27 Marzo 2000

3^o Compitino di Geometria 1

Laurea e Diploma in Matematica – A.A.1999/2000

Esercizio 1 Si consideri la matrice:

$$A_z := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1-z \\ z & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove z è un parametro complesso.

a) Determinare i valori $z \in \mathbf{C}$ tali che A_z sia diagonalizzabile.

b) Trovare una matrice (dipendente da z) P_z tale che $P_z^{-1} \cdot A_z \cdot P_z$ sia diagonale.

c) nel caso $z = i$ ($i^2 = -1$), calcolare A_i^{1000}.

Esercizio 2 Sia $\mathbf{R}_2[X]$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado al più 2 e sia $F : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ data da $P(X) \mapsto P(X+1)$ (ossia $F(aX^2 + bX + c) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c$).

a) Dimostrare che F è lineare.

b) Determinare la matrice associata a F: $M_{B,B}(F)$, dove $B = (1, X, X^2)$.

c) Trovare una base C di $\mathbf{R}_2[X]$ tale che $M_{C,B}(F)$ sia la matrice identità.

Esercizio 3 Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine e $C \subset \mathbf{A}$ un insieme convesso.

a) Provare che, per ogni affinitá $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, $f(C)$ é ancora convesso.

b) Provare che esiste una affinitá g tale che $g(C)$ é contenuto strettamente dentro C.