Scuola di Dottorato: Geometria proiettiva e birazionale delle varietà algebriche.
Gargnano, 10 - 14 Aprile 2007
Esercizi vari su $Gr(k,n)$

Giorgio Ottaviani

- 1) Sia C una cubica gobba in $\mathbf{P}^3$. Si consideri la superficie

  $$S := \{l \in Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^3) | l \text{ è tangente o secante a } C\}$$

  (a) In $H^4(Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^3))$ vale $S = aX_2 + bX_{11}$. Calcolare a, b e verificare che $a + b = 4$.

  (b) Provare che S è la superficie di Veronese in $\mathbf{P}^5$.

- 2)Sia $Q_3 \subset \mathbf{P}^4$ una quadrica liscia (sui complessi). Sia $W = \{\mathbf{P}^1 | \mathbf{P}^1 \subset Q_3\}$.

  (a) Provare che W_i è isomorfa a $\mathbf{P}^3$ immerso con $\mathcal{O}(2)$.

  (b) In $H^6(Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^4))$ abbiamo $W = aX_3 + bX_{2,1}$. Determinare a, b.

- 3)Sia $Q_4 \subset \mathbf{P}^5$ una quadrica liscia (sui complessi). La varietà $\{\mathbf{P}^2 | \mathbf{P}^2 \subset Q_4\}$ ha due componenti connesse W_1 e W_2.

  (a) Provare che W_i è isomorfa a $\mathbf{P}^3$ immerso con $\mathcal{O}(2)$.

  (b) In $H^{12}(Gr(\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^5))$ abbiamo $W_i = a_i X_{3,3} + b_i X_{3,2,1} + c_i X_{2,2,2}$. Determinare a_i, b_i, c_i.

- 4) Sia $F_3 \subset \mathbf{P}^4$ una 3-fold cubica liscia generale. La superficie di Fano di F_3 è definita da

  $$S := \{\mathbf{P}^1 | \mathbf{P}^1 \subset Q_3\}$$

  In $H^8(Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^4))$ abbiamo $S = aX_{3,1} + bX_{2,2}$.

  (a) Determinare a, b e $\deg S$.

  (b) Utilizzando la formula di aggiunzione determinare K_S^2.

- 5) Calcolare le prime classi di Chern c_1 e c_2 di $Gr(1, 4)$.

- 6) Provare che la varietà duale di $Gr(1, n)$ è una ipersuperficie se e solo se n è dispari. *Suggerimento: considerare l'azione di $SL(n + 1)$.*

- 7) Provare che dati P_1, P_2, P_3 punti generici in $\mathbf{Gr}(\mathbf{P}^3, \mathbf{P}^7)$, c' è una base $e_0, \dots e_7$ tale che $P_1 =< e_0, e_1, e_2, e_3 >$, $P_2 =< e_4, e_5, e_6, e_7 >$, $P_3 =< e_0 + e_4, e_1 + e_5, e_2 + e_6, e_3 + e_7 >$. Dedurre che dati $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ punti generici in $\mathbf{Gr}(\mathbf{P}^3, \mathbf{P}^7)$ esiste $g \in SL(8)$ tale che $g \cdot P_i = Q_i$ per $i = 1, 2, 3$. Questo significa che l'azione di $SL(8)$ su $\mathbf{Gr}(\mathbf{P}^3, \mathbf{P}^7)$ è 3-transitiva. *L'azione di $SL(n+1)$ su $\mathbf{Gr}(\mathbf{P}^k, \mathbf{P}^n)$ è s-transitiva se $s < \frac{(n+1)^2}{(k+1)(n-k)}$, si veda V. Popov, Generically multiple transitive algebraic group actions, math/0409024. Ricordiamo che l'azione di $SL(n+1)$ su $\mathbf{P}^n$ è $(n+2)$-transitiva.*

- 8) Ogni automorfismo di $\mathbf{P}^n$ induce automorfismi di $Gr(k, n)$. Provare che se $2k = n - 1$ allora esiste un'altra componente connessa in $Aut(Gr(k, n))$.