25 MARZO 1999

2^o COMPITINO DI GEOMETRIA 1

LAUREA E DIPLOMA IN MATEMATICA – A.A.1998/99

1] Calcolare $det(A)$ e $det(A^{10})$ dove $A = \begin{bmatrix} 1000 & 1000 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1000 & 1002 & 1003 \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1001 \end{bmatrix}$.

2] Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $F(X) = MX$, dove $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Provare che F è invertibile.

b) Determinare $F^2 = F \circ F$ e F^{-1}

c) Determinare le coordinate di $e_1 = (1,0,0,0)^t$ rispetto alla base formata dalle colonne di M.

3] Fissato un sistema di riferimento ortonormale $(0, x, y, z)$ nello spazio affine $\mathbf{A}^3$, si considerino il punto $Q_0 = (1, 1, 1)$ e la retta r di equazioni $x + y - 3 = 2x + z - 1 = 0$.

a) Determinare la distanza di Q_0 da r.

b) Detta $p_r : \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{A}^3$ su r, mostrare che l'insieme $Pi = \{Q \in \mathbf{A}^3 | p_r(Q) = p_(Q_0)\}$ è un sottospazio affine e trovarne delle equazioni.

c) Trovare la retta ortogonale a Pi e passante per Q_0.

4] Fissato un riferimento $(0, x, y)$ nel piano affine $\mathbf{A}^2$, si considerino i punti $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2(0, 2) =$, $P_3 = (\frac{1}{2}, 1)$, $Q_0 = (1, 0)$, $Q_1 = (0, 1)$, $Q_2 = (1, 1)$ $Q_3 = (\frac{2}{3}, 1)$.

a) Trovare, se esiste, un morfismo affine $f : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $0 \le i \le 2$. Se esiste, f è unica ?

b) Trovare, se esiste, un morfismo affine $g : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ tale che $g(P_j) = Q_j$ per $1 \le j \le 3$. Se esiste, g è unica ?