Matematica discreta: dai poliedri al DNA
Pianeta Galileo 2011

Giorgio Ottaviani

Dipartimento di Matematica
Università di Firenze

28 Novembre 2011

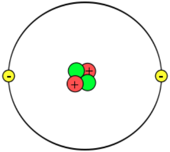
Introduzione

Il discreto viene rapprentato con i numeri naturali.

Il continuo viene rapprentato con i numeri reali.

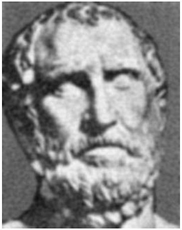
Si può dividere all'infinito ?

Democrito, nato nel 460 a.C., è il fondatore dell'atomismo 

Schema classico di un atomo di elio: 

I paradossi di Zenone

Zenone di Elea concepisce nel V secolo a.C. il paradosso di Achille e la tartaruga.

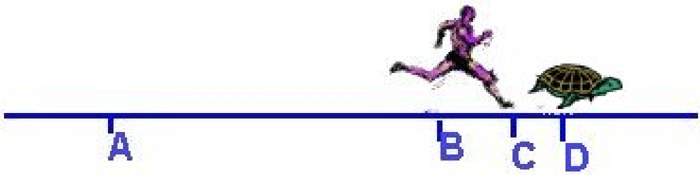


Un secolo dopo Aristotele suggerisce che lo spazio non può essere diviso all'infinito.

Achille e la tartaruga

Dopo la partenza

Dopo un altro attimo



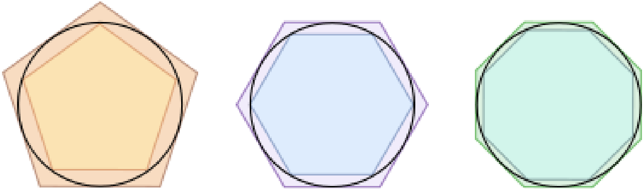
Il numero di Avogadro

Il numero di Avogadro è un ponte tra il mondo microscopico e il mondo macroscopico.

$\mathcal{N} = 6,02214 \cdot 10^{23}$

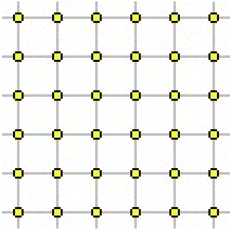
$\mathcal{N}$ è il numero di atomi di idrogeno in un grammo di idrogeno= numero di atomi di carbonio in 12 grammi di carbonio=...

Archimede, per calcolare l'area del cerchio, lo approssimava con poligoni regolari di n lati.



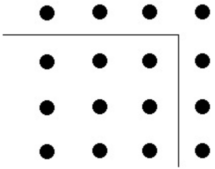
Il reticolo intero

Il piano cartesiano può essere approssimato con i punti a coordinate intere

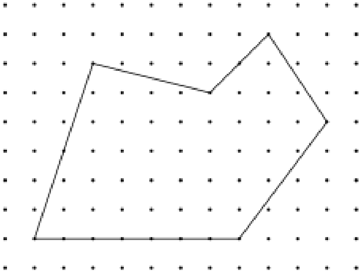


I punti disegnati rappresentano la visione discreta del piano.

Ogni numero dispari è differenza di due numeri quadrati.



Come si calcola l'area di questo poligono ?



La formula di Pick

Consideriamo un poligono i cui vertici hanno coordinate intere. Sia

$$i = \text{numero dei punti interni al poligono}$$

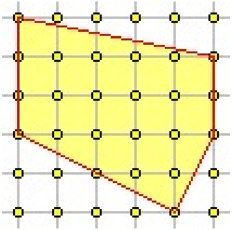
$$b = \text{numero dei punti sul bordo del poligono}$$

Allora

Formula di Pick

$$\text{Area} = i + \frac{b}{2} - 1$$

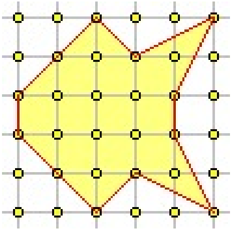
Applicazioni della formula di Pick



$i =$ $b =$ $i =$ 14 $b =$ $i =$ 14 $b = 9$

Quindi $\mathrm{Area} = i + \frac{b}{2} - 1 = 14 + \frac{9}{2} - 1 = \frac{35}{2} = 17,5$

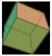
Applicazioni della formula di Pick



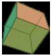
$i =$ $b =$ $i =$ 10 $b =$ $i =$ 10 $b = 12$

Quindi $\mathrm{Area} = i + \frac{b}{2} - 1 = 10 + \frac{12}{2} - 1 = 15$

I cinque solidi platonici

		Vertici	Spigoli	Facce
Tetraedro		4	6	4
Cubo		8	12	6
Ottaedro		6	12	8
Dodecaedro		20	30	12
Icosaedro		12	30	20

La caratteristica di Eulero

		Vertici	Spigoli	Facce	V-S+F
Tetraedro		4	6	4	2
Cubo		8	12	6	2
Ottaedro		6	12	8	2
Dodecaedro		20	30	12	2
Icosaedro		12	30	20	2

Alcuni tori

$\chi =$ caratteristica di Eulero

$$\chi = V - S + F = 2 - 2g$$

		χ
Toro		0
Bitoro		-2
Tritoro		-4

Il problema dell'imballaggio di cerchi

Come sistemare dei cerchi di ugual raggio sul piano, in modo da avere densità massima?

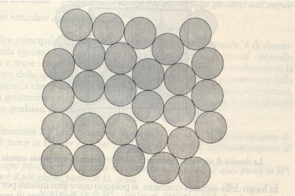


Figura 9.
Un impaccamento irregolare di dischi

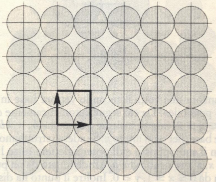


Figura 6.
Impaccamento quadrato di dischi $\mathcal{K}_{\text{quad}}$

$$\text{Densità} = \frac{\pi}{4} = 0,7853\ldots$$

Imballaggio esagonale

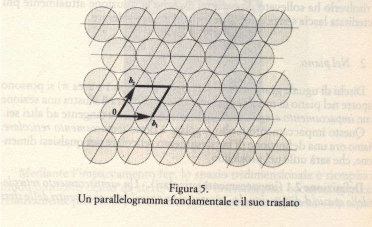


Figura 5.
Un parallelogramma fondamentale e il suo traslato

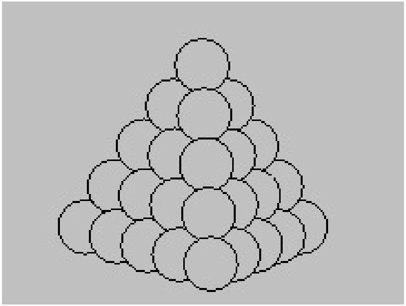
Teorema di Lagrange (1773)

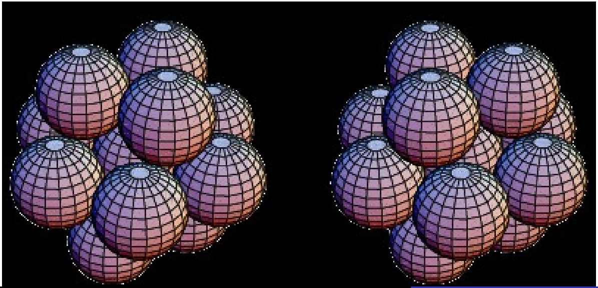
L'imballaggio esagonale è il più denso

$$\text{Densità} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,9068\ldots$$

Imballaggio di sfere

Qual è l'imballaggio di sfere più denso ?



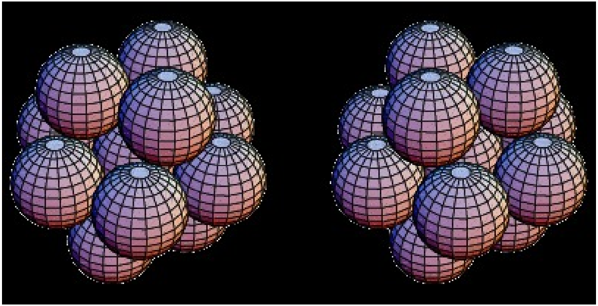


La Congettura di Keplero

La congettura prevede che l'imballaggio usato per le arance è il migliore possibile. Ha strati esagonali.

La sua densità è $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,74048\ldots$.

La Dimostrazione della Congettura di Keplero

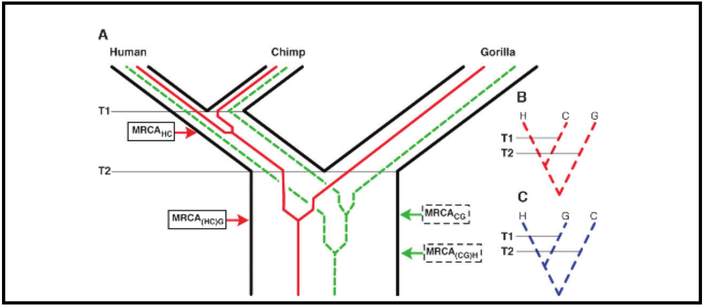


Nel 1998 il matematico americano Hales annuncia una dimostrazione della congettura. E' lunga 250 pagine e richiede 3 Gigabyte di spazio disponibile per calcoli su un computer.
E' stata pubblicata ma sono rimasti dei dubbi sulla sua validità.

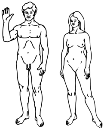
Il computer può certificare la correttezza di una dimostrazione ?

Nel 2003 Hales ha annunciato l'inizio di un progetto per una dimostrazione certificata dal computer. E' necessario scrivere la dimostrazione in un linguaggio formale. Sono stimati circa 20 anni di lavoro.

Filogenetica



Uomo-Scimpanzé-Gorilla

Human 

Chimpanzee 

Gorilla 

Orango e Macaco

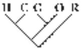
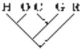
Orangutan 

Rhesus macaque 

Confronto tra Alberi filogenetici

2270 Ebersberger et al.

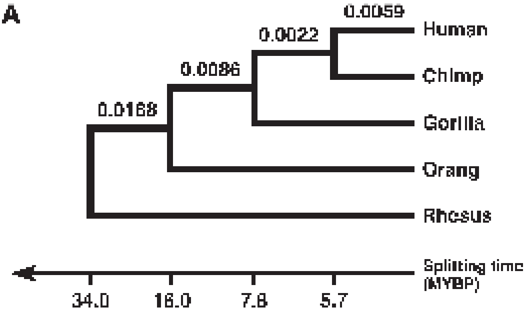
Table 2
Number of Alignments in Support of the 15 Sequence Tree Topologies Featuring the Monophyly of the Great Apes

Topology	All (%)	Gene[a] (%)	Exon[b] (%)
	174 (0.75)	70 (0.72)	15 (1.06)
	13,869 (59.75)	5,869 (60.39)	805 (57.05)
	205 (0.88)	101 (1.04)	23 (1.63)
	15 (0.06)	5 (0.05)	3 (0.21)
	29 (0.12)	14 (0.14)	0 (0)
	50 (0.22)	17 (0.17)	3 (0.21)
	25 (0.11)	12 (0.12)	2 (0.14)
	20 (0.09)	7 (0.07)	1 (0.07)

Allineamento di sequenze di DNA

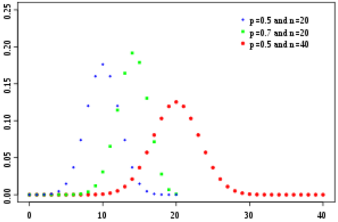
Homo Sapiens	CTGCCTAGCAAACTCAAACTACGAACGCACT...
Scimpanzè	CTGCCTAGCAAACTCAAATTATGAACGCACC...
Gorilla	CTGCCTAGCAAACTCAAACTACGAACGAACC...

Albero filogenetico più probabile

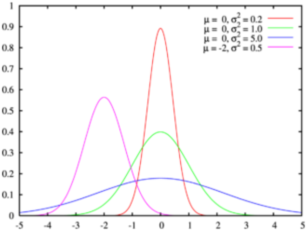


Visione moderna, il continuo approssima il discreto

Il discreto descrive il mondo naturale. Ma è molto complesso...



Usiamo il continuo per approssimarlo.



The end

Grazie dell'attenzione !