

**Prova scritta di Geometria II modulo**  
C.d.L. in Matematica, Università degli studi di Firenze  
24 febbraio 2009

**Esercizio 1:** Si consideri, al variare di  $u \in \mathbf{R}$ , la retta  $r_u$  dello spazio euclideo  $\mathbf{A}^3$  definita dalle equazioni parametriche

$$x = t, \quad y = u, \quad z = ut$$

dove  $t$  è il parametro.

1. Si trovi la distanza tra  $r_1$  e  $r_{-1}$ .
2. Si trovi l'equazione cartesiana del piano contenente  $r_3$  e passante per il punto  $(1, 1, -1)$ .

**Esercizio 2:** Nel piano affine  $\mathbf{A}^2$ , al variare del parametro  $a$ , si consideri la conica  $\mathcal{C}_a$  di equazione

$$ax^2 - 6xy + 3y^2 + 2y + a = 0.$$

1. Dare la classificazione affine della conica  $\mathcal{C}_a$  al variare di  $a \in \mathbf{R}$ .
2. Scrivere la forma canonica euclidea di  $\mathcal{C}_3$ .

**Esercizio 3:** Sulla retta proiettiva  $\mathbf{P}^1$  si considerino le seguenti tre quaterne di punti:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se tra le quaterne precedenti ne esistono due proiettivamente equivalenti. In caso negativo motivare la risposta. In caso affermativo esibire la proiettività.