Scritto di Geometria 1, A.A. 2000-2001, 16/7/2001
Laurea e diploma in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base standard di $\mathbb{R}^4$ e sia U il sottospazio generato da $\{e_1, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$
a) si trovino equazioni cartesiane di U
b) si trovi per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $u_t = (t, t+1, t+2, t+3)$ appartiene ad U
c) Si trovi una base di $U \cap < e_1, e_2, e_4 >$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia W_a il sottoinsieme di V definito da

$$W_a = \{f \in V | f(1) = f'(1) = a\}$$

a) si provi che W_a é un sottospazio affine di V e se ne calcoli la dimensione al variare di $a \in \mathbb{R}$
b) si determini il sottospazio vettoriale di V parallelo a W_a e se ne trovi una base
c) si determini $a \in \mathbb{R}$ tale che esista $c \in \mathbb{R}$ per cui $(x-c)^3 \in W_a$

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia T un operatore lineare di V tale che $T^2 - 3T + 2I = 0$.
a) si provi che $ker(T - I) \oplus ker(T - 2I) = V$
b) si provi che $Im(T - I) = ker(T - 2I) \qquad Im(T - 2I) = ker(T - I) = V$
c) si provi che T é diagonalizzabile

Esercizio 4. Sia A una matrice simmetrica 3×3 ed A_0 la sua sottomatrice 2×2 in basso a destra. E' noto che $det(A - tI) = -t^3 + 7t^2 - 11t + 5$, $det(A_0 - tI) = t^2 - 6t + 5$.
a) si trovi la segnatura di A
b) si trovi il polinomio caratteristico di A^2
c) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ si consideri la conica C di equazione $(1, x, y) \cdot A \cdot {}^t(1, x, y) = 0$ e la conica C^2 di equazione $(1, x, y) \cdot A^2 \cdot {}^t(1, x, y) = 0$. Si dia la classificazione affine di C e di C^2.