$  per l'ideale generato da  $x \otimes y + y \otimes x$  per ogni  $x, y \in V$
- $\wedge(V)$  ha una graduazione

$$\wedge(V) = \bigoplus_{k=0}^{n+1} \wedge^k V$$

# L'algebra esterna, II

Equivalentemente  $\wedge^k V$  è l'immagine dell'applicazione lineare

$$A: \otimes^k V \rightarrow \otimes^k V$$

definita da

$$A(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

# L'algebra esterna, III

- Si pone

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k := A(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$$

- Quindi in particolare

$$v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$$

(anticommutatività)

# Esempio: $\wedge \mathbf{C}^4$

- $\wedge \mathbf{C}^4$  ha i seguenti generatori
- $\wedge^0 \mathbf{C}^4 = \langle 1 \rangle$
- $\wedge^1 \mathbf{C}^4 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$
- $\wedge^2 \mathbf{C}^4 = \langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4 \rangle$
- $\wedge^3 \mathbf{C}^4 = \langle e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \rangle$
- $\wedge^4 \mathbf{C}^4 = \langle e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \rangle$

# Dimensioni

- $\dim \wedge^k(V) = \binom{n+1}{k}$
- $\dim \wedge(V) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$

# Applicazioni multilineari alternanti

- Lo spazio vettoriale  $\wedge^k V$  è isomorfo allo spazio delle applicazioni multilineari alternanti

$$\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k \text{ volte}} \xrightarrow{f} \mathbf{C}$$

# I tensori decomponibili, I

- Un tensore  $\phi \in \wedge^{k+1}V$  si dice *decomponibile* se esistono  $v_0, \dots, v_k$  tali che

$$\phi = v_0 \wedge \dots \wedge v_k$$

- $v_0 \wedge \dots \wedge v_k = 0$  se e solo se  $v_0, \dots, v_k$  sono dipendenti.

# I tensori decomponibili, II

- Lo stesso tensore decomponibile ha tante rappresentazioni. Vale

$$\langle v_0, \dots, v_k \rangle = \langle w_0, \dots, w_k \rangle$$

e hanno dimensione proiettiva  $k$  se e solo se

$$\langle v_0 \wedge \dots \wedge v_k \rangle = \langle w_0 \wedge \dots \wedge w_k \rangle$$

e sono non nulli

# I tensori decomponibili, III

- I tensori decomponibili (non nulli) in  $\wedge^{k+1}V$  corrispondono quindi ai sottospazi di dimensione  $k + 1$  di  $V$ , ovvero ai sottospazi proiettivi di dimensione  $k$  di  $\mathbb{P}(V)$ .

# La varietà di Grassmann

- L'insieme dei tensori decomponibili in  $\wedge^{k+1}V$  è quindi un cono. La varietà proiettiva associata in  $\mathbf{P}(\wedge^{k+1}V)$  si dice *varietà di Grassmann*  $Gr(k, \mathbf{P}(V)) = Gr(k, n)$ .
- Vediamola come varietà omogenea. Il gruppo  $SL(V)$  agisce in modo naturale su  $\mathbf{P}(\wedge^{k+1}V)$ . Ricordiamo che  $SL(V)$  è  $(n+2)$ -transitivo su  $\mathbf{P}(V)$ . In particolare dati  $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$  e  $\langle w_0, \dots, w_k \rangle$  esiste  $g \in SL(V)$  tale che

$$\langle v_0, \dots, v_k \rangle = \langle g \cdot w_0, \dots, g \cdot w_k \rangle$$

# $Gr(k, n)$ è algebrica

- Abbiamo quindi un'azione (algebrica)  
 $SL(V) \times \mathbf{P}(\wedge^{k+1}V) \rightarrow \mathbf{P}(\wedge^{k+1}V)$
- La varietà di Grassmann  $Gr(k, n)$  è l'orbita di un qualunque tensore decomponibile. Pertanto  $Gr(k, n)$  è una varietà algebrica omogenea.

# La dimensione

- Il sottogruppo di isotropia di  $\langle e_0, \dots, e_k \rangle$  è formato da

*	*	*	*	*
*	*	*	*	*
0	0	*	*	*
0	0	*	*	*
0	0	*	*	*

- Quindi  $\dim Gr(k, n) = (k + 1)(n - k)$

# Dualità

- I sottospazi di dimensione  $k + 1$  in  $V$  corrispondono ai sottospazi di dimensione  $n - k$  in  $V^*$ .
- Quindi  $Gr(k, n) = Gr(n - k - 1, n)$
- $Gr(0, n) = Gr(n - 1, n) = \mathbf{P}^n$

# Coordinate di Plücker

- I minori della matrice  $(k + 1) \times (n + 1)$  che definisce  $m \in Gr(k, n)$  danno le sue coordinate pluckeriane  $p_{i_0, \dots, i_k}$ .
- Se il primo minore a sinistra è non nullo abbiamo il rappresentante

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{1,1} & \dots & x_{1,n-k} \\ 0 & 1 & & 0 & x_{2,1} & \dots & x_{2,n-k} \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & x_{k+1,1} & \dots & x_{k+1,n-k} \end{bmatrix}$$

- $x_{i,j}$  sono coord. locali su questo aperto di  $Gr(k, n)$

# L'atlante

- Gli aperti dove un minore  $p_I$  è non nullo ricoprono la Grassmanniana e definiscono un atlante.
- Questo atlante permette di definire la Grassmanniana in geometria differenziale.
- Segue che  $Gr(k, n)$  è una *varietà razionale*.

# Esercizio: equazioni di $Gr(k, n)$ , I

- Per ogni  $\omega \in \wedge^{k+1}V$  definiamo

$$\begin{aligned} A_\omega: V &\rightarrow \wedge^{k+2}V \\ v &\mapsto \omega \wedge v \end{aligned}$$

- Abbiamo che  $v_i \in \text{Ker} A_{v_0 \wedge \dots \wedge v_k}$  per  $i = 0, \dots, k$
- Siano  $v_0, \dots, v_k$  indipendenti. Vale in più

$$\langle v_0, \dots, v_k \rangle = \text{Ker} A_{v_0 \wedge \dots \wedge v_k}$$

# Esercizio: equazioni di $Gr(k, n)$ , II

- Perciò se  $\omega \in CGr(k, n)$  allora

$$\text{rank} A_\omega = n + 1 - k$$

- Per provare il viceversa dobbiamo scambiare il ruolo tra  $v$  e  $\omega$
- Scambiando il ruolo otteniamo il complesso di Koszul.

# Il complesso di Koszul (locale)

- $v \in V$  definisce un'applicazione

$$K_{v,k+1}: \wedge^{k+1} V \rightarrow \wedge^{k+2} V$$
$$\omega \mapsto \omega \wedge v$$

- le applicazioni  $K_{v,k}$  definiscono un complesso

$$0 \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow V \xrightarrow{K_{v,1}} \wedge^2 V \xrightarrow{K_{v,2}} \dots \rightarrow \wedge^{n+1} V \rightarrow 0$$

detto complesso di Koszul

- Il complesso di Koszul è esatto.
- Per la dimostrazione, completa  $v$  a una base di  $V$ .

# Esercizio: equazioni di $Gr(k, n)$ , III

- Torniamo a

$$\begin{aligned} A_\omega: V &\rightarrow \wedge^{k+2}V \\ v &\mapsto \omega \wedge v \end{aligned}$$

- L'esattezza del complesso di Koszul ci assicura che  $v \in \text{Ker} A_\omega$  se e solo se esiste  $\omega' \in \wedge^k V$  tale che  $\omega = v \wedge \omega'$ .
- Iterando,  $v_1, v_2 \in \text{Ker} A_\omega$  (indipendenti) se e solo se  $\omega = v_1 \wedge \omega' = v_2 \wedge \omega''$ , da cui, completando  $v_1, v_2$  a una base:

- $\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \omega'''$

# Esercizio: equazioni di $Gr(k, n)$ , IV

- Concludendo  $\langle v_0, \dots, v_k \rangle \subseteq \text{Ker} A_\omega$  se e solo se  $\omega = v_0 \wedge \dots \wedge v_k$  da cui segue che
- $\omega \in CGr(k, n)V \setminus \{0\}$  se e solo se

$$\text{rank} A_\omega = n + 1 - k$$

- e quindi  $\omega \in CGr(k, n)$  se e solo se

$$\text{rank} A_\omega \leq n + 1 - k$$

- I minori  $(n + 2 - k) \times (n + 2 - k)$  danno le equazioni di  $Gr(k, n)$

# Esempi: $Gr(1, 3)$

- Sia  $\omega = \sum p_{ij} e_i \wedge e_j$ . Qui  $V = \mathbf{C}^4$  e la matrice di  $A_\omega$  è

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{23} & -p_{13} & p_{12} \\ -p_{23} & 0 & p_{03} & -p_{02} \\ p_{13} & -p_{03} & 0 & p_{01} \\ -p_{12} & p_{02} & -p_{01} & 0 \end{bmatrix}$$

- La Grassmanniana è definita insiemisticamente dal determinante.

Qui  $Gr(1, 3)$  è la quadrica

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$$

# Grassmanniane di rette

- $0 \neq \omega = \sum p_{ij} e_i \wedge e_j \in \wedge^2 V$  è decomponibile se e solo se la matrice antisimmetrica  $[p_{ij}]$  ha rango 2.

Le sue equazioni sono gli pfaffiani (principali)  $4 \times 4$  (vedi esercizi), quindi sono quadriche, dette quadriche di Plücker.

# $Gr(1, 4)$

- Il secondo esempio fondamentale è  $Gr(1, 4)$ , definita da 5 quadriche.  $Gr(1, 4)$  ha codimensione tre, le relazioni tra le cinque quadriche sono lineari.
- $0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^5 \longrightarrow \mathcal{O}^5 \longrightarrow \mathcal{I}_G(2) \longrightarrow 0$  o in notazione computazionale

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & & & & & \\ & 0 & 5 & 5 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 1 \end{array}$$

- La dimostrazione segue da proprietà dello pfaffiano (vedi esercizi).

# I cicli di Schubert, I

- Consideriamo l'aperto  $M_0$  delle matrici  $(k + 1) \times (n + 1)$  di rango massimo.
- Su  $M_0$  agisce  $GL(k + 1)$  per moltiplicazione sinistra (eliminazione di Gauss).
- Le orbite di questa azione sono infinite ma hanno un rappresentante descritto da una forma a scalini, e quindi da successioni di interi  $\lambda$  con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{k+1}$ .
- Conviene rappresentare  $\lambda$  con un diagramma di Young.

# I cicli di Schubert, II

- **Definizione** La chiusura in  $Gr(k, n)$  di ciascuna forma a scalini si dice un ciclo di Schubert  $X_\lambda$ .
- I cicli di Schubert hanno una interpretazione enumerativa. Precisamente:
- Sia  $V_i = \langle e_0, \dots, e_i \rangle$ . Identifichiamo  $m \in M_0$  con il sottospazio corrispondente di  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Vale che  $m \in X_\lambda$  se e solo se  $\dim m \cap V_{n-k+i-\lambda_i} \geq i$  per  $1 \leq i \leq k+1$ .
- $\lambda_i = 0 \iff$  condizione vuota

# I cicli di Schubert, III

- $\text{codim} X_\lambda = |\lambda| = \sum \lambda_i$
- I cicli di Schubert definiscono delle classi in  $H^*(Gr(k, n)) = A^*(Gr(k, n))$ .
- **Teorema** I cicli di Schubert formano una base additiva (come spazio vettoriale) di  $H^*(Gr(k, n))$  oppure di  $A^*(Gr(k, n))$ .

# I cicli di Schubert generano, I

- L'approccio topologico ai cicli di Schubert è basato sui seguenti fatti:
- Ogni sottovarietà irriducibile  $Z \subseteq X$  di codimensione  $d$  determina una classe di coomologia  $[Z] \in H^{2d}(X, \mathbf{Z})$
- Se abbiamo una filtrazione

$$X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_s = \emptyset$$

tale che  $X_i \setminus X_{i+1}$  è unione disgiunta di celle affini  $\mathbf{C}^{n_{i,j}}$  allora  $[\overline{\mathbf{C}^{n_{i,j}}}]$  formano una base additiva di  $H^{2d}(X, \mathbf{Z})$

# I cicli di Schubert generano, II

- Le celle  $X_\lambda^0$  sono definite da

$$\{m \mid \dim(m \cap V_k) = i \text{ per } n+i-\lambda_i \leq k \leq n+i-\lambda_{i+1}\}$$

# $H^*(Gr(1, 3))$

- $X_0 = G, X_1 = \{l | l \cap l_0 \neq \emptyset\}$
- $X_2 = \{l | p_0 \in l\}, X_{11} = \{l | l \subset \pi\}$
- $X_{21} = \{l | p_0 \in l \subset \pi\}, X_{22} = [l_0]$

# La famiglia universale

- Consideriamo la varietà di incidenza

$$W \subseteq Gr(k, n) \times \mathbf{P}^n$$

$$W = \{(m, x) \mid m \ni x\}$$

- La proiezione  $W \longrightarrow Gr(k, n)$  definisce  $\mathbf{P}(U)$  (quindi è piatta) ed è la famiglia universale.

# Gr come schema di Hilbert, I

- Il polinomio di Hilbert di  $m \simeq \mathbf{P}^k \subset \mathbf{P}^n$  vale  $H_m(t) = \chi(\mathcal{O}_m(t)) = \binom{k+t}{k}$ . Se  $Y \subset \mathbf{P}^n$  è tale che  $H_Y(t) = \binom{k+t}{k}$  allora  $Y \simeq \mathbf{P}^k$ .
- Sia  $F \subset Z \times \mathbf{P}^n$  uno schema tale che la proiezione  $F \xrightarrow{\pi} Z$  è piatta e  $H_{\pi^{-1}(z)}(t) = \binom{k+t}{k} \quad \forall z \in Z$ .
- Allora esiste unica  $f: Z \rightarrow \text{Gr}(k, n)$  tale che

$$F = Z \times_{\text{Gr}(k, n)} W$$

# $Gr$ come schema di Hilbert, II

- Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & W \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{f} & Gr(k, n) \end{array}$$

è un prodotto fibrato.

- $Grass(k + 1, -)$  è un funtore dai fibrati su  $S$  negli schemi su  $S$ .

# Il fibrato tangente, I

- 

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \otimes \mathcal{O} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

dove  $U$  è il fibrato universale e  $Q$  è il fibrato quoziente.

- Il risultato fondamentale è

$$TG = \text{Hom}(U, Q)$$

- Si considera l'azione di  $GL(V)$  su  $Gr(k, n)$   
Fissiamo  $m \in Gr(k, n)$ , abbiamo la derivata nell'identità

$$\text{End}(V) \rightarrow T_m Gr(k, n)$$

# Il fibrato tangente, II

- $$T_m Gr(k, n) \simeq End(V) / \{g | g \cdot m \subseteq m\}$$

- $$End(V) / \{g | g \cdot m \subseteq m\} \simeq Hom(m, V/m)$$

# Il fibrato tangente, III

- Un modo alternativo è pensare a  $Gr(k, n)$  come schema di Hilbert. Allora  $T_m Gr(k, n) \simeq H^0(N_{m, \mathbf{P}(V)})$

# Il fibrato canonico

- Corollario

$$K_{Gr(k,n)} = \mathcal{O}(-n - 1)$$

- Analogamente si ricava  $\xi_i = c_i(U^*)$

$$c_1(G) = (n + 1)\xi_1$$

$$c_2(G) = \left( \binom{n+1}{2} + k \right) \xi_1^2 + (n - 2k - 1)\xi_2$$

# Campi vettoriali

- $H^0(U^*) = V^*$ ,  $H^0(Q) = V$  inducono  $End(V) = V^* \otimes V \rightarrow H^0(TG)$ .
- Esplicitamente  $A \in End(V)$  induce il campo vettoriale  $v_A$  che su  $m$  vale  $m \longrightarrow V \xrightarrow{A} V \rightarrow V/m$
- $v_A(m) = 0$  se e solo se  $m$  è  $A$ -invariante.
- Quindi  $A$  generica si annulla in  $\binom{n+1}{k+1}$  punti.

# Gauss-Bonnet

- 

$$\chi(X, \mathbf{Z}) = c_m(TX)$$

- Applicazione:

$$\chi(X, \mathbf{Z}) = \binom{n+1}{k+1}$$