1^o Compitino di Geometria 1, A.A. 2000-2001, 22/11/2000

Laurea e diploma in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1.

i) Si trovi per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile:

$$\begin{cases} x - 2y + tz &= 3 \\ -x + (4+t)y + tz &= t \\ tx + 4y + z &= 2 \end{cases}$$

ii) Si calcoli le eventuali soluzioni del sistema precedente nel caso $t = 0$.

Esercizio 2.

i) Dire se i seguenti sottoinsiemi sono dei sottospazi vettoriali e in caso affermativo calcolarne la dimensione e una base.

a) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | \ x \neq y\} \subseteq \mathbf{R}^3$
b) $\{(t^3, s, t) | \ t, s \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^3$
c) $\{(t^3, s, 0) | \ t, s \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^3$
d) $\{f \in \mathbf{R}_2[x] | \ f(2) + f(0) = 1\} \subseteq \mathbf{R}_2[x]$
e) $\{(\varepsilon + 2\gamma, 3\delta + 3\gamma, \varepsilon + 2\gamma) | \ \varepsilon, \gamma, \delta \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^3$

ii) Siano A e B i due seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$A = \{(a + b, a - b, 2a, 0) | \ a, b \in \mathbf{R}\},$$

$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 | \ x_1 + 3x_4 = 0\}.$$

Calcolare le dimensioni di A, B, $A \cap B$, $A + B$.

Esercizio 3. Sia $A \in M(m \times n, \mathbf{R})$.

i) Dimostrare che $({}^tAA)_{ii} \geq 0$ per $i = 1, ..., n$.
ii) Dimostrare che $tr({}^tAA) = 0$ se e solo se $A = 0$.

Notazioni. $M(m \times n, \mathbf{R})$ è lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbf{R}$.
tr denota la traccia di una matrice quadrata.
$\mathbf{R}_d[x]$ denota lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a d.