Geometria nel piano complesso

Giorgio Ottaviani

Contents

1 Un'introduzione formale del piano complesso

$\sqrt{-9}$ *non est* $+3$ *nec* -3, *sed quaedam tertia natura abscondita. G. Cardano, Ars Magna, 1545*

Una delle possibili introduzioni formali dei numeri complessi si fonda sulle matrici reali.

Definizione 1.1 *Un numero complesso è una matrice* 2×2 *a coefficienti reali della forma*

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

con $x, y \in \mathbf{R}$.

Denotiamo con $\mathbf{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

Proposizione 1.2 *La somma e il prodotto usuale tra matrici inducono su* $\mathbf{C}$ *una struttura di campo.*

Dimostrazione La matrice nulla appartiene a $\mathbf{C}$. $\mathbf{C}$ è chiuso rispetto alla somma e all'opposto. La matrice identità appartiene a $\mathbf{C}$. Il prodotto di due elementi di $\mathbf{C}$

$$\begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -x_1y_2 - y_1x_2 \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{bmatrix}$$

appartiene ancora a $\mathbf{C}$. Questa espressione è simmetrica rispetto allo scambio dell'indice 1 con 2, quindi il prodotto in $\mathbf{C}$ è commutativo, in contrasto con il prodotto generale tra matrici. Infine per l'inverso notiamo che det $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = x^2 + y^2$, quindi tutti gli elementi di $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ sono invertibili ed abbiamo

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

Pertanto l'inverso di un elemento di $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ appartiene ancora a $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Notiamo che la matrice a membro destro è la trasposta della matrice originaria, questo sarà utile tra poco. Le proprietà associativa e distributiva seguono dalle analoghe proprietà delle operazioni tra matrici. $\square$

Dal punto di vista additivo $\mathbf{C}$ è uno spazio vettoriale di dimensione due sui reali, una cui base è data dai due elementi

$$1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $z \in \mathbf{C}$ abbiamo la scrittura $z = x + iy$ dove $x = Re\ z$ si dice la parte reale e $y = Im\ z$ si dice la parte immaginaria. In particolare abbiamo una immersione di campi $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ data dalla variabile x, che mostra $\mathbf{C}$ come un'estensione di $\mathbf{R}$.

È facile verificare la proprietà

$$i^2 = -1$$

infatti $\mathbf{C}$ è isomorfo al quoziente dell'anello polinomiale $\mathbf{R}[t]$ per l'ideale generato da $t^2 + 1$.

La trasposta tra matrici lascia invariato 1, mentre cambia segno a i. Denotiamo con $\overline{z}$ il numero complesso corrispondente alla trasposta della matrice associata a z. Possiamo quindi scrivere $\overline{z} = x - iy$ con le proprietà

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z_1}\ \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$$

$\overline{z}$ si dice il coniugato di z. Il coniugato permette di ricostruire $\mathbf{R}$ a partire da $\mathbf{C}$, precisamente

$$\mathbf{R} = \{z \in \mathbf{C} | \overline{z} = z\}$$

Come è noto, i numeri complessi furono introdotti per la prima volta in Italia nel tardo Rinascimento allo scopo di calcolare le soluzioni dell'equazione di terzo grado. Diventava così possibile parlare di radici di numeri negativi, che avevano preso la dignità di numeri su cui operare solo poco tempo prima.

In questa nota siamo interessati a descrivere i numeri complessi come punti del piano cartesiano, associando a $z = x + iy$ il punto (x, y) o, in modo equivalente, il vettore applicato nell'origine con estremo in (x, y). Abbiamo quindi la parte reale come ascissa e la parte immaginaria come ordinata. I numeri reali corrispondono all'asse delle ascisse (asse reale) e il coniugato corrisponde alla riflessione attraverso l'asse reale. La somma tra numeri complessi corrisponde all'usuale somma vettoriale.

La lunghezza del vettore (x, y) è pari a $\sqrt{x^2 + y^2}$, viene denotata con $|x + iy|$ e si chiama la norma di $x + iy$. È immediato verificare che

$$z\overline{z} = |z|^2 \tag{1}$$

È interessante osservare che

$$\det \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = |x + iy|^2$$

da cui segue

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

Il coniugato è utile anche per descrivere l'inverso. Infatti una conseguenza immediata di (1) è

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Dalla definizione discende subito la seguente proposizione, che enunciamo esplicitamente per il suo interesse

Proposizione 1.3 *L'applicazione* $\mathbf{R}$*-lineare da* $\mathbf{C}$ *in sé associata alla matrice*

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

corrisponde alla moltiplicazione per il numero complesso $x + iy$.

Dimostrazione Basta confrontare le due uguaglianze

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{bmatrix}$$

$$(x + iy)(a + ib) = (ax - by) + i(ay + bx)$$

$\square$

La Prop. 1.3 permette di descrivere geometricamente il prodotto tra numeri complessi.

Conviene rappresentare $z \in \mathbf{C}$ in forma polare.

Proposizione 1.4 Rappresentazione polare dei numeri complessi *Dato* $z \in \mathbf{C}$ *esiste* $\theta \in \mathbf{R}$ *tale che* $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$

Dimostrazione Si tratta di passare alle coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e osservare che $r = |z|$. $\square$

I numeri complessi di norma uno hanno la forma $\cos\theta + i\sin\theta$ e descrivono la circonferenza unitaria centrata nell'origine.

Dalla Prop. 1.4 segue

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = |z| \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

La Prop. 1.3 mostra allora che la moltiplicazione per z consiste nella rotazione di un angolo θ (in verso antiorario) attorno all'origine composta con l'omotetia di centro l'origine e fattore di scala $|z|$. Segue che la moltiplicazione per un numero complesso è sempre una similitudine.

In particolare la moltiplicazione per i consiste nella rotazione di $\frac{\pi}{2}$.

I numeri complessi di norma uno si denotano in forma esponenziale $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

La moltiplicazione per $e^{i\theta}$ consiste quindi nella rotazione di θ.

La ragione di questa notazione puó essere compresa dalle rispettive serie

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Infatti abbiamo

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n\ pari} + \sum_{n\ dispari} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\theta)^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\theta)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Anche se una giustificazione rigorosa delle manipolazioni sulle serie che abbiamo effettuato richiede qualche nozione di analisi, ci limitiamo ad usare per la notazione esponenziale la sola proprietà

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

che è evidente dalla interpretazione geometrica che abbiamo dato (la composizione delle rotazioni di angoli α e β è una singola rotazione di angolo $\alpha+\beta$), o che puó essere verificata agevolmente dalle formule di addizione per sin e cos.

Esercizio 1.5 *Provare che tutte e le sole le similitudini del piano complesso hanno la forma* $f(z) = az + b$ *con* $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. *Il fattore di scala di* f *è* $|a|$.

2 Il teorema di Napoleone

Proposizione 2.1 *I punti w_1, w_2, $w_3 \in \mathbf{C}$ sono i vertici di un triangolo equilatero (in senso antiorario) se e solo se*

$$w_3 - w_1 = e^{\frac{\pi i}{3}}(w_2 - w_1)$$

Dimostrazione Il lato $w_3 - w_1$ si ottiene ruotando di $\frac{\pi}{3}$ il lato $w_2 - w_1$. □

Lemma 2.2 *Sia $w_1 w_2$ un lato di un triangolo equilatero percorso in verso antiorario (risp. orario). Allora il baricentro del triangolo è dato da*

$$\frac{1}{3}\left[w_1(1+e^{-\frac{\pi i}{3}}) + w_2(1+e^{\frac{\pi i}{3}})\right]$$

$$\textit{risp.}\ \frac{1}{3}\left[w_1(1+e^{\frac{\pi i}{3}}) + w_2(1+e^{-\frac{\pi i}{3}})\right]$$

Dimostrazione Per la Prop. 2.1, nel caso antiorario il terzo vertice è dato da

$$w_3 = e^{\frac{\pi i}{3}}w_2 + (1 - e^{\frac{\pi i}{3}})w_1 = e^{\frac{\pi i}{3}}w_2 + e^{-\frac{\pi i}{3}}w_1$$

Quindi il baricentro è dato da

$$\frac{1}{3}(w_1 + w_2 + w_3) = \frac{1}{3}(w_1 + w_2 + e^{\frac{\pi i}{3}}w_2 + e^{-\frac{\pi i}{3}}w_1)$$

come volevamo. Il caso orario è analogo. □

Esercizio 2.3 *(i) Dimostrare che i punti $e^{\frac{2\pi k i}{n}}$ per $k = 0, \ldots, n-1$ corrispondono ai vertici di un poligono regolare di n lati.*

(ii) Dimostrare che i punti precedenti sono tutte e sole le radici dell'equazione $z^n - 1 = 0$ (radici n-essime dell'unità).

(iii) Dimostrare che $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} = 0$

Suggerimento: per provare (iii) si usi (ii)

Una prima applicazione dei numeri complessi alla geometria elementare è data dal

Teorema 2.4 Teorema di Napoleone *Dato un triangolo, si costruisca esternamente su ciascun lato un triangolo equilatero . I baricentri dei tre triangoli equilateri costruiti sono i vertici di un quarto triangolo equilatero.*

Dimostrazione Siano w_1, w_2, w_3 i tre vertici, in verso antiorario. I tre baricentri, per il Lemma 2.2, sono dati da

$$\frac{1}{3}\left[w_1(1+e^{\frac{\pi i}{3}}) + w_2(1+e^{-\frac{\pi i}{3}})\right]$$

$$\frac{1}{3}\left[w_2(1+e^{\frac{\pi i}{3}}) + w_3(1+e^{-\frac{\pi i}{3}})\right]$$

$$\frac{1}{3}\left[w_3(1+e^{\frac{\pi i}{3}})+w_1(1+e^{-\frac{\pi i}{3}})\right]$$

Per la Prop. 2.1 dobbiamo dimostrare che

$$\left[w_3(1+e^{\frac{\pi i}{3}})+w_1(e^{-\frac{\pi i}{3}}-e^{\frac{\pi i}{3}})-w_2(1+e^{-\frac{\pi i}{3}})\right]=e^{\frac{\pi i}{3}}\left[w_2(e^{\frac{\pi i}{3}}-e^{-\frac{\pi i}{3}})+w_3(1+e^{-\frac{\pi i}{3}})-w_1(1+e^{\frac{\pi i}{3}})\right]$$

che segue facilmente dalle tre uguaglianze (ricordando che $e^{\frac{2\pi i}{3}}=-e^{-\frac{\pi i}{3}}$):

$$(e^{-\frac{\pi i}{3}}-e^{\frac{\pi i}{3}})=e^{\frac{\pi i}{3}}(-1-e^{\frac{\pi i}{3}})$$

$$(-1-e^{-\frac{\pi i}{3}})=e^{\frac{\pi i}{3}}(e^{\frac{\pi i}{3}}-e^{-\frac{\pi i}{3}})$$

$$(1+e^{\frac{\pi i}{3}})=e^{\frac{\pi i}{3}}(1+e^{-\frac{\pi i}{3}})$$

□

3 L'inversione circolare

Sia data nel piano complesso una circonferenza Γ di centro O e raggio r. L'inversione circolare rispetto a Γ è l'applicazione biunivoca da $\mathbf{C}\setminus\{O\}$ in sé definita nel modo seguente. L'immagine di $A\in\mathbf{C}\setminus\{O\}$ è il punto A' sulla semiretta OA tale che $|OA|\cdot|OA'|=r^2$.

È immediato verificare che i punti di Γ sono lasciati fissi, mentre i punti interni a Γ vanno in punti esterni e viceversa. Inoltre l'inversione circolare σ è involutoria, cioè soddisfa $\sigma^2=id$.

Proposizione 3.1 *Sia σ l'inversione circolare rispetto a una circonferenza Γ.*

(i) Se r è una retta passante per O allora $\sigma(r)=r$

(ii) Se r è una retta non passante per O allora $\sigma(r)$ è una circonferenza passante per O.

(iii) Se ϕ è una circonferenza passante per O allora $\sigma(\phi)$ è una retta non passante per O.

(iv) Se ϕ è una circonferenza non passante per O allora $\sigma(\phi)$ è una circonferenza non passante per O.

Dimostrazione (i) è banale. Per provare (ii), sia A il piede della perpendicolare condotta da O su r e e sia B un altro punto di r. Siano A', B' le immaginhi di A e B. L'uguaglianza $|OA|\cdot|OA'|=|OB|\cdot|OB'|$ mostra che OBA é simile a $OA'B'$. Quindi l'angolo $O\hat{B'}A'$ è uguale all'angolo $O\hat{A}B$ che è retto. Pertanto B' appartiene alla circonferenza di diametro OA' che risulta essere $\sigma(r)$.

(iii) è analoga a (ii). Per provare (iv), sia AB il diametro di ϕ che prolungato passa per O e C un altro punto di ϕ. Siano A', B', C' le tre immagini. Come nel punto precedente abbiamo che OAC è simile a $OC'A'$, OBC è simile a $OC'B'$. Allora $B'\hat{C'}A'=O\hat{C'}A'-O\hat{C'}B'=O\hat{A}C-O\hat{B}C=A\hat{C}B$ che è retto. Questo mostra che C' appartiene alla circonferenza di diametro $A'B'$ che risulta essere $\sigma(\phi)$. □

L'equazione dell'inversione circolare di centro 0 e raggio 1 è data da

$$z' = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$$

Corollario 3.2 *L'applicazione*

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

porta l'insieme delle rette e circonferenze in sé.

4 Le trasformazioni di Möbius

Definizione 4.1 *Una trasformazione di Möbius è l'applicazione definita da*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ e $ad - bc \neq 0$.

L'applicazione precedente non è definita nel punto $z = -\frac{d}{c}$ (se $c \neq 0$).

Esercizio 4.2 *Sia $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$. Provare che la composizione fg è data da*

$$fg(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

dove

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

Suggerimento: si cerchi di risolvere l'esercizio senza eseguire i calcoli, impostando le notazioni matriciali

L'esercizio precedente mostra anche che l'inversa di una trasformazione di Möbius è ancora una trasformazione di Möbius. Indichiamo con G il gruppo delle trasformazioni di Möbius.

Ogni elemento di G non è definito al più in un punto, notiamo che questo rimane vero per la composizione, cioè se f non è definita in P e g non è definita in Q, allora gf non è definita nel solo punto $f^{-1}(Q)$, e quindi può essere estesa a P se $P \neq f^{-1}(Q)$.

Teorema 4.3 *Il gruppo G delle trasformazioni di Möbius agisce in modo transitivo sull'insieme delle rette e delle circonferenze del piano. Questo significa che se ϕ è una retta o una circonferenza allora esiste $g \in G$ tale che $g(\phi)$ è l'asse reale.*

Dimostrazione Il gruppo G è generato dalle trasformazioni

$$z \mapsto z + b \text{ traslazioni}$$

$$z \mapsto az \text{ similitudini}$$

$$z \mapsto \frac{1}{z} \text{ inversione circolare composta col coniugio}$$

L'immagine di una retta o una circonferenza è ancora una retta o una circonferenza, questo è evidente per le traslazioni e le similitudini, mentre per il caso $z \mapsto \frac{1}{z}$ segue dal Coroll. 3.2. Una qualunque retta può essere portata nell'asse reale componendo opportunamente similitudini e traslazioni. Una qualunque circonferenza può essere portata nella circonferenza ϕ' di centro $\frac{i}{2}$ e raggio $\frac{1}{2}$ componendo opportunamente similitudini e traslazioni. Rimane da osservare che l'inversione circolare rispetto alla circonferenza di centro i e raggio 1 porta ϕ' nell'asse reale (si veda la Prop. 3.1 (iii). □

5 Il birapporto come invariante

Definizione 5.1 *Dati quattro punti distinti* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ *il loro birapporto è definito dall'espressione*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}$$

Teorema 5.2 Invarianza del birapporto per trasformazioni di Möbius *Se* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ *sono quattro punti distinti e* $g \in G$*, vale*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4))$$

Dimostrazione Il teorema è evidente per le trasformazioni generatrici $z \mapsto z+b$, $z \mapsto az$. Per $z \mapsto \frac{1}{z}$ si calcola

$$\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}\right) = \frac{\frac{z_1 - z_3}{z_1 z_3} \frac{z_2 - z_4}{z_2 z_4}}{\frac{z_2 - z_3}{z_2 z_3} \frac{z_1 - z_4}{z_1 z_4}} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

□

Teorema 5.3 *Quattro punti distinti del piano complesso appartengono a una retta o a una circonferenza se e solo se il loro birapporto è reale.*

Supponiamo che z_1, z_2, z_3, z_4 appartengano a una retta o a una circonferenza ϕ. Per il Teor. 4.3 esiste $g \in G$ tale che $g(\phi)$ é l'asse reale. Quindi per il Teor. 5.2

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) \in \mathbf{R}$$

Viceversa supponiamo che $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbf{R}$. Consideriamo la circonferenza ϕ per z_1, z_2, z_3 (oppure la retta nel caso siano allineati). Sappiamo che esiste $g \in G$ tale che $g(\phi)$ è l'asse reale. Allora

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) = \frac{(g(z_3) - g(z_1))(g(z_4) - g(z_2))}{(g(z_3) - g(z_2))(g(z_4) - g(z_1))} \in \mathbf{R}$$

Quindi $\frac{g(z_4)-g(z_2)}{g(z_4)-g(z_1)} \in \mathbf{R}$ da cui segue che i vettori $g(z_4) - g(z_2)$ e $g(z_4) - g(z_1)$ sono paralleli e quindi $g(z_4)$ appartiene all'asse reale. Segue che $z_4 = g^{-1}(g(z_4))$ appartiene a ϕ come volevamo. □

Corollario 5.4 *Se* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ *sono tre punti distinti e non allineati allora la circonferenza passante per* z_1, z_2, z_3 *ha equazione*

$$Im(z_1, z_2, z_3, z) = 0$$

Posto $z_i = x_i + iy_i$, l'equazione precedente si scrive anche in forma reale come

$$\det \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Basta osservare che l'equazione descrive una circonferenza che passa per i tre punti, perché il determinante viene ad avere due righe uguali.

Esercizio Qual é il significato geometrico del fatto che il birapporto di quattro punti é un numero reale positivo?