

# Varietà proiettive di codimensione piccola

Giorgio Ottaviani

§0. Introduzione e preliminari	pag.	1
§1. Introduzione alla congettura di Hartshorne		4
§2. Luoghi di degenerazione di morfismi tra fibrati		13
§3. Teorema di Beilinson e sizigie		27
§4. La liaison		41
§5. Altri esempi		46

## APPENDICI

A Lo pfaffiano	pag.	54
B Risoluzioni minimali di moduli e di fasci		55
C Polinomio di Hilbert e funzione di Hilbert		59
D I funtori $Ext$ e $\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}$		61
E Le classi di Chern		63
F Teoremi di annullamento per fibrati ampi		68
Bibliografia	pag.	70

## §0. INTRODUZIONE E PRELIMINARI

Questo quaderno raccoglie le note redatte per il corso “Varietá proiettive di codimensione piccola” organizzato dall’INDAM a Firenze dal 3 al 7 Ottobre 1994. Desidero ringraziare l’Istituto Nazionale di Alta Matematica e in particolare il Prof. Ciro Ciliberto che hanno reso possibile lo svolgimento del corso. Sono grato a tutti i partecipanti che con le loro osservazioni hanno contribuito alla scrittura di queste note.

Col termine varietá (proiettiva) indicheremo un sottoinsieme  $X \subset \mathbf{P}^n = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  definito come luogo degli zeri comuni di un insieme  $\{f_1, \dots, f_k\}$  di polinomi omogenei.

$X$  ha una struttura naturale di schema definita da  $Proj \frac{\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]}{(f_1, \dots, f_k)}$ . Sullo stesso insieme  $X$  ci sono piú strutture di schema. Il termine varietá viene riservato al caso in cui l’anello  $\frac{\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]}{(f_1, \dots, f_k)}$  é ridotto, cioè non ha elementi nilpotenti escluso lo zero. Talvolta si chiede che l’anello sia ridotto ed anche irriducibile (i.e. integro) ma questo non fa una differenza essenziale perché si può decomporre ogni schema proiettivo nelle sue componenti irriducibili.

Su ogni luogo degli zeri  $X$  di un insieme di polinomi  $\{f_1, \dots, f_k\}$  c’è una struttura naturale (unica!) di varietá data da  $Proj \frac{\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]}{I(X)}$ , infatti  $\frac{\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]}{I(X)}$  é un anello ridotto.

Saremo interessati soprattutto alle varietá lisce (nonsingolari), che sono le sottovarietá complesse di  $\mathbf{P}^n$  visto come varietá complessa. La dimensione di  $X$  é allora la dimensione (su  $\mathbf{C}$ ) della varietá complessa corrispondente. Nell’ambito algebrico la dimensione si può definire come il grado del polinomio di Hilbert (vedi appendice C, questa definizione funziona anche per schemi qualunque).

Una varietá  $X$  definita da  $f_1, \dots, f_k$  é liscia se e solo se il rango della matrice jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_0} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

é uguale alla codimensione di  $X$  in tutti i punti di  $X$ . Posto  $F_i := \{f_i = 0\}$  (ipersuperfici), l’interpretazione geometrica della condizione precedente sul rango é la seguente:  $\forall x \in X$  l’intersezione degli spazi tangenti  $\cap_{i=1}^k T_x F_i(x)$  é uno spazio lineare di dimensione uguale alla dimensione di  $X$  (ed infatti é uguale a  $T_x X$ ). In questo caso si dice che l’intersezione tra  $F_1, \dots, F_k$  é *trasversa*.

Identificheremo i fibrati vettoriali con i fasci localmente liberi corrispondenti. Talvolta denotiamo con  $V(E)$  la varietá fibrata associata ad un fascio localmente libero  $E$  (vedi [Ha] II ex. 5.18).

Naturalmente due varietà possono essere isomorfe pur avendo differenti immersioni proiettive (tutte le curve razionali lisce sono isomorfe tra loro).

Il modo piú semplice di costruire un isomorfismo é di proiettare una varietà  $X \subset \mathbf{P}^n$  da un punto  $P \notin X$  su un iperpiano  $\mathbf{P}^{n-1} \subset \mathbf{P}^n$ . Notiamo che 2 punti su  $X$  allineati con  $P$  hanno la stessa immagine attraverso la proiezione. Si può verificare (vedi ad esempio [Har92] pag. 193) che se  $X$  é nonsingolare allora la sua immagine attraverso la proiezione  $\pi_P: X \rightarrow \mathbf{P}^{n-1}$  é ancora nonsingolare se e solo se nessuna retta secante o tangente a  $X$  incontra  $P$ . La varietà secante a una varietà  $X$  di dimensione  $m$  ha dimensione  $\leq 2m + 1$ , pertanto se  $n > 2m + 1$  si può trovare  $P \in \mathbf{P}^n$  tale che  $\pi_P$  é un isomorfismo. Iterando questo procedimento si verifica che ogni varietà  $X$  di dimensione  $m$  si può immergere in  $\mathbf{P}^{2m+1}$ .

Ad esempio ogni curva liscia  $C \subset \mathbf{P}^n$  é isomorfa ad una curva  $C' \subset \mathbf{P}^3$ . Ogni superficie liscia  $S \subset \mathbf{P}^n$  é isomorfa a  $S' \subset \mathbf{P}^5$ .

Le varietà  $X \subset \mathbf{P}^n$  lisce di dimensione  $m$  con  $2m \geq n$  (come ad esempio le curve piane o le superfici in  $\mathbf{P}^4$ ) vengono quindi considerate come dei casi “speciali” e sono chiamate con il nome (volutamente vago) di *varietà di codimensione piccola*. Talvolta questo nome viene riservato al caso  $m > \frac{2n}{3}$  (codimensione ancora piú piccola!) o addirittura ai casi di codimensione 1, 2 o 3.

Un teorema di Severi del 1901 afferma che l’unica superficie liscia in  $\mathbf{P}^4$  che si ottiene come proiezione di una superficie in  $\mathbf{P}^5$  (non contenuta in un iperpiano) é la superficie di Veronese. Per costruire superfici lisce in  $\mathbf{P}^4$  occorre quindi lavorare direttamente in  $\mathbf{P}^4$ .

La tecnica piú semplice per costruire una varietà proiettiva liscia in  $\mathbf{P}^n$  consiste nello scrivere direttamente  $k$  ipersuperfici che si tagliano trasversalmente in una varietà di dimensione  $n - k$ . Le varietà di questo tipo si dicono *intersezione completa* ed é facile ricavare molte loro proprietà (topologiche, coomologiche, geometriche).

Una delle prime sorprese che si incontra nello studio della geometria algebrica é che non tutte le varietà sono intersezione completa. Cioé per definire una varietà proiettiva occorre in generale un numero di polinomi maggiore di quanto ci si aspetterebbe dalla sua dimensione.

Svilupperemo altre tecniche di costruzione di varietà proiettive lisce (luoghi di degenerazione di morfismi tra fibrati, liaison, ...). Tutte queste tecniche falliscono in modo naturale nel dare esempi di codimensione (molto) piccola che non siano intersezioni complete, e questa osservazione conduce in modo naturale verso la congettura di Hartshorne, che viene introdotta nel primo capitolo.

La congettura afferma che tutte le varietà  $X \subset \mathbf{P}^n$  lisce tali che  $\text{codim } X < \frac{n}{3}$  sono intersezione completa. Il fascino di questa congettura, formulata nel 1974 e tuttora non risolta, risiede soprattutto nel suo carattere elementare. Non é necessario conoscere né la coomologia dei fasci né il linguaggio degli schemi per capirla ed apprezzarne il significato.

D'altro canto un campo interessante di studio é rappresentato dalle superfici in  $\mathbf{P}^4$  e dalle 3-fold in  $\mathbf{P}^5$  (e in  $\mathbf{P}^6$ ). Queste varietà hanno codimensione piccola, ma ancora fuori dalla limitazione prevista dalla congettura di Hartshorne. Nondimeno ci sono forti limitazioni per la loro esistenza. Valga ad esempio il risultato di Ellingsrud e Peskine secondo cui le superfici lisce non di tipo generale (in particolare razionali) in  $\mathbf{P}^4$  sono solo un numero finito (o meglio formano un numero finito di famiglie). Questo teorema apre la strada ad una possibile classificazione. Non é noto se le 3-fold in  $\mathbf{P}^6$  non di tipo generale formano un numero finito di famiglie; questo risultato é vero per 3-fold in  $\mathbf{P}^5$ .

Le tecniche di costruzione appena menzionate permettono di trovare molti esempi interessanti di superfici in  $\mathbf{P}^4$  e 3-fold in  $\mathbf{P}^5$  non di tipo generale. Seguendo le parole suggestive di Peskine: *“they form an exciting but disparate set in which it seems difficult to find a unity, hence to find a reason for which these surfaces should be exceptions to a natural theorem”*.

Rimandiamo alla bibliografia per ulteriori approfondimenti. Una bibliografia piú ampia si puó trovare in [DP].

## §1. INTRODUZIONE ALLA CONGETTURA DI HARTSHORNE

**Esercizio.** Sia  $f$  un polinomio omogeneo irriducibile in  $x_0, \dots, x_n$ . Provare che  $Z = \{x \in \mathbf{P}^n \mid f(x) = 0\}$  é una varietà irriducibile di dimensione  $n - 1$ .

*Soluzione* Se  $Z = Z_1 \cup Z_2$  con  $Z_1, Z_2$  varietà proiettive diverse da  $Z$ , esiste un polinomio  $g$  che si annulla su  $Z_1$  ma non su  $Z$  ed esiste un polinomio  $h$  che si annulla su  $Z_2$  ma non su  $Z$ . Allora  $gh$  si annulla su  $Z$  e per il teorema degli zeri di Hilbert  $(gh)^m \in (f)$  per qualche intero  $m$ . Siccome  $f$  é irriducibile abbiamo che  $f$  divide  $g$  (e quindi  $g$  si annulla su  $Z$ ) oppure  $f$  divide  $h$  (e quindi  $h$  si annulla su  $Z$ ). Entrambi i casi portano quindi ad una contraddizione.

Piú brevemente potevamo risolvere l'esercizio applicando il fatto che  $Z$  é irriducibile se e solo se l'ideale  $I(Z)$  é primo, questo fatto é essenzialmente contenuto nella soluzione proposta.

Il nostro punto di partenza é il seguente

**Teorema 1.1.** Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  una varietà di dimensione  $n - 1$ . Allora esiste un polinomio omogeneo  $f$  tale che  $X = \{x \in \mathbf{P}^n \mid f(x) = 0\}$ .

*Dimostrazione* Possiamo supporre  $X$  irriducibile, data dalle equazioni  $f_1 = \dots = f_s = 0$ . In particolare  $X \subset \{x \mid f_1(x) = 0\}$ . Scomponendo  $f_1$  come prodotto di fattori irriducibili abbiamo

$$X \subset \{x \mid f_{11}(x) = 0\}$$

dove  $f_{11}$  é irriducibile (é uno dei fattori di  $f_1$ ). Questa é un'inclusione tra varietà irriducibili della stessa dimensione per l'esercizio precedente ed é quindi un'uguaglianza.

Il teorema precedente vale anche per schemi  $X \subset \mathbf{P}^n$  di dimensione  $n - 1$  su un campo algebricamente chiuso qualunque, in questo caso é equivalente al teorema dell'ideale principale di Krull (vedi [Ha] teor. I 1.11A, prop. I 1.13 ed esercizio I 2.8).

La dimostrazione del teorema 1.1 non si estende al caso in cui  $\dim X = n - 2$ . Il punto cruciale é che se  $f, g$  sono polinomi irriducibili la varietà  $\{x \mid f(x) = g(x) = 0\}$  puó non essere irriducibile! Pertanto l'analogo dell'esercizio iniziale non vale. Questo é mostrato dal seguente

**Esempio.** La cubica gobba. Consideriamo il morfismo  $f: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^3$  dato da  $f(s, t) = (s^3, s^2t, st^2, t^3)$ .

Sia  $C$  la curva razionale definita dall'immagine di  $f$ . Quindi se  $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in C$

$\exists (s, t) \neq (0, 0)$  tali che:

$$\begin{aligned}x_0 &= s^3 \\x_1 &= s^2t \\x_2 &= st^2 \\x_3 &= t^3\end{aligned}$$

Tagliando  $C$  con un piano si trova un'equazione di terzo grado in  $s, t$  e quindi  $\deg C = 3$ . É facile verificare che  $C \subset \{x_0x_3 - x_1x_2 = x_0x_2 - x_1^2 = 0\}$  ma la varietà a destra contiene anche la retta  $L := \{x_0 = x_1 = 0\}$  che non é contenuta in  $C$ , precisamente  $\{x_0x_3 - x_1x_2 = x_0x_2 - x_1^2 = 0\} = C \cup L$ . Si dice che  $L$  é residua, o meglio che  $C$  e  $L$  sono *legate* (si usa spesso il termine francese *liaison*). Questo é in accordo con il teorema di Bezout per cui l'intersezione (trasversa) di due quadriche deve avere grado  $2 \cdot 2 = 4$ . Occorre aggiungere la terza equazione  $x_1x_3 - x_2^2 = 0$  per ottenere  $C$ , vale a dire  $C = \{x_0x_3 - x_1x_2 = x_0x_2 - x_1^2 = x_1x_3 - x_2^2 = 0\}$ . Osserviamo anche che le tre quadriche sono trasverse, cioè in ogni punto di  $C$  l'intersezione tra i piani tangenti alle tre quadriche coincide con la retta tangente a  $C$ .

**Esercizio.** *Provare rigorosamente tutte le affermazioni fatte nell'esempio precedente. Provare inoltre che le prime due quadriche si incontrano in modo non trasverso in un solo punto di  $C$  (quale?). Provare che  $L$  é tangente a  $C$ .*

L'esempio precedente conduce alla seguente:

**Definizione.** *Una varietà  $X \subset \mathbf{P}^n$  nonsingolare di codimensione  $c$  si dice intersezione completa se é intersezione trasversa di  $c$  ipersuperfici  $F_1, \dots, F_c$ . Se  $\deg F_i = d_i$  questo equivale a dire che il morfismo  $\oplus \mathcal{O}(-d_i)^{F_1, \dots, F_c} \mathcal{I}_X$  é suriettivo.*

Il teorema 1.1 può quindi essere letto come l'affermazione che le sottovarietà di codimensione 1 sono intersezione completa.

**Esercizio..** *Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  una varietà liscia intersezione completa di  $c$  ipersuperfici  $F_1, \dots, F_c$ . Provare che  $F_1, \dots, F_c$  sono lisce lungo  $X$ .*

**Esercizio.** *Provare che come insieme la cubica gobba  $C$  é data dalle equazioni*

$$\begin{vmatrix}x_0 & x_1 \\x_1 & x_2\end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix}x_0 & x_1 & x_2 \\x_1 & x_2 & x_3 \\x_2 & x_3 & 0\end{vmatrix} = 0$$

Provare che l'intersezione non é trasversa. Nel linguaggio degli schemi le due equazioni precedenti definiscono una struttura doppia su  $C$ . Per una generalizzazione si veda [Ve].

**Esercizio.** Provare che una curva in  $\mathbf{P}^3$  non piana di grado primo non può essere intersezione completa.

**Esercizio.** Provare che una varietà  $X \subset \mathbf{P}^n$  di codimensione  $c$  e grado prodotto di  $p$  numeri primi con  $p \leq c - 1$  non può essere intersezione completa.

**Proposizione 1.2.** Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  intersezione completa di  $c$  ipersuperfici di gradi  $d_1, \dots, d_c$ . Allora  $K_X = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-n - 1 + \sum d_i)|_X$

*Dimostrazione* Basta iterare la formula di aggiunzione ([GH] pag.147)

**Definizione.** Una varietà  $X \subset \mathbf{P}^n$  si dice sottocanonica se  $K_X = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(a)|_X$  per qualche  $a \in \mathbf{Z}$ .

Per la proposizione 1.2 le varietà intersezione completa sono sottocanoniche.

Osserviamo che la cubica gobba  $C$  ha fibrato canonico che non é la restrizione a  $C$  di un fibrato in rette su  $\mathbf{P}^3$ , infatti  $\deg K_C = -2$  mentre  $\deg \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(a)|_C = 3a$ . Quindi la proposizione 1.2 fornisce un' altra proprietà che vieta a  $C$  di essere intersezione completa!

**Esempio.** L'intersezione trasversa di due quadriche in  $\mathbf{P}^3$  ha  $K = \mathcal{O}$  e quindi é una curva ellittica.

**Esercizio.** Provare che le varietà in  $\mathbf{P}^n$  intersezione completa (di codimensione  $c$ ) non di tipo generale hanno grado limitato.

*Suggerimento:* basta osservare che  $\sum d_i \leq n + 1$  con le notazioni della proposizione 1.2

Le intersezioni complete hanno topologia particolarmente semplice.

Il caso delle ipersuperfici viene considerato dal

**Teorema di Lefschetz sulle sezioni iperpiane 1.3.** ([GH] pag. 156). Sia  $M \subset \mathbf{P}^n$  una sottovarietà nonsingolare di dimensione  $d$  e  $V \subset M$  l'intersezione di  $M$  con una ipersuperficie. Se  $V$  é nonsingolare di dimensione  $d - 1$  allora i morfismi di restrizione

$$H^i(M, \mathbf{C}) \longrightarrow H^i(V, \mathbf{C})$$

sono isomorfismi per  $i \leq d - 2$

Storicamente il teorema ha preso il nome dalle sezioni iperpiane. Si può passare direttamente dal caso degli iperpiani a quello delle ipersuperfici immergendo con il morfismo di Veronese.

Iterando il teorema precedente per sottovarietà intersezione completa di  $\mathbf{P}^n$  si ottiene il seguente

**Corollario 1.4.** *Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  una varietà intersezione completa di dimensione  $d$ . Allora i morfismi di restrizione*

$$H^i(\mathbf{P}^n, \mathbf{C}) \longrightarrow H^i(X, \mathbf{C})$$

*sono isomorfismi per  $i \leq d - 1$*

Il teorema 1.3 ed il corollario 1.4 valgono anche per il fascio  $\mathbf{Z}$  al posto del fascio  $\mathbf{C}$ .

In particolare i numeri di Betti  $b_i = \dim_{\mathbf{C}} H^i(X, \mathbf{C})$  sono uguali a 1 se  $i$  è pari e a 0 se  $i$  è dispari con l'unica eccezione  $i = d$  (gruppo di coomologia intermedio). Inoltre le intersezioni complete non hanno torsione in coomologia (e quindi neanche in omologia). Il gruppo  $H^d(X, \mathbf{Z})$  può essere calcolato conoscendo la caratteristica di Eulero-Poincaré che a sua volta si può trovare dalla formula di Gauss-Bonnet. Vedremo questo calcolo nel capitolo 5 (vedi ad esempio la proposizione 5.4) dove svilupperemo anche il calcolo dei numeri  $h^{p,q}(X)$

**Esempio.** *La varietà di Segre  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2 \subset \mathbf{P}^5$  non è intersezione completa. Infatti il gruppo di coomologia  $H^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2, \mathbf{C})$  è uguale a  $\mathbf{C}^2$  dalla formula di Künneth mentre per il corollario 1.4 dovrebbe essere uguale a  $\mathbf{C}$ .*

W.Barth ha provato nel 1970 che le sottovarietà proiettive di codimensione “piccola” hanno topologia simile alle intersezioni complete. Questo risultato ha una grossa importanza storica perché ha portato Hartshorne a formulare 4 anni più tardi la sua congettura. Riportiamo l'enunciato del teorema di Barth insieme alla dimostrazione data da Hartshorne (più semplice di quella originaria).

**Teorema 1.5.(Barth).** *Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  una varietà nonsingolare di dimensione  $m$ . Il morfismo di restrizione*

$$H^i(\mathbf{P}^n, \mathbf{C}) \longrightarrow H^i(X, \mathbf{C})$$

*è un isomorfismo se  $i \leq 2m - n$*

Prima di procedere alla dimostrazione occorre ricordare alcuni fatti.

Su  $X$  varietà nonsingolare è definito un *cup product*

$$\begin{aligned} H^i(X, \mathbf{C}) \times H^j(X, \mathbf{C}) &\longrightarrow H^{i+j}(X, \mathbf{C}) \\ (A, B) &\mapsto [A] \cup [B] \end{aligned}$$

Mediante il teorema di De Rham il cup product corrisponde al prodotto esterno (wedge) tra forme. È duale all'intersezione tra cicli. Inoltre se  $j: X \rightarrow Y$  è una immersione tra varietà nonsingolari con  $\dim_{\mathbf{C}} X = m$ ,  $\dim_{\mathbf{C}} Y = n$  è definito un morfismo di Gysin  $j_*: H^i(X, \mathbf{C}) \rightarrow H^{2(n-m)+i}(Y, \mathbf{C})$  che corrisponde a considerare cicli di codimensione (reale)  $i$  in  $X$  come cicli di codimensione  $2(n-m)+i$  in  $Y$ . Vale  $j_* \circ j^*(Y) = Y \cup [X]$  e  $j^* \circ j_*(Z) = Z \cup j^*[X]$

Vale il



**Hard Lefschetz Theorem 1.6.** ([GH] pag. 122) Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  di dimensione (complessa)  $m$ , e sia  $H \in H^2(X, \mathbf{C})$  la classe di coomologia di una sezione iperpiana. Sia  $0 \leq i \leq m$ . Il cup product  $\cup H^s: H^i(X, \mathbf{C}) \rightarrow H^{i+2s}(X, \mathbf{C})$  é un isomorfismo per  $s = m - i$  e quindi é iniettivo per  $s \leq m - i$ .

*Dimostrazione del teorema 1.5.* Sia  $d = \deg X$ , quindi abbiamo  $[X] = dh^{n-m}$ ,  $j^*[X] = dH^{n-m}$ . Consideriamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathbf{P}^n, \mathbf{C}) & \xrightarrow{j^*} & H^i(X, \mathbf{C}) \\ \downarrow \cup dh^{n-m} & \swarrow j_* & \downarrow \cup dH^{n-m} \\ H^{i+2(n-m)}(\mathbf{P}^n, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\tilde{j}^*} & H^{i+2(n-m)}(X, \mathbf{C}) \end{array}$$

Abbiamo che  $\cup dh^{n-m}$  é sempre un isomorfismo per  $0 \leq i \leq m$ , quindi  $j_*$  é suriettiva. Per Hard Lefschetz il morfismo  $\cup dH^{n-m}$  é iniettivo se  $n - m \leq m - i$ , vale a dire se  $i \leq 2m - n$ . Quindi  $j_*$  é iniettivo ed é un isomorfismo. Pertanto anche  $j^*$  é un isomorfismo.

**Osservazione.** Schneider e Zintl [SZ] hanno provato il teorema di Barth come conseguenza del teorema di annullamento di Le Potier per fibrati ampi.

**Esercizio.** Sia  $X$  una 3-fold liscia in  $\mathbf{P}^5$ . Provare che  $H^1(X, \mathbf{C}) = 0$ . Dedurre dalla decomposizione di Hodge che  $h^{1,0}(X) = 0$ .

Finalmente siamo arrivati alla

**Congettura di Hartshorne.** [Har74] (1974) Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  una varietà liscia di dimensione  $m$ . Se  $m > \frac{2}{3}n$  allora  $X$  é intersezione completa.

Se  $m = \frac{2}{3}n$  (e quindi al bordo della congettura di Hartshorne) ci sono due esempi classici di varietà lisce che non sono intersezione completa, e cioè:

1.  $Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^4) \subset \mathbf{P}^9$
2. la varietà spinoriale  $S_{10} \subset \mathbf{P}^{15}$ .

Come vedremo nel capitolo 2 si possono costruire infiniti esempi di varietà lisce non intersezione completa di dimensione 6 in  $\mathbf{P}^9$  e di dimensione 10 in  $\mathbf{P}^{15}$ . Alcuni di questi si ottengono semplicemente attraverso il pullback per morfismi finiti  $\mathbf{P}^9 \rightarrow \mathbf{P}^9$  e  $\mathbf{P}^{15} \rightarrow \mathbf{P}^{15}$ . Si conoscono esempi di varietà lisce non intersezione completa di dimensione  $m$  in  $\mathbf{P}^n$  per  $m \gg 0$  soltanto con  $m \sim \frac{1}{2}n$ : gli esempi piú semplici si ottengono come proiezione delle varietà di Veronese  $\nu_2(\mathbf{P}^n)$  definite dalle quadriche ( si veda il capitolo 2 per un calcolo della varietà secante a  $\nu_2(\mathbf{P}^n)$ ).

**Problema.** Costruire (se esistono!) delle varietà di dimensione  $m$  lisce non intersezione completa in  $\mathbf{P}^n$  per  $m \gg 0$  con  $m \sim \alpha n$  e  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

**Problema.** Esiste una varietà liscia non intersezione completa di dimensione 8 in  $\mathbf{P}^{12}$  ?

**Definizione.** Una varietà  $X \subset \mathbf{P}^n$  di dimensione  $m$  si dice aritmeticamente Cohen-Macaulay (brevemente aCM) se  $H^i(\mathcal{I}_X(t)) = 0$  per  $1 \leq i \leq m \forall t \in \mathbf{Z}$

**Proposizione 1.7.** Le varietà intersezione completa sono aCM

*Dimostrazione* Sia  $X$  intersezione trasversa di  $c$  ipersuperfici  $F_1, \dots, F_c$  con  $\deg F_i = d_i$ . Abbiamo  $c = n - m$  Poniamo  $E = \bigoplus \mathcal{O}(-d_i)$ . La tesi segue subito dal complesso di Koszul (vedi (2.12) )

$$0 \longrightarrow \wedge^c E \longrightarrow \dots \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

usando che la coomologia intermedia di  $\wedge^i E$  é nulla.

**Corollario 1.8.** Sia  $X$  intersezione completa di  $c$  ipersuperfici  $F_1, \dots, F_c$ . Allora l'ideale omogeneo  $I(X)$  é generato da  $F_1, \dots, F_c$

*Dimostrazione* Con le notazioni della dimostrazione precedente abbiamo che

$$H^0(\bigoplus \mathcal{O}(-d_i + t)) \xrightarrow{F_1, \dots, F_c} H^0(I_X(t)) \simeq I(X)_t$$

é suriettiva  $\forall t \geq 0$ .

Larsen ha provato nel 1975, con l'uso della teoria di Morse, che il teorema 1.5 di Barth vale anche per la coomologia a coefficienti in  $\mathbf{Z}$ . Precisamente:

**Teorema di Larsen 1.9.** ([Lar]) Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  una varietà nonsingolare di dimensione  $m$ . Il morfismo di restrizione

$$H^i(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^i(X, \mathbf{Z})$$

é un isomorfismo se  $i \leq 2m - n$

**Corollario 1.10.** Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  una varietà nonsingolare di dimensione  $m$ . Se  $m \geq \frac{n+2}{2}$  allora  $\text{Pic}(X) = \mathbf{Z}$  é generato dalla sezione iperpiana. In particolare  $X$  é sottocanonica.

**Esercizio.** Dimostrare il corollario 1.10.

*Suggerimento:* Si ricordi che  $\text{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}^*)$  e si consideri la successione di coomologia associata alla successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

La congettura di Hartshorne afferma in particolare che le varietà nonsingolari in  $\mathbf{P}^n$  di codimensione 2 sono intersezione completa se e solo se  $n \geq 7$ . Osserviamo però che dal

corollario 1.10 discende che le varietà nonsingolari in  $\mathbf{P}^n$  di codimensione 2 sono sottocanoniche già per  $n \geq 6$ .

Il caso della codimensione 2 è particolarmente importante: oltre ad essere il primo caso che si incontra dopo quello della codimensione 1 che è risolto dal teorema 1.1, permette di utilizzare uno strumento tecnico in più: la corrispondenza di Hartshorne-Serre. Solo recentemente, un teorema di C. Walter (vedi [Wal94]) introduce una corrispondenza simile (ma non analoga) che permette di affrontare il caso della codimensione 3.

**Lemma 1.11.** *Sia  $X \subset Y$  una inclusione tra varietà nonsingolari.  $K_X$  si estende ad un fibrato in rette su  $Y$  (cioè  $X$  è sottocanonica) se e solo se  $\det N_{X,Y}$  si estende ad un fibrato in rette su  $Y$ .*

*Dimostrazione* Immediata dalla formula di aggiunta

$$K_X \simeq K_{Y|X} \otimes \det N_{X,Y}$$

(si veda [GH] pag. 147)

Vedremo nel capitolo 2 che se  $X \subset Y$  è luogo degli zeri di una sezione di un fibrato su  $Y$ , allora  $N_{X,Y}$  si estende ad un fibrato su  $Y$ . Quindi una condizione necessaria affinché  $X = \{s = 0\}$  con  $s \in H^0(E)$  e  $E$  fibrato su  $Y$  è che  $\det N_{X,Y}$  si estenda ad un fibrato su  $Y$  cioè per il lemma precedente che  $Y$  sia sottocanonica. Il punto centrale della corrispondenza di Hartshorne-Serre è che questa condizione è anche sufficiente in codimensione 2 a patto di avere alcuni annullamenti coomologici, che sono sempre verificati se  $Y = \mathbf{P}^n$ .

**Corrispondenza di Hartshorne-Serre 1.12.** *Sia  $X \subset Y$  localmente intersezione completa di codimensione 2. Supponiamo che  $\det N_{X,Y}$  si estenda ad un fibrato  $L$  su  $Y$ .*

- i) *Se  $H^2(Y, L^*) = 0$  allora anche  $N_{X,Y}$  si estende ad un fibrato  $E$  su  $Y$  e  $X$  è luogo degli zeri di una sezione di  $E$ .*
- ii) *Se  $H^1(Y, L^*) = 0$  e  $X$  è ridotto e connesso l'estensione è unica.*

**Corollario 1.13.** *Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  ( $n \geq 3$ ) nonsingolare di codimensione 2 e sottocanonica. Allora esiste un fibrato  $E$  di rango 2 su  $\mathbf{P}^n$  e  $s \in H^0(E)$  tale che  $X = \{s = 0\}$ .  $X$  è intersezione completa se e solo se  $E$  è decomponibile.*

Se  $n \geq 6$  l'ipotesi sottocanonica nel corollario precedente è superflua per il corollario 1.10. Quindi la congettura di Hartshorne in codimensione 2 equivale a:

**Riformulazione della congettura di Hartshorne in codim 2.** *Tutti i fibrati  $E$  di rango 2 su  $\mathbf{P}^n$  si spezzano come somma di 2 fibrati in rette se  $n \geq 7$ , cioè  $E \simeq \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$  per qualche  $a, b \in \mathbf{Z}$ .*

Hartshorne stesso [Ha] estende questa congettura al caso  $n \geq 6$ , ma la mancanza di controesempi fa ritenere che l'enunciato precedente sia vero addirittura per  $n \geq 5$ . Su  $\mathbf{P}^4$

é noto essenzialmente un solo fibrato di rango 2 indecomponibile, il fibrato di Horrocks-Mumford. É noto che tale fibrato non si estende a  $\mathbf{P}^5$ , cioè non si può ottenere come restrizione ad un iperpiano di un fibrato su  $\mathbf{P}^5$ .

*Cenno alla dimostrazione della corrispondenza di Hartshorne-Serre 1.12.* Se  $E$  esiste appare in una successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_X \otimes L \longrightarrow 0 \quad (1.14)$$

(é un caso particolare di complesso di Koszul, vedi (2.12)).

Le estensioni del tipo

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow ? \longrightarrow \mathcal{I}_X \otimes L \longrightarrow 0$$

sono classificate da  $Ext^1(\mathcal{I}_X \otimes L, \mathcal{O})$ . Applicando la successione che lega  $Ext^1$  e  $\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}^1$  (vedi appendice D) ed usando che  $\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}_X(\mathcal{I}_X \otimes L, \mathcal{O}_Y) \simeq L^*$  si ottiene

$$H^1(L^*) \longrightarrow Ext^1(\mathcal{I}_X \otimes L, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}^1(\mathcal{I}_X, L^*)) \longrightarrow H^2(L^*)$$

Dalla successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \otimes L \longrightarrow L \longrightarrow L|_X \longrightarrow 0$$

applicando il funtore  $\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}(-, \mathcal{O})$  si ricava

$$\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}^1(\mathcal{I}_X \otimes L, \mathcal{O}) = \mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}^1(\mathcal{I}_X, L^*) \simeq \mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}^2(\mathcal{O}_X, L^*)$$

e dall'isomorfismo locale fondamentale (vedi appendice D) segue

$$\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}^2(\mathcal{O}_X, L^*) \simeq \det N_{X,Y} \otimes L^* \simeq \mathcal{O}_X$$

. Quindi con l'ipotesi  $H^2(L^*) = 0$  la successione esatta (1.14) diventa

$$H^1(L^*) \longrightarrow Ext^1(\mathcal{I}_X \otimes L, \mathcal{O}) \xrightarrow{\phi} H^0(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

e  $\phi^{-1}(1)$  definisce un fascio  $E$  come nella successione (1.14). Se  $H^1(L^*) = 0$  e  $H^0(X) \simeq \mathbf{C}$  allora il fascio  $E$  é unico. Per mostrare che  $E$  é localmente libero si veda [OSS].

**Esempio.** Prendiamo  $C = L_1 \cup \dots \cup L_{k+1}$  unione disgiunta di  $k+1$  rette in  $\mathbf{P}^3$ . Abbiamo  $K_C = \mathcal{O}(-2)|_C$ . Per la corrispondenza di Hartshorne-Serre esiste un fibrato  $E(1)$  di rango 2 su  $\mathbf{P}^3$  tale che  $E(1)|_C \simeq N_{C, \mathbf{P}^3}$ , quindi in particolare  $E$  é banale su  $C$ .  $E$  é un esempio di fibrato istantone con  $c_1 = 0$  e  $c_2 = k$ . Abbiamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow \mathcal{I}_C(2) \longrightarrow 0$$

**Osservazione.** *La dimostrazione della corrispondenza di Hartshorne-Serre si basa sul fatto che  $Ext^1$  classifica le estensioni tra due fasci. Per ottenere una corrispondenza analoga per varietà di codimensione 3 è naturale sfruttare la relazione che c'è tra  $Ext^2$  ed estensioni date da successioni di 4 termini. Tentativi in questa direzione non hanno per ora portato a conclusioni definitive [Arr94]. Vedremo nel capitolo 2 che un'altra strada è stata aperta recentemente dal teorema di Walter sulle varietà pfaffiane.*

**Osservazione.** *Esistono esempi di curve sottocanoniche in  $\mathbf{P}^4$  che non sono zeri di sezione di un fibrato [Chang].*

## §2. LUOGHI DI DEGENERAZIONE DI MORFISMI TRA FIBRATI

Siano  $E, F$  fibrati vettoriali sulla varietà  $X$  e sia  $E \xrightarrow{\phi} F$  un morfismo. Definiamo

$$D_k(\phi) = \{x \in X \mid rk(\phi_x) \leq k\}$$

Notiamo che  $\forall x \in X$   $\phi_x$  é un morfismo tra spazi vettoriali e quindi  $\phi$  puó essere pensato come una famiglia di morfismi tra spazi vettoriali.  $D_k(\phi)$  ha una struttura naturale di sottoschema di  $X$  definito dall'ideale generato dai minori di ordine  $k + 1$  di  $\phi$ . Gli schemi  $D_k(\phi)$  si dicono luoghi di degenerazione di  $\phi$ . Se  $k = \min\{rank E, rank F\} - 1$  parleremo di luoghi di degenerazione massimali.

Risulta evidente che come primo passo dovremo studiare la seguente situazione:

$$M = \mathbf{C}^{mn} = \text{spazio vettoriale delle matrici } m \times n$$

$$M_k = \{m \in M \mid rk(m) \leq k\}$$

Questo caso si inquadra nella definizione generale con la seguente costruzione. Siano  $V, W$  due spazi vettoriali rispettivamente di dimensione  $n, m$  e  $\mathbf{V}, \mathbf{W}$  i fibrati vettoriali banali sulla base  $\text{Hom}(V, W)$ . Considerando il morfismo  $\mathbf{V} \xrightarrow{\psi} \mathbf{W}$  che sul punto  $x \in \text{Hom}(V, W)$  porta  $v$  in  $x(v)$  segue che  $M_k = D_k(\psi)$

Abbiamo una filtrazione

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_{\min(m,n)} = M$$

**Teorema 2.1.**  $M_k$  é una sottovarietà algebrica irriducibile di  $M$  di codimensione  $(m - k)(n - k)$ . Inoltre  $\text{Sing}M_k = M_{k-1}$

*Dimostrazione* Le equazioni di  $M_k$  in  $M$  sono date dai minori  $(k + 1) \times (k + 1)$ . Segue subito (ad esempio dall'algoritmo di eliminazione di Gauss) che  $M_k \setminus M_{k-1}$  sono le orbite dell'azione naturale di  $GL(m) \times GL(n)$  su  $M$ . Quindi  $\text{Sing}M_k \subset M_{k-1}$  e  $M_k$  é irriducibile essendo la chiusura di un'orbita irriducibile. La dimensione di  $M_k$  puó essere calcolata in un punto dove il primo minore  $k \times k$  é  $\neq 0$ . La figura

mostra allora che per annullare tutti gli orlati del primo minore  $k \times k$  si ottengono  $(m - k)(n - k)$  equazioni ricavando i coefficienti nell'area tratteggiata in funzione degli altri.

Siccome i coefficienti della matrice sono coordinate in  $M$  si ricava che la codimensione di  $M_k$  é proprio  $(m - k)(n - k)$ .

E' facile verificare sviluppando i determinanti per righe che in un punto di  $M_{k-1}$  una derivata parziale dei minori  $(k + 1) \times (k + 1)$  nulla e quindi i punti di  $M_{k-1}$  sono punti singolari per  $M_k$

$M_k$  sono dei coni per l'origine, dunque per avere una visione geometrica é conveniente lavorare nello spazio proiettivo  $\mathbf{P}(M) = \mathbf{P}^{mn-1}$ . Indicando per semplicitá con lo stesso simbolo  $M_k$  ed il suo proiettivizzato abbiamo che  $M_1$  é isomorfa al prodotto  $\mathbf{P}^{n-1} \times \mathbf{P}^{m-1}$  immerso con il morfismo di Segre e  $M_2$  é la varietá secante di  $M_1$ . Analogamente  $M_k$  é la varietá luogo degli spazi lineari generati dalle k-ples di punti di  $M_1$ . Il grado di  $M_k$  é classico

$$\deg M_k = \prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{(m+i)!}{(k+i)!(m-k+i)!} \quad (2.2)$$

Questa formula puó essere trovata [ACGH] come applicazione della formula di Porteous che vedremo piú avanti.

In particolare si ritrova

$$\deg M_1 = \binom{m+n-2}{n-1}$$

In molti casi é utile considerare morfismi simmetrici o antisimmetrici tra fibrati. Se  $E$  é un fibrato e  $L$  é un fibrato in rette consideriamo  $\phi: E \rightarrow E^* \otimes L$  da cui  $\phi^t: E \otimes L^* \rightarrow E^*$  e tensorizzando per  $L$  si ottiene  $\tilde{\phi}^t: E \rightarrow E^* \otimes L$

$\phi$  si dice *simmetrico* se  $\phi = \tilde{\phi}^t$ , cioé se  $\phi \in H^0(S^2 E^* \otimes L)$

$\phi$  si dice *antisimmetrico* se  $\phi = -\tilde{\phi}^t$ , cioé se  $\phi \in H^0(\wedge^2 E^* \otimes L)$

Un fibrato  $E$  su cui esiste  $\phi: E \rightarrow E^*$  isomorfismo simmetrico (qui  $L = \mathcal{O}$ ) si dice *ortogonale*.

Un fibrato  $E$  su cui esiste  $\phi: E \rightarrow E^*$  isomorfismo antisimmetrico (qui  $L = \mathcal{O}$ ) si dice *simplettico*.

**Osservazione.** Ogni fibrato  $E$  di rango 2 con  $c_1(E) = 0 \in \text{Pic}(X)$  é simplettico.

Lo studio locale dei morfismi simmetrici conduce a considerare

$$S = \mathbf{C}^{\binom{n+1}{2}} = \text{spazio vettoriale delle matrici simmetriche } n \times n$$

$$S_k = \{s \in S \mid \text{rk}(s) \leq k\}$$

**Teorema 2.3.**  $S_k$  é una sottovarietá algebrica irriducibile di  $S$  di codimensione  $\binom{n-k+1}{2}$ . Inoltre  $\text{Sing} S_k = S_{k-1}$

**Esercizio** Dimostrare il teorema 2.3.

*Suggerimento:* si consideri l'azione di  $GL(n)$  su  $S$  data dalla congruenza ed analogamente alla dimostrazione del teorema 1.1 si osservi la figura:

Geometricamente il proiettivizzato di  $S_1$  é la varietà di Veronese isomorfa a  $\mathbf{P}^{n-1}$  immersa col sistema lineare delle quadriche e  $S_k$  é la varietà luogo degli spazi lineari generati dalle  $k$ -ple di punti di  $S_1$ . Questo porta a descrivere in modo naturale la superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^5$  come il luogo delle matrici simmetriche  $3 \times 3$  di rango 1 e quindi la sua varietà secante risulta l'ipersuperficie determinantale di grado 3, in accordo col ben noto fatto che la superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^5$  può essere proiettata in  $\mathbf{P}^4$  con immagine ancora liscia.

Il grado di  $S_k$  é stato trovato da Segre e vale

$$\deg S_k = \prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{\binom{n+i}{n-k-i}}{\binom{2i+1}{i}} \quad (2.4)$$

**Esercizio.** Verificare che  $\deg S_1 = 2^{n-1}$ . Lo studio locale dei morfismi antisimmetrici conduce a considerare

$$A = \mathbf{C}^{\binom{n}{2}} = \text{spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche } n \times n$$

In questo caso occorre maggiore attenzione perché le matrici antisimmetriche hanno sempre rango pari. Definiamo

$$A_k = \{a \in A \mid rk(a) \leq k\}$$

Secondo l'appendice A se  $n$  é dispari  $A_{n-3}$  si trova annullando semplicemente gli pfaffiani principali (bastano quindi  $n$  equazioni invece di  $n^2$ )

**Teorema 2.5.** Sia  $k$  pari.  $A_k$  é una sottovarietà algebrica irriducibile di  $A$  di codimensione  $\binom{n-k}{2}$ . Inoltre  $Sing A_k = A_{k-2}$

**Esercizio.** Dimostrare il teorema 2.5.

Ad esempio se  $n$  é dispari  $A_{n-3}$  ha codimensione 3. Geometricamente il proiettivizzato di  $A_2$  é la grassmanniana  $Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^{n-1})$  immersa con Plücker e  $A_k$  e' la varietà luogo degli spazi lineari generati dalle  $(k/2)$ -ple di punti di  $A_2$ . Un caso particolarmente significativo é  $Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^4)$  che viene descritta come la varietà delle matrici antisimmetriche  $5 \times 5$  di rango 2



**Esercizio.** *Provare che la varietà secante di  $Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^5)$  immerso in  $\mathbf{P}^{14}$  con il morfismo di Plücker é una ipersuperficie di grado 3. In particolare  $Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^5)$  puó essere proiettato in  $\mathbf{P}^{13}$  con immagine liscia*

Il grado di  $A_k$  é un risultato classico di Giambelli e vale:

$$\deg A_k = \frac{1}{2^{n-k-1}} \prod_{i=0}^{n-k-2} \frac{\binom{n+i}{n-k-i-1}}{\binom{2i+1}{i}} \quad (2.6)$$

**Esercizio.** *Verificare da (2.6) che  $\deg Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^4) = 5$  e che  $\deg Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^5) = 14$  (con le immersioni di Plücker).*

**Lemma 2.7.** *Sia  $\phi: E \rightarrow F$  un morfismo tra fibrati su una varietà  $X$ . Sia  $rkE = m$ ,  $rkF = n$ . Allora  $\text{codim}_X D_k(\phi) \leq (m-k)(n-k)$ .*

*Dimostrazione* Preferiamo denotare con  $V(E^* \otimes F)$  la varietà associata al fascio  $E^* \otimes F$ . Abbiamo una proiezione  $V(E^* \otimes F) \xrightarrow{\pi} X$  ed ogni fibra  $\mathbf{C}^{mn}$  contiene la sottovarietà  $M_k$  studiata nel teorema 2.1. Questa identificazione é intrinseca e non dipende dalle banalizzazioni locali scelte. Globalmente si ottiene una sottovarietà  $\Sigma_k \subset V(E^* \otimes F)$  di codimensione  $(m-k)(n-k)$  le cui fibre su  $X$  sono isomorfe a  $M_k$ .  $\phi$  definisce una sezione di  $E^* \otimes F$  e quindi una sottovarietà  $X'$  di  $V(E^* \otimes F)$  isomorfa a  $X$ . Abbiamo  $D_k(\phi) \simeq \Sigma_k \cap X'$  da cui la tesi.

**Definizione.** *Se  $\text{codim}_X D_k(\phi) = (m-k)(n-k)$  diremo che  $D_k(\phi)$  ha la codimensione aspettata.*

Osserviamo che dato  $\phi: E \rightarrow F$  si ricava  $\wedge^k \phi: \wedge^k E \rightarrow \wedge^k F$  e vale  $D_k(\phi) = D_0(\wedge^k \phi)$ . Se  $D_k(\phi)$  ha codimensione aspettata, non é cosí per  $D_0(\wedge^k \phi)$ .

Il risultato principale in questo contesto é il seguente teorema che é essenzialmente conseguenza del teorema di liscezza generica.

**Teorema 2.8.** *(di tipo Bertini) Siano  $E, F$  fibrati vettoriali su una varietà  $X$  e sia  $rkE = m$ ,  $rkF = n$ . Sia  $E^* \otimes F$  generato dalle sezioni globali. Per il generico morfismo  $\phi: E \rightarrow F$   $D_k(\phi)$  é vuoto oppure ha la codimensione aspettata  $(m-k)(n-k)$  e  $\text{Sing } D_k(\phi) \subset D_{k-1}(\phi)$ . In particolare se  $\dim X < (m-k+1)(n-k+1)$   $D_k(\phi)$  é liscio per  $\phi$  generico.*

*Dimostrazione* Per ipotesi abbiamo la successione esatta

$$H^0(E^* \otimes F) \otimes \mathcal{O} \rightarrow E^* \otimes F \rightarrow 0$$

che induce una proiezione di rango massimo ovunque

$$X \times H^0(E^* \otimes F) \xrightarrow{p} V(E^* \otimes F) \supset \Sigma_k$$

dove  $\Sigma_k$  é stato definito nella dimostrazione del lemma 2.7.

Abbiamo

$$\begin{array}{c} Z := p^{-1}(\Sigma_k) \\ \downarrow q \\ H^0(E^* \otimes F) \end{array}$$

Osserviamo che  $Z = \{(x, \phi) | rk(\phi_x) \leq k - 1\}$  e quindi  $q^{-1}(\phi_0) = \{(x, \phi_0) | rk((\phi_0)_x) \leq k - 1\} \simeq D_k(\phi_0)$  Osserviamo che  $Sing Z = p^{-1}(Sing \Sigma_k)$  e consideriamo

$$\begin{array}{c} Z \setminus Sing Z \\ \downarrow p|_{(Z \setminus Sing Z)} \\ H^0(E^* \otimes F) \end{array}$$

Abbiamo

$$p|_{Z \setminus Sing Z}^{-1}(\phi) \simeq D_k(\phi) \setminus D_{k-1}(\phi)$$

Ci sono due casi:

- 1 Se  $p|_{Z \setminus Sing Z}$  ha immagine densa allora  $D_k(\phi)$  é liscio per il teorema di lisciezza generica [Ha, cor. III 10.7] e quindi vale  $Sing D_k(\phi) \subset D_{k-1}(\phi)$
- 2 Se  $p|_{Z \setminus Sing Z}$  non ha immagine densa allora  $D_k(\phi)$  é vuoto per  $\phi$  generico.

**Osservazione.** Se  $E = \mathcal{O}$  e  $F$  é un fibrato in rette il teorema 2.8 (con  $k = 0$ ) é il classico teorema di Bertini.

**Osservazione.** Si può provare il risultato piú fine che se  $D_k(\phi)$  é non vuoto e  $\phi$  é generico allora  $Sing D_k(\phi) = D_{k-1}(\phi)$  ([Ban] 4.1). Per provare questo fatto si usa in modo essenziale il teorema di Hochster secondo il quale  $M_k$  sono sottovarietà Cohen-Macaulay.

**Osservazione.** Fulton e Lazarsfeld provano in [FuLa] con l'ipotesi  $E^* \otimes F$  ampio che se  $(m - k)(n - k) \leq dim X$  allora  $D_k(\phi)$  é non vuoto mentre se  $(m - k)(n - k) < dim X$  allora  $D_k(\phi)$  é connesso.

**Esercizio.** Provare che se  $E$  é un fibrato globalmente generato di rango  $r$  allora il luogo degli zeri della sezione generica di  $E$  é liscio di codimensione  $r$ .

*Suggerimento: usare il teorema 2.8.*

**Esercizio.** Provare che se  $E$  é un fibrato globalmente generato di rango  $r$  su  $X$  con  $dim X \leq 5$  allora il luogo di degenerazione di  $r - 1$  sezioni generiche di  $E$  é vuoto oppure liscio di codimensione 2.

**Esercizio.** Provare che se  $E$  é un fibrato globalmente generato di rango  $r$  su  $X$  con  $dim X \leq 7$  allora il luogo di degenerazione di  $r - 2$  sezioni generiche di  $E$  é vuoto oppure liscio di codimensione 3.

**Esercizio.** Calcolare il numero dei punti singolari della 4-fold in  $\mathbf{P}^6$  che é luogo di degenerazione di un generico morfismo  $\mathcal{O}^2 \rightarrow \mathcal{O}(1)^3$ .

Consideriamo ora il caso in cui  $E = \mathcal{O}$  e  $F$  é un fibrato di rango  $r$ . Allora un morfismo  $s: \mathcal{O} \rightarrow F$  corrisponde ad una sezione  $s$  di  $F$  e  $Z := D_0(s)$  é il luogo degli zeri di  $s$ . La codimensione aspettata di  $Z$  é  $r$ .

**Proposizione 2.9.** Se  $Z$  é di codimensione pura  $r$  allora la classe  $[Z]$  in  $H^{2r}(X, \mathbf{Z})$  é data da  $c_r(F)$ . Se inoltre  $Z$  é liscio segue  $N_{Z, X} \simeq F|_Z$

*Dimostrazione* Per il primo enunciato si veda l'appendice E.  $s$  definisce (dualizzando) un morfismo  $E^* \rightarrow \mathcal{O}$  che é nullo su  $Z$ , e quindi si fattorizza come  $E^* \rightarrow \mathcal{I}_Z$ . Si ricava infine proiettando sul quoziente un morfismo  $\phi: E^* \rightarrow \mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Z^2$ .  $\phi$  é un morfismo tra fibrati vettoriali dello stesso rango ed é sufficiente verificare che é un isomorfismo localmente (si veda [OSS] pagg. 90-93 nel caso di codimensione 2).

**Corollario (formula di aggiunzione) 2.10.**  $K_Z = (K_X \otimes \det(F))|_Z$

*Dimostrazione* Basta prendere i determinanti dalla successione esatta

$$0 \rightarrow TZ \rightarrow TX|_Z \rightarrow N_{Z, X} \rightarrow 0$$

Definiamo formalmente il polinomio di Chern  $c_{F-E} = \frac{c_F}{c_E}$  (vedi appendice E)). Quando un luogo di degenerazione  $D_k(\phi)$  ha codimensione aspettata allora la sua classe di coomologia é data dalla *formula di Porteous* ( $rkE = m$ ,  $rkF = n$ )

$$[D_k(\phi)] = \det[c_{n-k-p+q}(F-E)] \quad \text{per } 1 \leq p, q \leq m-k \quad (2.11)$$

A secondo membro appare il determinante di una matrice quadrata di ordine  $m-k$ . Ad esempio

$$D_{m-1}(\phi) = c_{n-m+1}(F-E)$$

$$D_{m-2}(\phi) = \det \begin{pmatrix} c_{n-m+2}(F-E) & c_{n-m+3}(F-E) \\ c_{n-m+1}(F-E) & c_{n-m+2}(F-E) \end{pmatrix}$$

La dimostrazione della formula di Porteous é abbastanza tecnica, ma é utile avere un'idea della provenienza del determinante a secondo membro. Se  $X = Gr$  é una grassmanniana,  $E = \mathcal{O}^m$ ,  $F = Q$  (fibrato quoziente) i luoghi di degenerazione di morfismi  $\mathcal{O}^m \rightarrow Q$  corrispondono ai cicli di Schubert che generano l'anello di coomologia  $H^*(Gr, \mathbf{Z})$  e le classi di Chern  $c_i(Q)$  sono i cosiddetti cicli di Schubert speciali (che corrispondono a luoghi di degenerazione massimali). In questo caso la formula di Porteous non é altro che la formula di Giambelli che esprime un ciclo di Schubert come prodotto di cicli speciali. Il caso generale si ricava da questo caso particolare per funtorialità.

La formula di Porteous ammette delle estensioni ai casi simmetrico e antisimmetrico, valide solo per morfismi generici (occorrono delle ipotesi di trasversalit , avere codimensione aspettata non   pi  sufficiente).

Precisamente, sia  $\phi: E \rightarrow E^* \otimes L$  con  $\text{rank } E = n$ . Se  $\phi$    simmetrico e “sufficientemente generale” la classe di coomologia di  $D_k(\phi)$    data da

$$[D_k(\phi)] = 2^{n-k} \det[c_{n-k-2p+q+1}(E^* \otimes \sqrt{L})] \quad \text{per } 1 \leq p, q \leq n-k$$

Il significato di  $c_i(E^* \otimes \sqrt{L})$    il seguente: si scrive formalmente  $L = K^2$  e si calcola il det con  $K$  al posto di  $\sqrt{L}$ . Il risultato finale contiene solo multipli pari di  $c_1(K)$  e pu  quindi essere espresso in funzione di  $c_1(L)$ . Questo   il cosiddetto “squaring principle” [HT].

Se  $\phi$    antisimmetrico e “sufficientemente generale” e  $k$    pari la classe di coomologia di  $D_k(\phi)$    data da

$$[D_k(\phi)] = \det[c_{n-k-2p+q}(E^* \otimes \sqrt{L})] \quad \text{per } 1 \leq p, q \leq n-k-1$$

Le formule precedenti sono state trovate indipendentemente in [HT] e in [JPL]. Barth ha usato (e ricavato) la formula nel caso simmetrico per  $k = n - 2$  per calcolare il numero dei punti singolari di superfici in  $\mathbf{P}^3$  espresse come determinante di un morfismo simmetrico tra fibrati.

Sia  $Z \subset X$  variet  di codimensione pura  $r$  luogo degli zeri di una sezione  $s$  di un fibrato  $E$  di rango  $r$  su  $X$ . Si pu  costruire una risoluzione del fascio  $\mathcal{O}_Z$  che prende il nome di *complesso di Koszul*

$$0 \rightarrow \det E^* \rightarrow \wedge^{r-1} E^* \rightarrow \dots \rightarrow E^* \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0 \quad (2.12)$$

Il nome complesso viene dal fatto che la successione precedente si pu  costruire anche se la codimensione di  $Z$  non   quella aspettata, ma con le nostre ipotesi il complesso di Koszul   *esatto!*. La condizione algebrica corrispondente   che data una banalizzazione  $s = (s_1, \dots, s_r)$  la successione  $s_1, \dots, s_r$    una successione regolare. (vedi [GH] oppure [Ha])

Sia  $K$  un campo. Posto  $S = K[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_q S^q(V)$ , la risoluzione di  $K$  tramite  $S$ -moduli d  il “prototipo” di complesso di Koszul.

Si trova infatti:

$$0 \rightarrow \wedge^{n+1} V \otimes S(-n-1) \rightarrow \wedge^n V \otimes S(-n) \rightarrow \dots \rightarrow V \otimes S(-1) \rightarrow S \rightarrow K \rightarrow 0$$

Tutti i morfismi sono definiti “incollando” delle applicazioni naturali

$$\wedge^p(V) \otimes S^q(V) \rightarrow \wedge^{p-1}(V) \otimes S^{q+1}(V)$$

definite in coordinate da

$$(z_{i_1} \wedge z_{i_2} \wedge \dots \wedge z_{i_p}) \otimes m \mapsto \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} (z_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{z}_{i_j} \wedge \dots \wedge z_{i_p}) \otimes (z_{i_j} \cdot m)$$

Una dimostrazione chiara ed elegante dell'esattezza del complesso precedente é contenuta in [Green].

Per il teorema 2.8 se  $E$  é globalmente generato allora la sezione generica si annulla su  $Z$  in codimensione aspettata e quindi il complesso di Koszul corrispondente é esatto.

**Osservazione.** In particolare  $K_Z \simeq (K_X \otimes \det E)|_Z$

**Esempio.** Sia  $X \subset \mathbf{P}^5$  l'intersezione di due quadriche.  $X$  é luogo degli zeri di una sezione di  $\mathcal{O}(2)^2$ . La risoluzione del fascio di ideali  $\mathcal{I}_X$  é:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^2 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

da cui si ricava il polinomio di Hilbert

$$\chi(\mathcal{O}_X(t)) = \frac{1}{3}(t+1)(2t^2 + 4t + 3)$$

**Esercizio.** Scrivere la risoluzione libera di  $\mathcal{O}_Q$  dove  $Q$  é un punto in  $\mathbf{P}^3$ .

**Esercizio.** Scrivere la risoluzione libera di  $\mathcal{O}_L$  dove  $L$  é una retta in  $\mathbf{P}^3$ .

**Esercizio.** Sia  $C$  una curva liscia in  $\mathbf{P}^n$  luogo degli zeri di una sezione di un fibrato  $E$  di rango  $n-1$ . Calcolare grado e genere di  $C$  in funzione di  $c_i := c_i(E)$

*Risposta:*  $d = c_{n-1}$   $g = 1 + \frac{1}{2}(c_1 - n + 1)c_{n-1}$  In particolare si ha sempre  $c_1 c_{n-1} \equiv 0 \pmod{2}$  se  $n$  dispari.

In pratica per sottovarietá di  $\mathbf{P}^n$  che sono luoghi di zeri di sezioni di fibrati il metodo piú rapido per calcolare gli invarianti numerici é calcolare il polinomio di Hilbert dal complesso di Koszul. Un programma di calcolo simbolico é molto utile in questi casi. Questa tecnica si applica anche al complesso di Eagon-Northcott che vedremo tra poco.

**Esercizio.** Se  $E$  é un fibrato di rango 2 su  $\mathbf{P}^n$  con una sezione che si annulla su  $Z$  di codimensione 2 provare che  $H^i(E(t)) = H^{i-1}(\mathcal{O}_Z(t + c_1(E)))$  per  $2 \leq i \leq n-2$ .

**Proposizione 2.13.** Sia  $X$  una varietá proiettiva nonsingolare e  $V \subset X$  localmente intersezione completa di codimensione  $r$ . Se abbiamo la successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_r \longrightarrow \mathcal{I}_V \longrightarrow 0$$

con  $A_i$  localmente liberi applicando il funtore  $\mathcal{H}(\downarrow(-, \mathcal{O}))$  otteniamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow A_r^* \longrightarrow A_{r-1}^* \longrightarrow \dots \longrightarrow A_1^* \longrightarrow K_V \otimes K_X^* \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione* Immediata applicando l'isomorfismo locale fondamentale (vedi appendice D).

**Esercizio.** Sia  $X$  una varietà proiettiva nonsingolare e  $V \subset X$  localmente intersezione completa di codimensione  $r$ . Se abbiamo la successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_r \longrightarrow \mathcal{I}_V \longrightarrow 0$$

con  $A_i$  localmente liberi e  $\text{rank } A_1 = 1$  segue

$$K_V = A_1^* \otimes K_X$$

Una generalizzazione del complesso di Koszul é il *complesso di Eagon-Northcott*.

**Teorema 2.14.** Siano  $E, F$  fibrati vettoriali su una varietà  $X$  e sia  $\text{rk} E = m, \text{rk} F = n$  con  $m \leq n$ . Sia  $\phi: E \rightarrow F$  un morfismo. Se  $Z := D_{m-1}(\phi)$  ha la codimensione aspettata allora si ha la seguente risoluzione (complesso di Eagon-Northcott):

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow S^{n-m} E \longrightarrow F \otimes S^{n-m-1} E \longrightarrow \wedge^2 F \otimes S^{n-m-2} E \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \wedge^{n-m} F \xrightarrow{\alpha} \det F \otimes \det E^* \longrightarrow \mathcal{O}_Z \otimes \det F \otimes \det E^* \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

dove tutti i morfismi si costruiscono in modo naturale a partire da  $\phi$ . Considerando che  $\wedge^{n-m} F \simeq \det F \otimes \wedge^m F^*$   $\alpha$  é definito come segue:  $\alpha := \text{id}_{\det F} \otimes \wedge^m \alpha^*$

*Dimostrazione* ([GP] pag. 6-7) L'idea é quella di risalire ad un fibrato proiettivo, considerare il complesso di Koszul su questo fibrato e poi proiettare. Prendiamo  $\mathbf{P}(E^*) \xrightarrow{\pi} X$  (vedi [Ha] II.7) in modo che  $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(E^*)}(1) = E^*$  e consideriamo la sezione  $\psi$  di  $\pi^* F \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(E^*)}(1)$  definita come la composizione

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}(E^*)} \xrightarrow{a} \pi^* E \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(E^*)}(1) \xrightarrow{b} \pi^* F \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(E^*)}(1)$$

dove  $a$  é data dalla successione di Eulero relativa su  $\mathbf{P}(E^*)$  e  $b = \pi^* \phi \otimes \text{id}$ . Il luogo degli zeri di  $\psi$  é una varietà  $\tilde{Z}$  tale che  $\pi(\tilde{Z}) = Z = D_{m-1}(\phi)$ . Infatti localmente un punto corrisponde ad una coppia  $(x, [e])$  con  $\mathbf{C}e \subset E_x$  e  $\psi$  in questo punto vale  $(x, [e], \phi_x(e))$ . Pertanto  $\pi$  ristretta a  $\tilde{Z} \setminus \pi^{-1} D_{m-2}(\phi)$  é un isomorfismo. Abbiamo allora il complesso di Koszul

$$0 \longrightarrow \wedge^n \pi^* F^* \otimes \mathcal{O}(-n) \longrightarrow \dots \longrightarrow \wedge^2 \pi^* F^* \otimes \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \pi^* F^* \otimes \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{Z}} \longrightarrow 0$$

Applicando  $\pi_*$  vale  $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{Z}} = \mathcal{O}_Z$ .

Per  $1 \leq j \leq m-1$  si trova

$$R^i \pi_* [\wedge^j \pi^* F^* \otimes \mathcal{O}(-j)] = 0 \quad \forall i$$

(infatti ogni fibra di  $\pi$  é isomorfa a  $\mathbf{P}^{m-1}$ ).

Per  $j \geq m$  i fasci  $R^i \pi_*$  precedenti sono ancora nulli escluso che per  $i = m - 1$  ed in questo caso sono uguali a

$$\wedge^j \pi^* F^* \otimes S^{j-m} E \otimes \det E$$

Infatti se  $\mathbf{P}^{m-1} = \mathbf{P}(V)$  allora  $H^{m-1}(\mathbf{P}(V), \mathcal{O}(-j)) \simeq S^{j-m} V^* \otimes \det V^*$

La successione spettrale di ipercoomologia dá allora

$$\dots R^{m-1} \pi_* [\wedge^{m+1} \pi^* F^* \otimes \mathcal{O}(-m-1)] \longrightarrow R^{m-1} \pi_* [\wedge^m \pi^* F^* \otimes \mathcal{O}(-m)] \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

che tensorizzando per  $\det F \otimes \det E^*$  é esattamente il complesso di Eagon-Northcott dell'enunciato.

**Osservazione.** L'ipotesi  $m \leq n$  non é restrittiva perché si può considerare  $\alpha^*$ .

**Esempio.** La quartica razionale normale  $C \subset \mathbf{P}^4$  é definita dai minori  $2 \times 2$  estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

e si trova quindi come  $D_1(\phi)$  dove  $\phi: \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(1)^4$ . Il complesso di Eagon-Northcott in questo caso é

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-4)^3 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^8 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^6 \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0$$

Fissato uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione 2, una descrizione  $SL(2)$ -equivariante della quartica razionale in  $\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}(S^4 V)$  é la seguente.

Posto

$$F := Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + ey^4$$

si scrive l'hessiano

$$H(x, y) = \det \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}$$

$H$  é un polinomio di grado 4 in  $x, y$  i cui 5 coefficienti sono 5 quadriche in  $(A, B, C, D, E)$  che definiscono  $C_4 \subset \mathbf{P}^4$

Se  $\phi: \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}(1)^4$  é generico allora  $D_1(\phi)$  é la superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^5$  ed il complesso di Eagon-Northcott é formalmente identico al precedente (infatti le sezioni iperpiane della superficie di Veronese sono quartiche razionali normali).

Un problema molto piú difficile é quello di trovare le risoluzioni dei fasci di ideali dei luoghi di degenerazione non massimali. Questo problema é stato risolto solo nel 1978 da Lascoux nella sua tesi di dottorato. La risoluzione é costruita tramite i funtori di Schur. La dimostrazione originale di Lascoux conteneva un errore che é stato colmato nel 1985 da Pragacz e Weyman [PrWe85].

**Esercizio.** Verificare che se  $m = 1$  il complesso di Eagon-Northcott del teorema 2.14 si riduce al complesso di Koszul (eventualmente tensorizzando per un fibrato in rette).

**Esercizio.** Verificare che applicando  $\mathcal{HOM}(-, \mathcal{O})$  al complesso di Eagon-Northcott ed usando la prop. 2.13 si ottiene

$$0 \longrightarrow \wedge^m F \longrightarrow \wedge^{m+1} F \otimes E^* \longrightarrow \dots \longrightarrow \det F \otimes S^{n-m} E^* \longrightarrow K_V \otimes \det E \otimes K_X^* \longrightarrow 0$$

**Esercizio.** Sia  $V \subset \mathbf{P}^n$  il luogo di degenerazione (massimale) di  $\phi: \mathcal{O}^r \rightarrow F$ . Provare che  $K_V(n+1 - c_1(F))$  é globalmente generato. In particolare se  $c_1(F) \geq n+2$  allora  $V$  é di tipo generale.

**Esercizio.** Con le notazioni del teorema 2.14, se  $m = n-1$  allora  $Z$  ha codimensione 2 ed il complesso di Eagon-Northcott diventa:

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\phi} F \longrightarrow \mathcal{I}_Z \otimes \det E^* \otimes \det F \longrightarrow 0$$

**Corollario 2.15.** Con le notazioni del teorema 2.14, se  $E$  é un fibrato banale,  $Z := D_{m-1}(\phi)$  si riconduce al luogo di degenerazione di  $m$  sezioni di  $F$  e la sua risoluzione é:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \binom{n-1}{m-1} \longrightarrow F \binom{n-2}{m-1} \longrightarrow \wedge^2 F \binom{n-3}{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \wedge^{n-m} F \longrightarrow \det F \longrightarrow \mathcal{O}_Z \otimes \det F \longrightarrow 0$$

**Esercizio.** Sia  $\phi: \mathcal{O}^2 \rightarrow \mathcal{O}(1)^3 \oplus \mathcal{O}(2)$  un morfismo generico su  $\mathbf{P}^n$ . Scrivere la risoluzione di  $\mathcal{O}_Z$  dove  $Z := D_1(\phi)$ . Posto  $n = 4$  calcolare grado e genere di  $Z$ .

**Proposizione 2.16.** Su  $D_k(\phi) \setminus D_{k-1}(\phi)$   $Ker(\phi)$  e  $Coker(\phi)$  sono fibrati vettoriali di rango rispettivamente  $m-k$  e  $n-k$ . Il fibrato normale a  $D_k(\phi) \setminus D_{k-1}(\phi)$  in  $X$  é isomorfo a  $Ker(\phi)^* \otimes Coker(\phi)$ .

Il lettore é invitato a leggere la dimostrazione della proposizione precedente data in [GoGu] pag. 145. Questa dimostrazione si adatta facilmente anche ai casi simmetrici e antisimmetrici. Per una descrizione dello spazio tangente alle varietà  $M_k$  si veda [Har92], esempio 14.16.

Sia  $\phi: E \rightarrow E^*$  un morfismo simmetrico. Su  $D_k(\phi) \setminus D_{k-1}(\phi)$   $Ker(\phi)$  e  $Coker(\phi)$  sono fibrati vettoriali entrambi di rango  $n-k$  e vale  $Ker(\phi)^* \simeq Coker(\phi)$ . Il fibrato normale a  $D_k(\phi) \setminus D_{k-1}(\phi)$  in  $X$  é isomorfo a  $S^2 Coker(\phi)$ . Una formula quando appare anche  $L$  può essere ricavata dallo squaring principle. Sia  $\phi: E \rightarrow E^*$  un morfismo antisimmetrico. Su  $D_k(\phi) \setminus D_{k-2}(\phi)$   $Ker(\phi)$  e  $Coker(\phi)$  sono fibrati vettoriali entrambi di rango  $n-k$  e vale  $Ker(\phi)^* \simeq Coker(\phi)$ . Il fibrato normale a  $D_k(\phi) \setminus D_{k-2}(\phi)$  in  $X$  é isomorfo a  $\wedge^2 Coker(\phi)$ .

**Esercizio.** Sia  $D_{k-1} = \emptyset$ , allora

$$K_{D_k(\phi)} \simeq K_X \otimes (\det(E^*) \otimes \det(F))^{(m-k)} \otimes (\det Ker(\phi))^{(m-n)}$$

. In particolare se  $n = m$  allora  $K_{D_k(\phi)} \simeq (\det(E^*) \otimes \det(F))^{(m-k)}$ . Dare formule analoghe per morfismi simmetrici e antisimmetrici.

*Suggerimento: utilizzare la prop. 2.16.*



**Osservazione.** Si può provare che  $S^{m-n}(\det Ker(\phi)) \otimes K_X \otimes (\det E^* \otimes \det F)^{(m-k)}$  é sempre un fascio dualizzante per  $D_k(\phi)$  anche quando quest'ultima varietà é singolare[GP]

Il teorema 2.8 (tipo Bertini) ammette un'estensione naturale al caso di morfismi simmetrici ed antisimmetrici

**Teorema 2.17.** Sia  $E$  un fibrato di rango  $n$  su una varietà  $X$ ,  $L$  un fibrato in rette e sia  $\phi: E \rightarrow E^* \otimes L$  un morfismo simmetrico. Sia  $S^2 E^* \otimes L$  globalmente generato. Per il generico morfismo  $\phi: E \rightarrow E^* \otimes L$ ,  $D_k(\phi)$  é vuoto oppure ha la codimensione aspettata  $\binom{n-k+1}{2}$  e  $Sing D_k(\phi) \subset D_{k-1}(\phi)$ . In particolare se  $dim X < \binom{n-k+2}{2}$  per  $\phi$  generico  $D_k(\phi)$  é liscio.

**Esercizio.** Dimostrare il teorema 2.17 (basta seguire la dimostrazione del teorema 2.8, al posto di  $V(E^* \otimes F)$  occorre considerare  $V(S^2 E^* \otimes L)$ ).

**Teorema 2.18.** Sia  $E$  un fibrato di rango  $n$  su una varietà  $X$ ,  $L$  un fibrato in rette e sia  $\phi: E \rightarrow E^* \otimes L$  un morfismo antisimmetrico. Sia  $\wedge^2 E^* \otimes L$  globalmente generato. Sia  $k$  un numero pari. Per il generico morfismo  $\phi: E \rightarrow E^* \otimes L$ ,  $D_k(\phi)$  é vuoto oppure ha la codimensione aspettata  $\binom{n-k}{2}$  e  $Sing D_k(\phi) \subset D_{k-2}(\phi)$ . In particolare se  $dim X < \binom{n-k+2}{2}$  per  $\phi$  generico  $D_k(\phi)$  é liscio.

**Esercizio.** Sia  $E$  un fibrato di rango  $n$  dispari su  $X$  con  $dim X \leq 9$  e sia  $L$  un fibrato in rette. Sia  $\wedge^2 E^* \otimes L$  globalmente generato. Per il generico morfismo antisimmetrico  $\phi: E \rightarrow E^* \otimes L$ ,  $D_{n-3}(\phi)$  é vuoto oppure é liscio di codimensione 3.

**Definizione.** Sia  $E$  un fibrato su  $\mathbf{P}^n$  di rango  $r$  dispari e  $a \in \mathbf{Z}$ . Le varietà  $D_{r-3}(\phi)$  con  $\phi: E \rightarrow E^*(a)$  morfismo antisimmetrico si dicono varietà pfaffiane (o brevemente pfaffiani).

La risoluzione del fascio di ideali di uno pfaffiano é data dal teorema seguente

**Teorema 2.19.** Sia  $Z = D_{r-3}(\phi)$  uno pfaffiano dove  $\phi: E \rightarrow E^* \otimes L$  é antisimmetrico e  $rank E = r = 2p + 1$  é dispari. Abbiamo la successione esatta:

$$0 \rightarrow \det E \otimes L^{-pg} \xrightarrow{\otimes id_L} E \xrightarrow{\phi} E^* \otimes L \xrightarrow{g} \mathcal{I}_Z \otimes \det E^* \otimes L^{p+1} \rightarrow 0$$

*Dimostrazione* Gli  $r$  pfaffiani di  $\phi$  definiscono una sezione di  $\wedge^{r-1} E^* \otimes L^p \simeq E \otimes \det E^* \otimes L^p$  e quindi un morfismo  $E^* \otimes L \xrightarrow{g} \det E^* \otimes L^{p+1}$ . Un'analisi locale, usando l'esercizio dell'appendice A mostra che

$$0 \rightarrow \det E \otimes L^{-pg} \xrightarrow{\otimes id_L} E \xrightarrow{\phi} E^* \otimes L \xrightarrow{g} \det E^* \otimes L^{p+1}$$

é esatta e quindi  $\mathcal{I}_Z \otimes \det E^* \otimes L^{p+1} \simeq Im g$

**Esempio.** L'esempio classico (“prototipo”) di varietà di codimensione 3 data da pffiani é la grassmanniana  $G := Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^4) \subset \mathbf{P}^9$ , che si ottiene come luogo di degenerazione di  $\phi: \mathcal{O}^5 \rightarrow \mathcal{O}(1)^5$  antisimmetrico. La risoluzione del fascio di ideali in  $\mathbf{P}^9$  é:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-5) \xrightarrow{\psi^t} \mathcal{O}(-3)^5 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(-2)^5 \xrightarrow{\psi} \mathcal{I}_G \rightarrow 0$$

I 5 pffiani di  $\phi$  sono 5 quadriche che definiscono  $G$  e che danno il morfismo  $\psi$ .

**Proposizione 2.20.** Sia  $Z$  uno pffiano come nel teorema precedente, allora

$$K_Z \simeq (\det E^*)^2 \otimes L_{|Z}^r \otimes K_{X|Z}$$

*Dimostrazione* Usando il teorema 2.19, la proposizione 2.13 e l'esercizio che la segue.

**Esercizio.** Sia  $\phi: \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}^3 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}^3(2)$  generico simmetrico. Verificare che  $D_2(\phi)$  é la superficie di Veronese, che non é sottocanonica.

**Esercizio.** Dato  $\phi: \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}^3 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}^3(2)$  generico (non necessariamente simmetrico), consideriamo la 3-fold in  $\mathbf{P}^5$   $Z = D_2(\phi)$ . Calcolare  $d = \deg Z$  e verificare che  $K_Z = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}(a)$ . Calcolare  $a$ .

*Risposta:*  $a = 6$ .

**Osservazione.** Esistono varietà  $Z \subset \mathbf{P}^n$  lisce di codimensione 3 nonsingolari che non sono luogo di degenerazione della codimensione aspettata di  $\phi: E \rightarrow F$  con  $E, F$  fibrati. (Un esempio é dato dallo scroll ellittico di grado 7 in  $\mathbf{P}^6$  costruito da Ionescu). Questa costruzione si può invece sempre eseguire in codimensione 1 e 2.

**Esercizio.** Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  una varietà pffiana (di codimensione 3) liscia e sia  $K_X = \mathcal{O}(t)|_X$ . Provare che se  $n \equiv 3 \pmod{4}$  e  $t$  é pari allora anche  $\chi(\mathcal{O}_X(\frac{t}{2}))$  é pari.

*Suggerimento:* usare il teorema 2.19 e la dualità di Serre

**Teorema 2.21.**[Wal94]. Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  una varietà sottocanonica liscia di codimensione 3 con  $K_X = \mathcal{O}(t)|_X$ . Allora  $X$  é una varietà pffiana se e solo se vale la condizione: se  $n \equiv 3 \pmod{4}$  e  $t$  é pari allora anche  $\chi(\mathcal{O}_X(\frac{t}{2}))$  é pari. In particolare se  $n \not\equiv 3 \pmod{4}$  tutte le varietà sottocanoniche lisce di  $\mathbf{P}^n$  di codimensione 3 sono varietà pffiane.

Grazie al corollario 1.10 se  $n \geq 8$  l'ipotesi “sottocanonica” può essere omessa dal teorema precedente.

Vediamo qualche risultato di tipo Lefschetz sulla topologia dei luoghi di degenerazione.

**Teorema 2.22 (tipo Lefschetz) (Sommese[Som]).** Sia  $E$  un fibrato ampio di rango  $r$  su  $X$  varietà proiettiva. Sia  $Z$  il luogo degli zeri liscio di una sezione di  $E$  tale che  $\text{codim}_X Z = r$ . Allora i morfismi di restrizione

$$H^i(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^i(Z, \mathbf{Z})$$

sono isomorfismi se  $i \leq \dim Z - 1$

Recentemente L. Manivel [Man94] ha provato il teorema precedente di Sommese su  $X = \mathbf{P}^n$  come conseguenza di alcuni annullamenti coomologici.

Ein osserva in [E] che se  $E$  é come nel teorema precedente, e  $\phi: \mathcal{O}^t \rightarrow E$  é generico allora  $Z = D_{t-1}(\phi)$  é isomorfo al luogo degli zeri di una sezione di un fibrato ampio e generato di rango  $r$  su  $\mathbf{P}^{t-1} \times X$  (basta ripetere la costruzione elaborata nella dimostrazione del teorema 2.14 relativo al complesso di Eagon-Northcott) e quindi per il teorema 2.22

$$H^i(\mathbf{P}^{t-1} \times X, \mathbf{Z}) \simeq H^i(Z, \mathbf{Z})$$

se  $i \leq \dim Z - 1$

**Esempio.** Se  $\phi: \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}^3$  é generico allora  $H^2(D_1(\phi), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^2$ . Infatti  $D_1(\phi) \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ .

**Problema.** Si possono ottenere informazioni sulla topologia dei luoghi di degenerazione massimali di  $\phi: E \rightarrow F$  con  $\phi$  generico dove  $E^* \otimes F$  é ampio e generato dalle sezioni globali? Se  $E = \mathcal{O}$  abbiamo il risultato precedente di Ein. Questo generalizzerebbe i risultati di Fulton-Lazarsfeld menzionati dopo il teorema 2.8.

Una generalizzazione naturale dei luoghi di degenerazione di morfismi é la seguente: sia  $T$  una rappresentazione di  $GL(r)$  (o di un altro gruppo lineare). Sia  $E$  un fibrato di rango  $r$  e  $L$  un fibrato in rette. Se  $R \subset \mathbf{C}^N$  é la chiusura di un'orbita di  $T$  é ben definita la sottovarietà  $\mathcal{R} \subset V(T(E))$ . Data una sezione  $\phi \in H^0(T(E) \otimes L)$  definiamo  $D_R(\phi) := \{x \in X \mid \phi(x) \in \mathcal{R}_x\}$ . Si puó provare per  $D_R(\phi)$  un teorema di tipo Bertini se  $T(E) \otimes L$  é globalmente generato.

Ad esempio se  $T = \wedge^k$  ed  $E$  é un fibrato banale di fibra  $V$  su  $\mathbf{P}(\wedge^k V)$  si trovano tutte le grassmanniane.

Se  $E$  é un fibrato ortogonale di rango 10 su  $X$  e  $Spin(E) \otimes L$  é globalmente generato, considerando  $\phi \in H^0(Spin(E) \otimes L)$  e  $R$  dato dall'orbita compatta in  $Spin$ , si trovano sottovarietà di codimensione 5 in  $X$  che sono lisce se  $\dim X \leq 15$ . Un esempio é dato dalla varietà spinoriale  $S_{10} \subset \mathbf{P}^{15}$ . Sarebbe interessante trovare analoghi delle formule di Porteous per una rappresentazione  $T$ .

### §3. TEOREMA DI BEILINSON E SIZIGIE

Il teorema di Beilinson fornisce uno strumento che permette di descrivere un fascio su  $\mathbf{P}^n$  quando è nota la sua coomologia.

**Teorema di Beilinson 3.1.** *Sia  $\mathcal{F}$  un fascio coerente su  $\mathbf{P}^n$ . Allora esiste un complesso*

$$0 \longrightarrow L^{-n} \xrightarrow{d_{-n}} L^{-n+1} \xrightarrow{d_{-n+1}} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} L^n \longrightarrow 0$$

con  $L^k = \bigoplus_{j+k=i} \Omega^j(j)^{h^i(\mathcal{F}(-j))}$  tale che

$$\frac{\ker d_k}{\operatorname{Im} d_{k-1}} \simeq \begin{cases} \mathcal{F} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Inoltre il complesso  $L$  è “minimale” nel senso che tutti i morfismi naturali del tipo  $\Omega^p(p) \longrightarrow \Omega^p(p)$  che si ricavano dai morfismi  $d_k$  sono nulli.

Il teorema di Beilinson dá quindi una risoluzione “destra e sinistra” di ogni fascio coerente in termini di somme dirette dei fibrati  $\Omega^p(p)$ , che prendono il nome di building blocks (notiamo che sono in numero finito!). In particolare i fibrati  $\Omega^p(p)$  generano il gruppo di Grothendieck  $K_0(\mathbf{P}^n)$ . Il fascio  $\mathcal{F}$  determina il numero di copie dei fibrati  $\Omega^p(p)$  che compaiono nella risoluzione tramite la dimensione dei suoi gruppi di coomologia.

La dimostrazione del teorema di Beilinson usa in modo essenziale il linguaggio delle categorie derivate ed è al di fuori della portata di questo corso (si veda [Bei] o anche [AnO2]). Il teorema viene spesso usato in una forma piú debole che fornisce una successione spettrale che degenera a  $\mathcal{F}$  (si veda [OSS]).

Per approfondire il significato del teorema di Beilinson, conviene darne una rappresentazione grafica, che ricalca la successione spettrale a cui abbiamo accennato.

Consideriamo il diagramma quadrato

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^n(n) & \Omega^{n-1}(n-1) & \dots & \Omega^1(1) & \mathcal{O} & & \\ \Omega^n(n) & \Omega^{n-1}(n-1) & \dots & \Omega^1(1) & \mathcal{O} & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ \Omega^n(n) & \Omega^{n-1}(n-1) & \dots & \Omega^1(1) & \mathcal{O} & & \end{array}$$

Consideriamo adesso la tabella di coomologia di  $\mathcal{F}$

$$\begin{array}{ccccccc} h^n(\mathcal{F}(-n)) & h^n(\mathcal{F}(-n+1)) & \dots & h^n(\mathcal{F}(-1)) & h^n(\mathcal{F}) & & \\ h^{n-1}(\mathcal{F}(-n)) & h^{n-1}(\mathcal{F}(-n+1)) & \dots & h^{n-1}(\mathcal{F}(-1)) & h^{n-1}(\mathcal{F}) & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ h^0(\mathcal{F}(-n)) & h^0(\mathcal{F}(-n+1)) & \dots & h^0(\mathcal{F}(-1)) & h^0(\mathcal{F}) & & \end{array}$$

I termini del complesso  $L$  che appare nel teorema di Beilinson sono ottenuti prendendo la somma diretta dei termini sulle diagonali “NordOvest-SudEst” come nella figura seguente:

avendo l'accortezza di considerare ogni fibrato  $\Omega^p(p)$  che appare nel diagramma con esponente il corrispondente intero che si ricava dalla tabella di coomologia.

Puó essere istruttivo considerare il caso di un fascio  $\mathcal{F}$  su  $\mathbf{P}^2$ . Ricordando che  $\Omega_{\mathbf{P}^2}^2(2) \simeq \mathcal{O}(-1)$  si ricava il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(-1) & \Omega^1(1) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O}(-1) & \Omega^1(1) & \mathcal{O} \\ \mathcal{O}(-1) & \Omega^1(1) & \mathcal{O} \end{array}$$

con tabella di coomologia

$$\begin{array}{ccc} h^2(\mathcal{F}(-2)) & h^2(\mathcal{F}(-1)) & h^2(\mathcal{F}) \\ h^1(\mathcal{F}(-2)) & h^1(\mathcal{F}(-1)) & h^1(\mathcal{F}) \\ h^0(\mathcal{F}(-2)) & h^0(\mathcal{F}(-1)) & h^0(\mathcal{F}) \end{array}$$

da cui il complesso

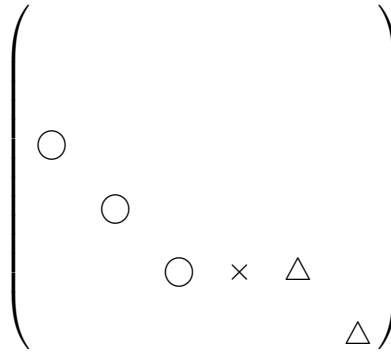
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathcal{O}(-1)^{h^2(\mathcal{F}(-2))} & & \\ & & & & \oplus & & \\ & & \mathcal{O}(-1)^{h^1(\mathcal{F}(-2))} & & \oplus & & \\ 0 \longrightarrow & \mathcal{O}(-1)^{h^0(\mathcal{F}(-2))} \xrightarrow{d_{-2}} & \oplus & \xrightarrow{d_{-1}} & \Omega^1(1)^{h^1(\mathcal{F}(-1))} \xrightarrow{d_0} & & \\ & & \Omega^1(1)^{h^0(\mathcal{F}(-1))} & & \oplus & & \\ & & & & \mathcal{O}^{h^0(\mathcal{F})} & & \\ & & & & & & \\ & & \Omega^1(1)^{h^2(\mathcal{F}(-1))} & & & & \\ \xrightarrow{d_0} & \oplus & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{O}^{h^2(\mathcal{F})} \longrightarrow & 0 & & \\ & \mathcal{O}^{h^1(\mathcal{F})} & & & & & \end{array}$$

i cui successivi gruppi di coomologia sono

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathcal{F} \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

cioé il complesso é sempre esatto tranne che nel punto medio.

**OSSERVAZIONE IMPORTANTE.** *La minimalitá del complesso  $L$  implica che non ci sono frecce verticali nel diagramma. Graficamente, da ogni addendo segnato in figura con  $\times$ , arrivano frecce solo dagli addendi segnati con  $\circ$  e partono frecce solo verso gli addendi segnati con  $\triangle$ .*



Se gli addendi segnati con  $\circ$  e  $\triangle$  sono nulli allora il termine segnato con  $\times$  é

- i) zero se é fuori dalla diagonale principale
- ii) addendo diretto di  $\mathcal{F}$  se é sulla diagonale principale.

**Osservazione .** *Supponiamo  $L^k = 0$  per  $k > 0$ . Allora il complesso del teorema di Beilinson diventa la risoluzione sinistra*

$$0 \longrightarrow L^{-n} \longrightarrow \dots \longrightarrow L^{-1} \longrightarrow L^0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

mentre se  $L^k = 0$  per  $k < 0$  abbiamo la risoluzione destra

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow L^n \longrightarrow 0$$

**Esercizio.** *Provare, utilizzando il teorema di Beilinson, che se  $\mathcal{F} \neq 0$  é un fascio coerente su  $\mathbf{P}^n$ ,  $\forall m \in \mathbf{Z} \exists i \in \mathbf{N}$  tale che  $H^i(\mathcal{F}(m-i)) \neq 0$ .*

Per sottolineare l'importanza del teorema di Beilinson ricaveremo da esso alcuni tra i risultati principali riguardanti i fasci su  $\mathbf{P}^n$ .

**Definizione.** *Un fascio coerente  $\mathcal{F}$  su  $\mathbf{P}^n$  si dice  $m$ -regolare se  $H^i(\mathcal{F}(m-i)) = 0 \quad \forall i > 0$*

Notiamo che  $\mathcal{F}$  é  $m$ -regolare se e solo se  $\mathcal{F}(m)$  é 0-regolare. Per il teorema B di Serre ogni  $\mathcal{F}$  é  $m$ -regolare se  $m \gg 0$ .

**Criterio di Castelnuovo-Mumford 3.2.** Sia  $\mathcal{F}$  un fascio  $m$ -regolare su  $\mathbf{P}^n$ . Allora

- i)  $\mathcal{F}(m)$  é globalmente generato
- ii)  $\mathcal{F}$  é  $p$ -regolare  $\forall p \geq m$

*Dimostrazione* Applichiamo il teorema di Beilinson al fascio  $\mathcal{F}(m)$ . Per ipotesi  $L^0 \simeq \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{F})$  e per l'osservazione precedente é sufficiente provare che  $L^k = 0$  per  $k > 0$  (per avere i)). Piú precisamente é sufficiente provare che  $L^1 = 0$ , infatti se  $L^1 = 0$  allora  $\mathcal{F}(m+1)$  é 0-regolare e l'annullamento di  $L^2$  segue dall'annullamento del termine  $L^1$  del complesso di Beilinson relativo al fascio  $\mathcal{F}(m+1)$ . Pertanto se  $L^1 = 0$  abbiamo provato induttivamente anche ii).

Abbiamo subito che  $d_0 = 0$  perché é nullo il suo dominio, quindi  $H^1(\mathcal{F}) = 0$ , infatti anche il morfismo  $d_1$  ristretto a  $\mathcal{O} \otimes H^1(\mathcal{F})$  é nullo. Analogamente applicando il teorema di Beilinson a  $\mathcal{F}(m-1)$  si ottiene che  $H^2(\mathcal{F}(-2)) = 0$ , applicandolo a  $\mathcal{F}(m-2)$  si annulla  $H^3(\mathcal{F}(-3))$  e cosí via.

**Osservazione.** Dalla dimostrazione del teorema di Beilinson segue anche che i morfismi “orizzontali” nel complesso di Beilinson coincidono con i morfismi naturali di moltiplicazione (vedi [AnO1]).

Ad esempio il morfismo (che é parte di  $d_{-1}$ )  $\Omega^1(1) \otimes H^0(\mathcal{F}(-1)) \rightarrow \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{F})$  si fattorizza mediante:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(1) \otimes H^0(\mathcal{F}(-1)) & \longrightarrow & \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{F}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \otimes H^0(\mathcal{F}(-1)) & \end{array}$$

dove il morfismo “SudEst” é definito dalla successione di Eulero.

**Esercizio.** Provare che se  $\mathcal{F}$  é un fascio  $m$ -regolare su  $\mathbf{P}^n$  allora i morfismi naturali

$$H^0(\mathcal{F}(k)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{F}(k+1))$$

sono suriettivi se  $k \geq m$

*Suggerimento:* Utilizzare il teorema di Beilinson e l'osservazione precedente.

Ricordiamo che un fascio coerente  $\mathcal{F}$  su una varietà  $X$  si dice *senza torsione* se  $\forall x \in X, \forall a \in \mathcal{O}_{x,X}, \forall f \in \mathcal{F}_{x,X}$  tali che  $af = 0$  segue  $a = 0$  oppure  $f = 0$ . In particolare un fibrato é un fascio senza torsione.

**Lemma 3.3.** Sia  $\mathcal{F}$  un fascio senza torsione su  $\mathbf{P}^n$ . Se  $H^0(\mathcal{F}) \neq 0$  segue  $h^0(\mathcal{F}) < h^0(\mathcal{F}(1))$

*Dimostrazione* Sia  $s_1, \dots, s_r$  una base di  $H^0(\mathcal{F})$ . Proveremo che l'immagine dell'applicazione naturale  $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)) \otimes H^0(\mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{F}(1))$  ha dimensione  $> r$ . Siano  $x_0, \dots, x_n$  coordinate omogenee. Siccome  $\mathcal{F}$  é senza torsione gli elementi della forma  $x_0 \otimes s_i$  generano un

sottospazio di dimensione  $r$ , cosí anche per gli elementi della forma  $x_1 \otimes s_i$ . Se la nostra affermazione non é vera i due sottospazi precedenti devono coincidere, pertanto esiste una matrice  $A$   $r \times r$  di costanti tale che

$$x_0 \otimes (s_1, \dots, s_r) = x_1 \otimes (s_1, \dots, s_r) \cdot A$$

Sia  $v = (v_1, \dots, v_r)$  un autovettore di  $A$  con autovalore  $\lambda$ . Allora

$$x_0 \otimes \sum v_i s_i = x_1 \otimes \lambda \sum v_i s_i$$

da cui

$$(x_0 - \lambda x_1) \otimes \sum v_i s_i = 0$$

contro l'ipotesi che  $\mathcal{F}$  sia senza torsione.

**Corollario 3.4.** *Sia  $\mathcal{F}$  un fascio senza torsione su  $\mathbf{P}^n$ . Allora  $H^0(\mathcal{F}(t)) = 0$  per  $t \ll 0$ .*

**Esercizio.** *Provare che ogni fascio senza torsione su una curva  $C$  e' localmente libero (e quindi corrisponde ad un fibrato)*

*Suggerimento:* Sia  $x \in C$ , sia  $z$  parametro locale per  $C$  in  $x$  e  $M$  un  $\mathcal{O}_x$ -modulo finitamente generato senza torsione. Siano  $m_1, \dots, m_r$  generatori minimali per  $M$  e consideriamo l'applicazione suriettiva corrispondente  $A^r \xrightarrow{\phi} M$ . Bisogna provare che  $\phi$  é iniettiva. Se  $(a_1, \dots, a_r) \in \ker(\phi)$  vale  $\sum a_i m_i = 0$ . Abbiamo:  $a_i = c_i z^{n_i} + \dots$ . Posto  $N = \min\{n_i\}$  possiamo scrivere ...

**Criterio di Horrocks 3.5.** *Sia  $\mathcal{F}$  un fascio libero da torsione su  $\mathbf{P}^n$ .  $\mathcal{F}$  si spezza come somma diretta di fibrati in rette, cioé  $\mathcal{F} \simeq \bigoplus \mathcal{O}(a_i)$  se e solo se  $H^i(\mathcal{F}(t)) = 0 \forall t \in \mathbf{Z}, \forall i$  tali che  $0 < i < n$ .*

Il criterio di Horrocks (criterio di spezzamento) si può riassumere nell'affermazione che un fascio senza torsione si spezza se e solo se ha coomologia intermedia nulla.

*Dimostrazione* Se  $\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{O}(a_i)$  la sua coomologia intermedia si annulla. Viceversa sia  $\mathcal{F}$  libero da torsione con coomologia intermedia nulla. Per il lemma 3.3 ed il teorema A di Serre esiste  $m \in \mathbf{Z}$  tale che  $h^0(\mathcal{F}(m)) = 0, h^0(\mathcal{F}(m+1)) \neq 0$ . Applicando il teorema di Beilinson al fascio  $\mathcal{F}(m+1)$  abbiamo  $L^{-1} = 0$ . Per l'osservazione che segue il teorema di Beilinson abbiamo  $\mathcal{F}(m+1) \simeq \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{F}(m+1)) \oplus \mathcal{G}$ . Possiamo ripetere il ragionamento precedente con  $\mathcal{G}$  al posto di  $\mathcal{F}$  ed otteniamo la tesi per induzione sul rango.

**Corollario 3.6. (Segre-Bellatalla-Grothendieck, si veda [GO] e [Gr1]).** *Ogni fascio senza torsione su  $\mathbf{P}^1$  si spezza come somma diretta di fibrati in rette.*

**Osservazione.** *Si può provare (vedi [AnO1]) che un fascio coerente su  $\mathbf{P}^n$  ha coomologia intermedia nulla se e solo se é somma diretta di fibrati in rette e di fasci con supporto su schemi 0-dimensionali.*



**Corollario 3.7. (Teorema di Hilbert-Burch).** *Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  una varietà aritmeticamente Cohen-Macaulay di codimensione 2. Allora  $X$  é definita dai minori di ordine massimo di una matrice  $r \times (r + 1)$  di polinomi omogenei.*

*Dimostrazione* Scegliendo dei generatori per  $I(X) = \oplus_t H^0(\mathcal{I}_X(t))$  si trova un morfismo suriettivo  $\oplus \mathcal{O}(-a_i) \xrightarrow{\phi} \mathcal{I}_X$  tale che  $H^0(\oplus \mathcal{O}(-a_i + t)) \xrightarrow{\Phi_t} \mathcal{I}_X(t)$  é suriettiva  $\forall t \in \mathbf{Z}$ . Posto  $K := \ker \phi$  segue  $H^1(K(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbf{Z}$ . Dall'ipotesi e dalla successione di coomologia associata alla successione esatta

$$0 \longrightarrow K(t) \longrightarrow \oplus \mathcal{O}(-a_i + t) \xrightarrow{\phi} \mathcal{I}_X(t) \longrightarrow 0$$

segue anche  $H^i(K(t)) = 0$  per  $2 \leq i \leq n - 1 \quad \forall t \in \mathbf{Z}$ . Quindi dal criterio di Horrocks  $K$  si spezza come somma diretta di fibrati in rette.

Vale anche una versione duale del teorema di Beilinson:

**Teorema di Beilinson II 3.8..** *Sia  $\mathcal{F}$  un fascio coerente su  $\mathbf{P}^n$ . Allora esiste un complesso*

$$0 \longrightarrow L^{-n} \xrightarrow{d_{-n}} L^{-n+1} \xrightarrow{d_{-n+1}} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} L^n \longrightarrow 0$$

con  $L^k = \oplus_{j+k=i} \mathcal{O}(-j)^{h^i(\mathcal{F} \otimes \Omega^j)}$  tale che

$$\frac{\ker d_k}{\text{Im } d_{k-1}} \simeq \begin{cases} \mathcal{F} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Inoltre il complesso  $L$  é "minimale" nel senso che tutti i morfismi naturali del tipo  $\mathcal{O}(-p) \longrightarrow \mathcal{O}(-p)$  che si ricavano dai morfismi  $d_k$  sono nulli.

**Osservazione.** Su  $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(V)$  vale

$$\text{Hom}(\mathcal{O}(p), \mathcal{O}(q)) = S^{q-p}V$$

$$\text{Hom}(\Omega^p(p), \Omega^q(q)) = \wedge^{p-q}V^*$$

Quindi i morfismi dei complessi che si ottengono con Beilinson I (Beilinson II) possono essere visti come matrici a coefficienti nell'algebra esterna (simmetrica) di  $V$ .

Vogliamo ora ricavare un miglioramento del criterio di spezzamento di Horrocks, valido nel caso di fibrati di rango piccolo.

**Lemma 3.9.** *Sia  $E$  un fibrato globalmente generato su  $X$ . Se  $h^0(E^*) \neq 0$  allora  $E \simeq \mathcal{O} \oplus F$*

*Dimostrazione* Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}^r & \xrightarrow{f} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow & \downarrow g & \\ & & & \mathcal{O} & \end{array}$$

dove  $g \cdot f$  é diversa da zero e quindi é suriettiva. Pertanto si puó trovare un morfismo  $h: \mathcal{O} \longrightarrow E$  tale che  $h \cdot g = id$  e  $\mathcal{O}$  é addendo diretto di  $E$ .

**Criterio di Evans-Griffith 3.10.** Sia  $E$  un fibrato di rango  $r$  su  $\mathbf{P}^n$  tale che  $H^i(E(t)) = 0$  per  $1 \leq i \leq r - 1, \forall t \in \mathbf{Z}$ . Allora  $E$  si spezza come somma diretta di fibrati in rette, cioè  $E \simeq \oplus \mathcal{O}(a_i)$

*Dimostrazione* (L. Ein [E]) Tensorizzando per fibrati in rette, possiamo supporre  $E$   $(-1)$ -regolare ma non  $(-2)$ -regolare. Allora per Castelnuovo-Mumford 3.2  $E(-1)$  é globalmente generato e  $E$  é ampio. Pertanto  $H^i(E(-2 - i)) = H^i(E \otimes K_{\mathbf{P}^n}(n - 1 - i)) = 0$  dal teorema di annullamento di Le Potier (si veda l'appendice F) per  $i \geq r$  e  $n - 1 - i \geq 0$  (in modo che  $E(n - 1 - i)$  sia ampio), cioè per  $r \leq i \leq n - 1$ . Usando l'ipotesi abbiamo  $H^i(E(-2 - i)) = 0$  per  $1 \leq i \leq n - 1$ . Siccome  $E$  non é  $-2$ -regolare segue  $h^n(E(-2 - n)) = h^0(E^*(1)) \neq 0$  e quindi per il lemma 3.9  $E$  ammette  $\mathcal{O}(1)$  come addendo diretto. La tesi segue per induzione su  $r$ .

**Teorema delle sizigie di Hilbert 3.11.** (Versione “fascificata”, si veda anche l'appendice B) Sia  $\mathcal{F}$  un fascio coerente su  $\mathbf{P}^n$ . Allora esiste una risoluzione esatta

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

dove ogni  $F_i$  é somma diretta di fibrati in rette.

*Dimostrazione* Applicando il teorema A di Serre ai fasci  $\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \Omega^1(1), \dots, \mathcal{F} \otimes \Omega^n(n)$  possiamo supporre, tensorizzando  $\mathcal{F}$  per fibrati in rette, che  $H^i(\mathcal{F} \otimes \Omega^j(j)) = 0$  per  $i > 0, j \geq 0$ . La tesi segue subito applicando Beilinson II a  $\mathcal{F}$ .

Il “record” per quanto riguarda il teorema precedente é raggiunto dal fascio  $\mathcal{O}_Q$  dove  $Q$  é un punto di  $\mathbf{P}^n$  (si scriva il complesso di Koszul di una sezione di  $\mathcal{O}^n$ )

La lunghezza minima di una risoluzione libera di  $\mathcal{F}$  puó essere assunta come una misura di quanto  $\mathcal{F}$  non si spezza. Per apprezzare l'importanza del teorema delle sizigie conviene osservare che é falso se al posto di  $\mathbf{P}^n$  si considera una varietà  $X$ . Ad esempio se  $X$  é la grassmanniana  $Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^3)$  isomorfa alla quadrica liscia di dimensione 4, il fibrato quoziente  $Q$  (fibrato spinore) non puó ammettere una risoluzione in termini di somme dirette di fibrati in rette perché la seconda classe di Chern ha bigrado  $(0, 1)$  mentre ogni fibrato che ammette una risoluzione con somme dirette di fibrati in rette ha seconda classe di Chern con bigrado bilanciato  $(q, q)$ . Si puó trovare al piú una risoluzione infinita

$$\dots \mathcal{O}(-2)^4 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^4 \longrightarrow \mathcal{O}^4 \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Del resto é noto che fibrati spinori e fibrati in rette generano il gruppo di Grothendieck delle quadriche.

Horrocks ha perfezionato nel 1964 [Hor64] il teorema delle sizigie: (in realtà in [Hor64] il teorema seguente é enunciato solo nel caso dei fibrati, ma la dimostrazione é sostanzialmente la stessa nel caso di fasci liberi da torsione)

**Teorema 3.12.** (Horrocks) Sia  $\mathcal{F}$  un fascio libero da torsione su  $\mathbf{P}^n$ . Allora esiste una risoluzione

$$0 \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

dove ogni  $F_i$  é somma diretta di fibrati in rette.

*Dimostrazione* Per ipotesi (si veda il corollario 3.4) esiste  $F_0$  ed un morfismo suriettivo  $F_0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{F}$  tale che  $H^0(F_0(t)) \longrightarrow H^0(\mathcal{F}(t))$  é suriettiva  $\forall t \in \mathbf{Z}$ . Quindi  $H^1(\text{Ker } f_0(t)) = 0 \forall t \in \mathbf{Z}$ . Analogamente esiste  $F_1$  ed un morfismo suriettivo  $F_1 \xrightarrow{f_1} \text{Ker } f_0$  tale che  $H^0(F_1(t)) \longrightarrow H^0(\text{Ker } f_0(t))$  é suriettiva  $\forall t \in \mathbf{Z}$ . Quindi  $H^i(\text{Ker } f_1(t)) = 0 \forall t \in \mathbf{Z}$  e per  $1 \leq i \leq 2$ . Si prosegue in questo modo fino a che  $\text{Ker } f_{n-2}$  ha coomologia intermedia nulla e quindi si può porre  $F_{n-1} := \text{Ker } f_{n-2}$  per il criterio di Horrocks. Questo prova la tesi.

Il teorema precedente può essere applicato ad esempio ad i fasci di ideali  $\mathcal{I}_X$ , che sono tutti liberi da torsione.

É interessante considerare anche il seguente:

**Teorema 3.13.** Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  varietà di codimensione  $e$ . Allora esiste una risoluzione

$$0 \longrightarrow E_{e-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

con  $E_i$  fibrati vettoriali.

*Dimostrazione* Segue da proprietà coomologiche che si possono trovare in [Serre]

Nel teorema precedente i fibrati  $E_i$  per  $i \leq e - 2$  possono essere scelti somma diretta di fibrati in rette.

**Esercizio.** Provare che nel teorema 3.13 tutti i fibrati  $E_i$  sono somma diretta di fibrati in rette se e solo se  $X$  é aCM.

**Esercizio.** Si trovi su  $\mathbf{P}^n$  una risoluzione

$$0 \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \Omega^1(1) \longrightarrow 0$$

dove ogni  $F_i$  é somma diretta di fibrati in rette e si provi che non é possibile trovare una risoluzione analoga piú corta.

**Corollario 3.14.** Sia  $\mathcal{F}$  un fascio senza torsione su  $\mathbf{P}^2$ . Allora esiste una risoluzione:

$$0 \longrightarrow \oplus \mathcal{O}(p_i) \longrightarrow \oplus \mathcal{O}(q_j) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Veniamo finalmente all'applicazione che ci interessa piú da vicino: la costruzione di varietà proiettive dalle sizigie ottenute dal teorema di Beilinson. Questa tecnica é straordinariamente potente nel caso di codimensione 2, cominceremo gradualmente a vedere degli esempi molto semplici.

Premettiamo la:

**Definizione.** Una varietà  $X \subset \mathbf{P}^n$  si dice  $k$ -normale se  $H^1(\mathcal{I}_X(k)) = 0$ . Questo equivale a dire che il morfismo di restrizione  $H^0(\mathcal{O}(k)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(k))$  é suriettivo. In linguaggio classico,  $X$  si dice  $k$ -normale se le ipersuperfici di grado  $k$  tagliano su  $X$  sistemi completi.

**Esercizio.** Ogni varietà é  $k$ -normale per  $k < 0$  ed é 0-normale se e solo se é connessa.

In particolare una varietà  $X \subset \mathbf{P}^n$  non contenuta in iperpiani (i.e. nondegenere) é 1-normale se e solo se il sistema lineare iperpiano é completo, quindi se e solo se  $X$  non si può ottenere come proiezione da  $X' \subset \mathbf{P}^m$  con  $m > n$  (e naturalmente  $X'$  nondegenere).

**Definizione.** Una varietà si dice proiettivamente normale se e solo se é  $k$ -normale  $\forall k \in \mathbf{Z}$ .

**Osservazione.** ([Ha])  $X \subset \mathbf{P}^n$  é proiettivamente normale se e solo se il cono affine  $CX \subset \mathbf{C}^{n+1}$  é normale, quindi se e solo se l'anello delle coordinate  $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]/I(X)$  é integralmente chiuso.

Abbiamo già visto (prop. 1.7) che le varietà intersezione completa sono proiettivamente normali.

**Teorema 3.15.** Una varietà  $X \subset \mathbf{P}^n$  di codimensione 2 nonsingolare e sottocanonica (ipotesi superflua se  $n \geq 6$ ) é intersezione completa se e solo se é proiettivamente normale.

*Dimostrazione* Per il corollario 1.13 ed il complesso di Koszul (2.12) esiste un fibrato  $E$  di rango 2 su  $\mathbf{P}^n$  che compare in una successione esatta ( $t \in \mathbf{Z}$ )

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(t) \rightarrow E(t) \rightarrow \mathcal{I}_X(c_1(E) + t) \rightarrow 0$$

Il teorema é allora una immediata conseguenza del criterio di Evans-Griffith 3.10.

**Lemma 3.16.** La cubica gobba  $C$  in  $\mathbf{P}^3$  data da  $(s^3, s^2t, st^2, t^3)$  (vedi il primo esempio nel capitolo 1) é proiettivamente normale.

*Dimostrazione* Possiamo identificare  $C \simeq \mathbf{P}^1$ . Con questa identificazione abbiamo  $\mathcal{O}(k)|_C \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(3k)$ . Dobbiamo provare che se  $F$  é un polinomio omogeneo di grado  $3k$  in  $s, t$  allora esiste un polinomio omogeneo  $G$  di grado  $k$  in 4 variabili tali che

$$F(s, t) = G(s^3, s^2t, st^2, t^3)$$

Sia dato il monomio  $s^i t^{3k-i}$ . Dividendo per 3 abbiamo:

$$i = 3p + q \quad 3k - i = 3p' + q' \text{ con } 0 \leq q, q' \leq 2 \quad q + q' \equiv 0 \pmod{3}$$

e quindi  $s^i t^{3k-i} = (s^3)^p (t^3)^{p'} s^q t^{q'}$  come volevamo

**Esercizio.** *Provare che le curve razionali normali in  $\mathbf{P}^n$  sono proiettivamente normali.*

Proviamo per esercizio a scrivere la tabella di coomologia di  $\mathcal{I}_C$  dove  $C$  é la cubica gobba. Abbiamo subito  $h^0(\mathcal{I}_C(t)) = 0$  per  $t \leq 1$  perché  $C$  non é piana,  $h^1(\mathcal{I}_C(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbf{Z}$  per il lemma 3.16 e dalla successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_C(t) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(t) \longrightarrow \mathcal{O}_C(t) \longrightarrow 0 \quad (3.17)$$

si ricava  $h^3(\mathcal{I}_C(t)) = h^3(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(t)) = 0$  per  $t \geq -3$

La tabella del fascio  $\mathcal{I}_C(2)$  é allora

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

Abbiamo  $\chi(\mathcal{I}_C(t)) = \binom{t+3}{3} - (3t+1)$  e quindi

$$\chi(\mathcal{I}_C(-1)) = 2 \quad \chi(\mathcal{I}_C) = 0 \quad \chi(\mathcal{I}_C(1)) = 0 \quad \chi(\mathcal{I}_C(2)) = 3$$

Possiamo aggiungere alla tabella:

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$2 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

Adesso notiamo che nel complesso di Beilinson  $L^1 = L^3 = 0$ , quindi anche  $L^2 = 0$  e la tabella completa é

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$2 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 3$$

Naturalmente questa tabella poteva essere calcolata direttamente dalla successione 3.17 ricordando che  $\mathcal{O}_C(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(3)$ .

La tabella trovata dá la risoluzione

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2(-1) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}^3 \xrightarrow{\psi} \mathcal{I}_C(2) \longrightarrow 0$$

Infatti  $\phi$  é dato dalla matrice

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3$$

e le 3 quadriche che definiscono  $\psi$  sono date dai 3 minori  $2 \times 2$ .

**Esercizio.** Verificare che la tabella di coomologia per  $I_C(2)$  dove  $C$  é la quartica ellittica in  $\mathbf{P}^3$  é

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Verificare che dal teorema di Beilinson e dalla successione di Eulero si ottiene la risoluzione:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow \mathcal{I}_C(2) \longrightarrow 0$$

e quindi  $C$  si ottiene come l'intersezione (completa) di due quadriche.

**Esercizio.** Verificare che la tabella di coomologia per  $I_C(2)$  dove  $C$  é la quartica razionale in  $\mathbf{P}^3$  é

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Dal teorema di Beilinson si ottiene la risoluzione

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^3 \longrightarrow \Omega^1(1) \oplus \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{I}_C(2) \longrightarrow 0$$

**Lemma 3.18.** Un morfismo di fasci  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}^a \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}^b(1)$  non può essere suriettivo se  $b > a - n$

*Dimostrazione* Sia  $K = \text{Ker}(f)$ , allora il polinomio di Chern di  $K(-1)$  é  $(1-t)^a$  e quindi  $c_n(K(-1)) \neq 0$ . D'altronde se  $f$  é suriettivo allora  $K(-1)$  é un fibrato di rango  $a-b$  e quindi  $c_i(K(-1)) = 0$  se  $i > a-b$ .

**Esempio.** La superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^4$ .

Abbiamo già visto nel capitolo 2 che la superficie di Veronese immagine di  $\mathbf{P}^2$  tramite il sistema lineare delle coniche può essere proiettata in modo liscio in  $\mathbf{P}^4$ . Chiamiamo  $S$  l'immagine in  $\mathbf{P}^4$ . Naturalmente  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(1)|_S \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2)$  e quindi  $\text{deg } S = 4$ . Pertanto  $\chi(\mathcal{I}_S(t)) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(t)) - \chi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2t)) = \binom{t+4}{4} - \binom{2t+2}{2}$  e vale

$$\chi(\mathcal{I}_S(-2)) = -3 \quad \chi(\mathcal{I}_S(-1)) = 0 \quad \chi(\mathcal{I}_S) = 0 \quad \chi(\mathcal{I}_S(1)) = -1 \quad \chi(\mathcal{I}_S(2)) = 0$$

Siccome  $h^1(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbf{Z}$  segue  $h^2(\mathcal{I}_S(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbf{Z}$  e con considerazioni elementari considerando la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_S(t) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(t) \longrightarrow \mathcal{O}_S(t) \longrightarrow 0$$

e l'isomorfismo  $\mathcal{O}_S(t) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(2t)$  si riempie la seguente tabella di coomologia per  $\mathcal{I}_S(2)$  (scriviamo nella prima riga i valori di  $\chi$ )

$$\begin{array}{ccccc}
-3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & x \\
0 & 0 & 0 & 0 & x
\end{array}$$

Rimane da determinare  $x = h^0(\mathcal{I}_S(2)) = h^1(\mathcal{I}_S(2))$ . Se fosse  $x \neq 0$  avremmo un morfismo suriettivo  $\Omega^1(1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^x$  e questo é assurdo perché  $\ker(\alpha)$  sarebbe un fibrato di rango  $n - x$  con  $c_n(\ker(\alpha)) \neq 0$ . Pertanto  $x = 0$  ed il teorema di Beilinson fornisce la seguente risoluzione:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^3 \xrightarrow{f} \Omega^1(1) \longrightarrow \mathcal{I}_S(2) \longrightarrow 0 \quad (3.19)$$

Notiamo che abbiamo provato che ogni superficie di Veronese  $S$  in  $\mathbf{P}^4$  appare in una risoluzione come (3.19). Viceversa, per il teorema 2.8 il generico morfismo  $f$  in (3.19) definisce come luogo di degenerazione una superficie liscia  $S'$  che ha gli stessi invarianti numerici della superficie di Veronese. Per provare che  $S'$  é isomorfo a  $\mathbf{P}^2$  e quindi é la superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}(V)$  basta osservare che dal complesso di Koszul (o dal teorema di Bott) segue  $H^0(\Omega^1(2)) \simeq \wedge^2 V$  ed una sezione che corrisponde ad una matrice antisimmetrica  $A$  si annulla esattamente nel punto  $a$  dato da  $A \cdot a = 0$  ( $a$  é dato dai 5 pfaffiani principali di  $A$ , vedi appendice A). Seguiamo il ragionamento di Castelnuovo [Ca].  $f$  definisce uno sottospazio  $\text{Span}(A_0, A_1, A_2) \subset \wedge^2 V$  e si abbassa di rango nei punti  $x$  tali che esiste  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0, 0)$  con

$$(\lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) x = 0$$

Per l'interpretazione geometrica dello spazio delle matrici antisimmetriche data nel capitolo 2 possiamo quindi dare un significato piú preciso alla parola "generico" per  $f$ : deve corrispondere ad un  $\mathbf{P}^2$  lineare in  $\mathbf{P}^9 \simeq \mathbf{P}(H^0(\wedge^2 V))$  che non incontra  $Gr(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^4)$  immersa con il morfismo di Plücker. Notiamo anche che gli pfaffiani principali di  $\lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$  definiscono una parametrizzazione biregolare di  $S'$  in termini di  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ . I minori  $3 \times 3$  della matrice  $5 \times 3$   $(A_0 x | A_1 x | A_2 x)$  definiscono equazioni per la superficie di Veronese (si

tratta quindi di 10 cubiche come si verifica anche dalla risoluzione). Ci sono 3 relazioni e l'ideale omogeneo é generato da 7 cubiche, infatti  $h^0(\mathcal{I}_S(3)) = 7$ .

Un altro modo per scrivere equazioni della superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^4$  é il seguente. Nello spirito (e con le stesse notazioni) della descrizione  $SL(2)$ -invariante data per la quartica razionale in  $\mathbf{P}^4$  nell'esempio che segue il teorema 2.14, l'immersione della superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^4$  puó essere vista come

$$\mathbf{P}(S^2V) \longrightarrow \mathbf{P}(S^4V)$$

e le 7 cubiche sono i coefficienti del polinomio di grado 6 in  $(x, y)$  dato da

$$\det \begin{pmatrix} H_x & H_y \\ F_x & F_y \end{pmatrix}$$

(si veda anche [Har92] e [Gu]).

**Osservazione.** 4 cubiche sono sufficienti a definire la superficie di Veronese  $S$  in  $\mathbf{P}^4$  come schema, mentre si puó provare che 3 non bastano [Ot92]. In termini di fibrati vettoriali abbiamo la risoluzione

$$0 \longrightarrow F^*(-4) \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^4 \longrightarrow \mathcal{I}_S \longrightarrow 0 \quad (3.20)$$

dove  $F$  é il fibrato di Tango [OSS]. Si noti l'analogia con la descrizione della quartica razionale in  $\mathbf{P}^3$  data nell'appendice B.

**Esercizio.** (Da risolversi utilizzando Macaulay e/o Cocoa) Trovare le equazioni di 4 cubiche in  $\mathbf{P}^4$  che definiscono la superficie di Veronese come schema.

*Suggerimento: si cominci col trovare i generatori dell'ideale omogeneo, e poi si prenda una opportuna combinazione lineare.*

**Osservazione.** Notiamo che le superfici in  $\mathbf{P}^4$  definite come schema da 3 equazioni ma non da 2 definiscono con successioni analoghe alla (3.20) dei fibrati (sempre per [Serre]) indecomponibili di rango 2 su  $\mathbf{P}^4$ . Esempi di questo tipo sono dati da superfici nella stessa classe di liaison del toro di Horrocks-Mumford (questo sará piú chiaro dopo la lettura del capitolo seguente).

Convieni soffermarsi ancora sull'uso del teorema di Beilinson nell'esempio appena svolto relativo alla superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^4$ . Supponiamo di non conoscere l'esistenza di una superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^4$ . Se esiste una  $S$  siffatta, le informazioni sulla sua coomologia ci portano a scrivere una candidata risoluzione per  $\mathcal{I}_S$ . A questo punto teoremi di tipo Bertini (vedi 2.8) ci portano a concludere l'esistenza della superficie che cercavamo. Questa tecnica é stata impiegata sistematicamente da Decker, Ein, Popescu e Schreyer ([DES] e [DP]) per costruire superfici in  $\mathbf{P}^4$ . Spesso per provare la lisciezza di superfici



costruite in questo modo non si possono applicare teoremi di tipo Bertini ed é necessario scrivere esplicitamente il morfismo tra fibrati suggerito dal complesso di Beilinson e calcolare il rango della matrice jacobiana corrispondente. Questo calcolo é eseguibile solo utilizzando sistemi di calcolo simbolico specializzati, come Macaulay o Cocoa.

**Esercizio.** Scrivere l'equazione della varietà secante della superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^5$  parametrizzata da  $(x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2)$ . Verificare che  $Q = (0, 1, 1, 0, 1, 0) \notin$  alla varietà secante e proiettare da  $Q$  sull'iperpiano  $X_4 = 0$ . Trovare una parametrizzazione dell'immagine.

*Risposta: la varietà secante ha equazione*

$$(X_0X_3 - X_1^2)X_5 - X_0X_4^2 - X_2^2X_3 + 2X_1X_2X_4 = 0$$

(si veda [GH] pagg. 179-180). Con ovvie notazioni si trova in  $\mathbf{P}^4$  la parametrizzazione  $(x^2, y(x-z), z(x-y), y^2, z^2)$ .

**Esercizio.** Data la superficie  $S$  in  $\mathbf{P}^4$  parametrizzata da  $(x^2, y(x-z), z(x-y), y^2, z^2)$ , verificare che il morfismo di restrizione  $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(2)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_S(2))$  é un isomorfismo e quindi  $S$  non é contenuta in quadriche.

*Questo esercizio richiede calcoli abbastanza lunghi. É interessante osservare che la tecnica con cui avevamo provato in precedenza che nessuna superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^4$  é contenuta in quadriche (Beilinson + analisi della top Chern class) non aveva richiesto alcun calcolo.*

## §4. LA LIAISON

Abbiamo già incontrato alcuni esempi di liaison. Il risultato fondamentale, formalizzato da Peskine e Szpiro [PS] é il seguente:

**Teorema 4.1.** *Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  di codimensione 2 nonsingolare e sia  $n \leq 5$ . Se  $\mathcal{I}_X(t)$  é globalmente generato e se  $d_1, d_2 \geq t$  allora date due generiche ipersuperfici  $V_1, V_2 \supset X$  di grado rispettivamente  $d_1, d_2$  abbiamo  $V_1 \cap V_2 = X \cup Y$  (come schemi) con  $Y$  varietà nonsingolare e  $\deg X + \deg Y = d_1 d_2$ .*

*Dimostrazione* Scoppiamo  $\mathbf{P}^n$  lungo  $X$ . Otteniamo un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \tilde{P} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \sigma \\ X & \longrightarrow & \mathbf{P}^n \end{array}$$

dove  $E$  é il divisore eccezionale. Le ipersuperfici  $V_1, V_2$  hanno come come proper transform  $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2$  che sono zeri di sezione di  $s_1 \in H^0[\mathcal{O}_{\tilde{P}}(-E) \otimes \sigma^*(\mathcal{O}(d_1))]$ , risp.  $s_2 \in H^0[\mathcal{O}_{\tilde{P}}(-E) \otimes \sigma^*(\mathcal{O}(d_2))]$ . Entrambi questi fibrati in rette sono globalmente generati come quozienti di  $\sigma^*\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}(d_i)$  (qui si usa l'ipotesi!). Per il teorema di Bertini  $\tilde{Y} := \tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2$  é liscio ed interseca  $E$  trasversalmente. Posto  $Y := \sigma(\tilde{Y})$  dobbiamo provare che  $Y$  é liscio. Questo é ovvio in  $Y \setminus X$  e per transversalita' é sufficiente provare che la restrizione  $\pi': \tilde{X} \cap E \rightarrow X$  é iniettiva. Le fibre di  $\pi'$  sono tutte spazi lineari contenuti in  $E$ . Quindi é sufficiente verificare che  $\forall x \in X$   $\tilde{X} \cap E$  non contiene la fibra  $E(x)$ . Sia  $G := \{l \in Gr(\mathbf{P}^1, E) \mid l \simeq E(x) \text{ per qualche } x \in X\}$ .  $G$  é una varietà di dimensione  $n - 2$  isomorfa a  $X$ . Se  $G_i := \{l \in Gr(\mathbf{P}^1, E) \mid l \subset \tilde{V}_i\}$ , la codimensione di  $G_i$  in  $Gr(\mathbf{P}^1, E)$  é 2. Pertanto se  $4 > n - 2$  abbiamo  $G_1 \cap G_2 \cap G = \emptyset$  come volevamo.

**Definizione.** *Due varietà irriducibili  $X$  e  $Y$  in  $\mathbf{P}^n$  tali che esistono due ipersuperfici  $V_1$  e  $V_2$  con  $V_1 \cap V_2 = X \cup Y$  (come schemi) si dicono legate (geometricamente). Ogni varietà ottenuta da  $X$  con un numero finito di legami geometrici si dice nella stessa classe di liaison di  $X$ .*

**Osservazione.** *Se  $\deg X = d$  allora  $\mathcal{I}_X(d)$  é senz'altro globalmente generato (basta prendere i coni su  $X$  con vertice un punto di  $\mathbf{P}^n \dots$ ).*

Anche se non legato strettamente alla liaison, il seguente teorema di annullamento é nello stesso spirito della precedente dimostrazione. L'annullamento é migliore quando la codimensione é piccola. Ci sembra interessante includerlo, anche perché illustra un'applicazione del teorema di Kawamata-Viehweg.

**Teorema 4.2.**(Bertram, Ein, Lazarsfeld [BEL]). *Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  di codimensione  $e$ , tagliata come schema da ipersuperfici di grado  $d$  (i.e.  $\mathcal{I}_X(d)$  é globalmente generato). Allora  $H^i(\mathbf{P}^n, \mathcal{I}_X(k)) = 0$  per  $i \geq 1$   $k \geq ed - n$ . In particolare  $X$  é  $k$ -normale se  $k \geq ed - n$*

*Dimostrazione* Sia  $\sigma: \tilde{\mathbf{P}} \rightarrow \mathbf{P}^n$  lo scoppiamento di  $\mathbf{P}^n$  lungo  $X$ . Allora  $\sigma^*\mathcal{I}_X = \mathcal{O}(-E)$ ,  $\sigma_*\mathcal{O}(-E) = \mathcal{I}_X$  ed inoltre  $K_{\tilde{\mathbf{P}}} = \sigma^*K_{\mathbf{P}^n} + (e-1)E$ . In particolare  $\sigma^*(\mathcal{I}_X(d)) = \sigma^*\mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}(-E)$  é globalmente generato, quindi nef.

Vale:  $R^i\sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{\mathbf{P}}} = 0$  se  $i > 0$ , quindi dalla successione spettrale di Leray segue (vedi [Ha])  $H^i(\mathbf{P}^n, \mathcal{I}_X(k)) \simeq H^i(\tilde{\mathbf{P}}, \sigma^*\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(-E))$

L'ultimo gruppo di coomologia é uguale a:

$$\begin{aligned} & H^i(\tilde{\mathbf{P}}, \sigma^*K_{\mathbf{P}^n} \otimes \sigma^*\mathcal{O}(k+n+1) \otimes \mathcal{O}(-E)) = \\ & = H^i\left(\tilde{\mathbf{P}}, K_{\tilde{\mathbf{P}}} \otimes [\sigma^*\mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}(-E)]^e [\sigma^*\mathcal{O}(k-de+n+1)]\right) \end{aligned}$$

Nell'ultimo gruppo di coomologia, il fibrato nella prima quadra é globalmente generato, quello nella seconda quadra é big e nef se  $k \geq ed - n$ . La tesi segue dal teorema di Kawamata-Viehweg.

Ogni varietá ottenuta da  $X$  con un numero finito di costruzioni di questo tipo si dice nella stessa classe di liaison di  $X$ .

Siano  $X$  e  $Y$  legate mediante due ipersuperfici  $V_1$  e  $V_2$ . Posto  $F := V_1 \cap V_2$  vale

$$K_Y = \mathcal{I}_{X,F}(d_1 + d_2 - (n+1))$$

Se conosciamo una risoluzione per  $\mathcal{I}_X$ , possiamo ricavare sotto opportune ipotesi una risoluzione per  $\mathcal{I}_Y$ . Precisamente, data

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow 0 \tag{4.3}$$

se vale  $H^1(E_1(d_1)) = H^1(E_1(d_2)) = 0$  abbiamo

$$0 \rightarrow E_0^*(-d_1 - d_2) \rightarrow E_1^*(-d_1 - d_2) \oplus \mathcal{O}(-d_1) \oplus \mathcal{O}(-d_2) \rightarrow \mathcal{I}_Y \rightarrow 0 \tag{4.4}$$

(tutti i morfismi sono naturali).

**Esempio.** *La superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^4$  é legata mediante due cubiche allo scroll quintico ellittico  $E$  che si ottiene dalla risoluzione:*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-3)^5 \rightarrow \Omega_{\mathbf{P}^4}^2 \rightarrow \mathcal{I}_E \rightarrow 0$$

oppure anche da:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^4 \longrightarrow F(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_E \longrightarrow 0$$

dove  $F$  é il fibrato di Tango.

### **Liaison per $X$ aritmeticamente Cohen-Macaulay**

Ci si può rendere conto di come si ottiene (4.4) a partire da (4.3) analizzando il liaison su una sottovarietà  $X$  aCM (una  $X$  qualunque si comporta localmente come in questo caso).

Per il teorema di Hilbert-Burch (vedi corollario 3.7)  $X$  é definita dai minori massimali di una matrice  $(r+1) \times r$  di polinomi, cioè abbiamo la risoluzione

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(-a_i) \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{j=1}^{r+1} \mathcal{O}(-b_j) \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

Aggiungendo una colonna alla matrice corrispondente a  $\phi$  si ottiene una matrice quadrata il cui determinante definisce una ipersuperficie che contiene  $X$  (basta sviluppare il det secondo l'ultima colonna). Viceversa ogni ipersuperficie che contiene  $X$  si deve scrivere come combinazione dei minori di  $\phi$  (perché?) e quindi la sua equazione si può scrivere come determinante di una matrice ottenuta aggiungendo una colonna alla matrice di  $\phi$ .

In particolare una ipersuperficie di grado  $d$  contenente  $X$  si ottiene come determinante di un morfismo  $\psi$  della forma:  $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(-a_i) \oplus \mathcal{O}(-d) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{j=1}^{r+1} \mathcal{O}(-b_j)$

Aggiungendo due colonne corrispondenti a due ipersuperfici di grado  $d_1, d_2$  si ottiene una matrice  $\psi'$  di tipo  $(r+1) \times (r+2)$  :

$$\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(-a_i) \oplus \mathcal{O}(-d_1) \oplus \mathcal{O}(-d_2) \xrightarrow{\psi'} \bigoplus_{j=1}^{r+1} \mathcal{O}(-b_j)$$

Sia  $Y$  definita dai minori di  $\psi'$ .

Trasponendo si ottiene la successione esatta

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r+1} \mathcal{O}(b_j - d_1 - d_2) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i - d_1 - d_2) \oplus \mathcal{O}(-d_1) \oplus \mathcal{O}(-d_2) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

**Teorema 4.5.** Sia  $E(k)$  un fibrato globalmente generato su  $\mathbf{P}^n$  e consideriamo per  $p, t \geq k$   $X_p$  luogo degli zeri di una sezione generica di  $E(p)$  e  $X_t$  luogo degli zeri di una sezione generica di  $E(t)$ . Allora  $X_p$  e  $X_t$  sono nella stessa classe di liaison.

*Dimostrazione* Possiamo supporre  $p \geq t$  e  $c_1(E) = 0$  (il caso  $c_1 = -1$  richiede solo piccole modifiche).

Abbiamo le due successioni esatte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2t) \longrightarrow E(-t) \longrightarrow \mathcal{I}_{X_t} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2p) \longrightarrow E(-p) \longrightarrow \mathcal{I}_{X_p} \longrightarrow 0$$

In particolare  $\mathcal{I}_{X_p}(p+t)$  e  $\mathcal{I}_{X_t}(p+t)$  sono entrambi globalmente generati.

Consideriamo un legame di  $X_t$  attraverso 2 ipersuperfici di gradi  $N$  e  $p+t$  ( $N \gg 0$  arbitrario).

Allora  $X_t$  é legata ad  $Y_t$  che soddisfa alla successione:

$$0 \longrightarrow E^*(-N-p) \longrightarrow \mathcal{O}(t-N-p) \oplus \mathcal{O}(-N) \oplus \mathcal{O}(-p-t) \longrightarrow \mathcal{I}_{Y_t} \longrightarrow 0$$

É facile verificare che considerando un legame di  $X_p$  attraverso 2 ipersuperfici di gradi  $N+(p-t)$  e  $p+t$  si trova una varietà  $Y_p$  definita dalla stessa risoluzione di  $Y_t$  e scegliendo opportunamente le ipersuperfici si può provare che  $Y_p = Y_t$ .

Piú in generale se  $E$  é un fibrato di rango  $r$  due luoghi di degenerazione di morfismi del tipo

$$\bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}(-a_i) \longrightarrow E(a)$$

e

$$\bigoplus_{j=1}^{r-1} \mathcal{O}(-b_j) \longrightarrow E(b)$$

appartengono alla stessa classe di liaison.

**Esercizio.** Verificare che  $\mathbf{P}^2 \subset \mathbf{P}^4$  (lineare) e  $\tilde{\mathbf{P}}^2(x_0)$  (scoppiamento in un punto) immerso in  $\mathbf{P}^4$  con il sistema lineare delle coniche sono nella stessa classe di liaison. Scrivere le risoluzioni dei fasci di ideali corrispondenti.

**Esercizio.** Provare il teorema 4.5 nel caso  $c_1(E)$  dispari.

**Osservazione.** Si può definire in modo analogo il liaison in codimensione  $\geq 3$  (vedi [Ok2]).

Una descrizione piú fine può essere portata avanti introducendo il concetto di classe pari di liaison:  $X$  e  $Y$  sono nella stessa classe pari di liaison se abbiamo una catena di liaison geometrici  $X = Z_0 \sim Z_1 \sim \dots \sim Z_r = Y$  con  $r$  pari.

**Esercizio.** Se  $X, Y \subset \mathbf{P}^n$  sono varietà di codimensione 2 nella stessa classe pari di liaison allora esiste  $n \in \mathbf{Z}$  tale che

$$\oplus_t H^i(\mathcal{I}_X(t)) \simeq \oplus_t H^i(\mathcal{I}_Y(t+n)) \quad \text{per } 1 \leq i \leq n-2$$

(isomorfismo di  $S$ -moduli graduati)

*Suggerimento: si scriva la successione*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \oplus_i \mathcal{O}(-a_i) \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

allora  $H^i(\mathcal{I}_X(t)) = H^{i+1}(K(t))$  per  $1 \leq i \leq n-2$

**Teorema 4.6.(Rao) [Rao].**

- i) Se  $C, C'$  sono due curve tali che  $\oplus_t H^1(\mathcal{I}_C(t)) \simeq \oplus_t H^1(\mathcal{I}_{C'}(t+n))$  per qualche  $n \in \mathbf{Z}$  allora  $C$  e  $C'$  sono nella stessa classe di liaison.
- ii) Se  $M$  é un  $S$ -modulo graduato artiniiano allora esiste  $C \subset \mathbf{P}^3$  curva liscia e  $n \in \mathbf{Z}$  tale che

$$\oplus_t H^1(\mathcal{I}_C(t+n)) \simeq M$$

(isomorfismo di  $S$ -moduli graduati)

Un risultato di Bolondi [Bo] estende il teorema di Rao alle superfici  $S \subset \mathbf{P}^4$ . Oltre a  $M_1 := \oplus_t H^1(\mathcal{I}_S(t))$  e  $M_2 := \oplus_t H^2(\mathcal{I}_S(t))$  occorre considerare un elemento in  $Ext^2(M_2, M_1)$ .

**Esempio.** Tutte le varietà legate ad intersezioni complete sono aritmeticamente Cohen-Macaulay.

Dal punto di vista storico é importante ricordare il teorema di F. Gaeta del 1948 che afferma che una sottovarietà di codimensione 2 in  $\mathbf{P}^n$  aritmeticamente Cohen-Macaulay é legata ad una intersezione completa. Se  $n \geq 6$  sappiamo oggi che le sottovarietà  $V$  di codimensione 2 aCM sono intersezione completa grazie al criterio di Horrocks ed alla corrispondenza di Hartshorne-Serre.

## §5. ALTRI ESEMPI

Uno strumento molto utile é la seguente

### 5.1. Self-intersection formula.

Sia  $X \subset \mathbf{P}^n$  una varietà nonsingolare di codimensione  $e$  e grado  $d$ . Sia  $H$  la classe di un iperpiano. Allora

$$c_e(N_{X, \mathbf{P}^n}) = d \cdot H^e$$

Siamo in grado quindi di descrivere la “top Chern class” del fibrato normale.

**Lemma 5.2.** *Sia  $S \subset \mathbf{P}^n$  una superficie di grado  $d$  e sia  $g$  il genere di una sezione iperpiana  $C$  (genere sezionale). Allora  $2g - 2 = K_S \cdot H + d$*

*Dimostrazione* Basta calcolare le prime classi di Chern sulla formula di aggiunta  $K_C = (K_S + H)|_C$

**Esercizio.** *Provare che il genere di una curva liscia in  $\mathbf{P}^3$  intersezione completa di due superfici di gradi  $a, b$  é  $1 + \frac{(a+b-4)ab}{2}$ .*

Una tipica applicazione della self-intersection formula si trova calcolando alcune relazioni sui possibili invarianti delle sottovarietà di codimensione piccola.

**Teorema 5.3.** *Sia  $S \subset \mathbf{P}^4$  una superficie liscia. Sia  $g$  il genere di una sezione iperpiana. Allora*

$$K_S^2 + 5(2g - 2 + d) - c_2 - d^2 = 0$$

*Dimostrazione* Dalla successione

$$0 \rightarrow TS \rightarrow T\mathbf{P}^4|_S \rightarrow N_{S, \mathbf{P}^4} \rightarrow 0$$

usando la formula di Whitney ed il fatto che  $c(T\mathbf{P}^4|_S) = 1 + 5H + 10H^2$  si ricava  $c_1(N) = K_S + 5H$   $c_2(N) = -c_2(S) + K_S \cdot c_1(N) + 10H^2$

Sostituendo la prima equazione nella seconda ed usando la self-intersection formula 5.1 si ricava ( $d := \deg S$ )

$$d^2 = -c_2 + K_S^2 + 5K_S \cdot H + 10d$$

Dal lemma precedente segue la tesi.

**Esercizio.** *Provare che la formula del teorema 5.3 si scrive anche nella forma*

$$d^2 - 10d - 5HK - 2K^2 + 12\chi = 0$$

**Esercizio.** *Provare che una superficie abeliana in  $\mathbf{P}^4$  ha grado 10.*

*Suggerimento: il fibrato tangente a una varietà abeliana è banale e quindi ha classi di Chern nulle. Si usi allora la self-intersection formula.*

Il problema dell'esistenza di una superficie abeliana liscia in  $\mathbf{P}^4$  venne posto da Enriques e Severi. Un esempio venne trovato nel 1916 da Comessatti. Grazie alla corrispondenza di Hartshorne-Serre questa superficie definisce un fibrato di rango 2 su  $\mathbf{P}^4$ , che è stato studiato da Horrocks e Mumford [HM].

**Esercizio.** *Sia  $S$  una superficie canonica in  $\mathbf{P}^4$  (cioè tale che  $K = H$ ). Provare che  $d(d - 16) = -c_2$ . Utilizzando la disuguaglianza di Miyaoka  $c_1^2 - 3c_2 \leq 0$  provare che  $d \leq 15$ . In [BC] è provato che le uniche superfici in  $\mathbf{P}^4$  canoniche sono intersezione completa, e quindi sono (con ovvie notazioni)  $V(2, 4)$  e  $V(3, 3)$ .*

**Esercizio.** *Provare che una 3-fold abeliana in  $\mathbf{P}^6$  deve avere grado 35.*

**Proposizione 5.4.** *(Omologia delle superfici intersezione completa in  $\mathbf{P}^4$ ). Sia  $S \subset \mathbf{P}^4$  una superficie liscia intersezione completa di due ipersuperfici di gradi  $a, b$ . Allora posto  $b_j = \dim H_j(S, \mathbf{C}) = \dim H^j(S, \mathbf{C})$  ( $j$ -esimo numero di Betti) abbiamo*

i)  $b_0 = b_4 = 1$

ii)  $b_1 = b_3 = 0$

iii)  $b_2 = (a^2 + ab + b^2 - 5a - 5b - 10)ab + 2$

*Dimostrazione* I punti i) e ii) seguono dal teorema di Lefschetz 1.3 e dalla dualità di Poincaré.  $b_2$  si può calcolare da  $b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = \chi(S, \mathbf{C}) = c_2(S)$  (per Gauss-Bonnet, vedi appendice E), infatti  $c_2$  è noto dalla self-intersection formula ( $K_S = (a + b - 5)H$ ,  $g$  si calcola dalla formula di aggiunta  $K_C = \mathcal{O}(a + b - 5)|_C$ ). In modo alternativo si può calcolare il polinomio di Chern

$$c(TS) = \frac{(1+t)^5}{(1+ta)(1+tb)} = \dots$$

**Esercizio.** *(Numeri di Hodge delle superfici intersezione completa in  $\mathbf{P}^4$ ). Sia  $S \subset \mathbf{P}^4$  una superficie liscia intersezione completa di due ipersuperfici di gradi  $a, b$ . Abbiamo:*

i)  $p_a(S) = p_g(S) = h^{2,0}(S) = \binom{a+b-1}{4} - \binom{a-1}{4} - \binom{b-1}{4}$

ii)  $q(S) = h^{1,0}(S) = 0$

iii)  $h^{1,1}(S) = \frac{ab}{6}(4a^2 + 4b^2 + 3ab - 15a - 15b + 25)$

*Suggerimento: cominciare da  $p_a(S) = \chi(\mathcal{O}_S) - 1$  e poi utilizzare la decomposizione di Hodge e la proposizione precedente*

Ad esempio l'intersezione di due quadriche in  $\mathbf{P}^4$  ha  $h^{1,1} = 6$  ed infatti è isomorfa al piano scoppiato in 5 punti (superficie di Del Pezzo). Questa superficie è un esempio di fibrato in coniche.



**Osservazione.** Si possono calcolare con tecniche analoghe tutti i numeri di Hodge delle intersezioni complete di dimensione qualunque.

**Esercizio.** Calcolare  $b_3$ ,  $h^{3,0}$  e  $h^{2,1}$  per la 3-fold liscia data dall'intersezione di due quadriche in  $\mathbf{P}^5$ .

*Risposta:*  $b_3 = 4$ ,  $h^{3,0} = 0$  e  $h^{2,1} = 2$

**Esempio.** La superficie di Bordiga. (Questo esempio é introduttivo al morfismo di aggiunzione)

Consideriamo la superficie  $S = \tilde{\mathbf{P}}^2(x_1, \dots, x_{10})$  scoppimento del piano in 10 punti in posizione generale con il sistema lineare  $H := 4L - \sum_{i=1}^{10} x_i$  dato dalle quartiche per i 10 punti.  $H$  immerge  $S$  in  $\mathbf{P}^4$  (infatti  $\binom{4+2}{2} - 1 - 10 = 4$ ) con grado 6 (infatti  $4 \cdot 4 - 10 = 6$ ). Si può verificare con tecniche standard che  $H$  é molto ampio. Ci proponiamo di trovare una risoluzione per  $\mathcal{I}_{S, \mathbf{P}^4}$ , che a posteriori può dare una dimostrazione alternativa della molto ampiezza di  $H$  (o equivalentemente della lisciezza di  $S$ ). Abbiamo che il genere sezionale  $g$  é uguale a 3, quindi dalla formula di aggiunzione (vedi il lemma 5.2)  $H \cdot (H + K) = 2g - 2$  si ricava  $H \cdot K = -2$ . Pertanto per il teorema di Riemann-Roch  $\chi_{\mathcal{O}_S}(t) = \chi(\mathcal{O}) + \frac{1}{2}tH \cdot (tH - K) = 3t^2 + 3t + 1$  e si ricava la seguente successione per i valori di  $\chi(\mathcal{I}_S(t))$  con  $t = -1, 0, 1, 2, 3$ :

$$-3, 0, 0, 0, 4$$

É allora ragionevole considerare la seguente tabella di Beilinson per  $\mathcal{I}_S(3)$ :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

Si può dimostrare che questa é l'unica tabella consentita (vedi esercizio seguente). Comunque possiamo in via sperimentale provare a prendere per buona la tabella precedente e vedere cosa si ottiene. Il complesso di Beilinson corrispondente dá:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-4)^3 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(-3)^4 \longrightarrow \mathcal{I}_S \longrightarrow 0 \tag{5.5}$$

Applicando il teorema 2.8, per  $\phi$  generico la successione precedente definisce una superficie liscia  $S \subset \mathbf{P}^4$ . Applicando il funtore  $\mathcal{HOM}(-, \mathcal{O})$  e ricordando l'isomorfismo locale fondamentale (appendice D), si ottiene

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^4 \longrightarrow \mathcal{O}^3 \longrightarrow K_S(1) \longrightarrow 0$$

da cui  $K + H$  é globalmente generato con  $h^0(K + H) = 3$  e quindi definisce un morfismo di aggiunzione  $f_{K+H}: S \rightarrow \mathbf{P}^2$ . Dal polinomio di Hilbert di  $S$  abbiamo  $d = 6$ ,  $g = 3$ ,  $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ . Quindi dal teorema 5.3 (vedi anche l'esercizio che lo segue) abbiamo  $K^2 = \frac{d(d-5)}{2} - 5(g-1) + 6\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{6 \cdot 1}{2} - 5 \cdot 2 + 6 = -1$  Per il lemma 5.2  $K \cdot H = 2g - 2 - d = 6 - 2 - 6 = -2$  da cui  $(K + H)^2 = K^2 + 2K \cdot H + H^2 = -1 - 4 + 6 = 1(!)$

L'ultimo calcolo mostra che  $f_{K+H}$  é birazionale e pertanto é uno scoppimento del piano in  $x$  punti dove  $K^2 = K_{\mathbf{P}^2}^2 - x$  e quindi  $x = 10$ . Quindi la risoluzione precedente definisce esattamente la superficie di Bordiga data dal piano scoppiato in 10 punti ed é facile anche ricostruire la struttura di  $H$ .

L'importanza del morfismo di aggiunzione deriva dal fatto che le immagini delle sezioni iperpiane sono in generale curve canoniche.

**Esercizio.** *Provare che se  $S = \tilde{\mathbf{P}}^2(x_1, \dots, x_{10})$  é immersa in  $\mathbf{P}^4$  con il sistema lineare  $H := 4L - \sum_{i=1}^{10} x_i$  allora la tabella di coomologia per  $\mathcal{I}_S(3)$  é quella enunciata nell'esempio precedente.*

*Suggerimento: molti annullamenti si ottengono da Kodaira-Nakano (vedi appendice F) e dalla razionalitá di  $S$ . L'unico punto che richiede qualche attenzione é l'annullamento di  $h^0(\mathcal{I}_S(2))$ . Ocorre limitare il genere delle curve su quadriche lisce e su coni, vedi [Ha].*

Un modo alternativo per ricavare le informazioni geometriche su  $S$  definito dalla successione (5.5) consiste nel considerare  $S$  come luogo di degenerazione di  $\phi$ . Pensiamo  $\phi$  come una matrice  $3 \times 4$  di polinomi omogenei di grado 1 e chiamiamo  $\phi_0, \phi_1, \phi_2$  le tre righe. Vale  $S := \{x \in \mathbf{P}^4 | \text{rank} \phi(x) \leq 2\}$ . Sempre dal teorema 2.8 abbiamo che il rango non é mai uguale a 1 (per  $\phi$  generico), pertanto  $\forall x \in S$  le 3 righe di  $\phi(x)$  sono dipendenti ed esistono unici (a meno di costanti!)  $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \lambda_2(x)$  coefficienti della combinazione lineare tra le righe  $\lambda_0(x)\phi_0(x) + \lambda_1(x)\phi_1(x) + \lambda_2(x)\phi_2(x) = 0$ . Quindi si ottiene un morfismo da  $S$  in  $\mathbf{P}^2$  che é esattamente il morfismo di aggiunzione. La fibra del morfismo di aggiunzione in  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$  é data dagli  $x \in \mathbf{P}^4$  tali che  $\lambda_0\phi_0(x) + \lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x) = 0$  e corrisponde quindi all'intersezione di 4 iperpiani in  $\mathbf{P}^4$ . La matrice dei coefficienti di questo sistema é una matrice  $4 \times 5$  di polinomi lineari nelle  $\lambda_i$  ed al variare di  $\lambda_i$  si ottiene un piano proiettivo immerso linearmente nello spazio proiettivo delle matrici  $4 \times 5$ . La fibra del morfismo di aggiunzione é allora genericamente un punto ed é una retta per i valori corrispondenti all'intersezione del piano con la varietá  $M_3$  delle matrici di rango  $\leq 3$ . Dalla formula (2.2) si ricava  $\text{deg } M_3 = \frac{5!0!}{3!2!} = 10$  e quindi abbiamo ottenuto ancora che  $S$  corrisponde al piano scoppiato in 10 punti. Notiamo infine che le quartiche piane che danno l'immersione sono date dai minori  $4 \times 4$  della precedente matrice  $4 \times 5$ .

**Osservazione.** Il morfismo di aggiunzione di una varietà  $X \subset \mathbf{P}^n$  di dimensione  $m$  é definito da  $K_X + (m - 1)H$

**Esercizio(fibrato in coniche di Castelnuovo).** (questo esercizio va risolto avendo in mente l'esempio della superficie di Bordiga) Sia  $S \subset \mathbf{P}^4$  definita dalla successione

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^2 \oplus \mathcal{O}(2) \rightarrow \mathcal{I}_S(4) \rightarrow 0$$

per  $\phi$  generico.

- i) provare che  $S$  é liscia.
- ii) verificare che il polinomio di Hilbert di  $S$  é  $\frac{1}{2}(5t^2 + 3t + 2)$ , quindi si ricava  $d = \text{deg } S = 5$ ,  $g = \text{genere sezione} = 2$ ,  $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$
- iii) verificare che il morfismo di aggiunzione ha per immagine  $\mathbf{P}^1$  e per fibre delle coniche.  $S$  si dice un fibrato in coniche.
- iv) calcolare che  $K^2 = 1$  e  $c_2 = 11$
- v) calcolare che  $(K + H)^2 = 0$ . Pertanto sulle fibre del morfismo di aggiunzione  $K + H$  é il fibrato banale. Dedurre ancora che  $S$  é un fibrato in coniche.
- vi) provare che per ogni fibra che é una conica singolare spezzata in due rette si puó contrarre una retta. Contraendo tutte le fibre singolari si deve trovare una rigata geometrica che ha sempre  $c_2 = 4$ . Dedurre che ci sono 7 fibre singolari.

Si puó provare che contraendo le 7 fibre singolari si trova una quadrica liscia. Quindi  $S$  é isomorfa anche al piano scoppiato in 8 punti  $x_0, \dots, x_7$ , ed il sistema lineare che dá l'immersione in  $\mathbf{P}^4$  é formato da  $H = 4L - 2x_0 - \sum_{i=1}^7 x_i$ . Le coniche corrispondono alle rette per  $x_0$ , e le 7 coniche singolari corrispondono alle 7 rette  $\langle x_0, x_i \rangle$ .

**Esempio.** Si puó costruire una superficie in  $\mathbf{P}^4$  liscia dalla tabella di Beilinson per  $\mathcal{I}_S(4)$ :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Si tratta dello scoppiamento in 6 punti di una superficie di Enriques con  $d = 11$  e  $g = 10$  [DES].

**Esempio.** Lo scroll di Palatini. [Ok84], [Ot92]

Definiamo una 3-fold  $X$  in  $\mathbf{P}^5 = \mathbf{P}(V)$  dalla successione

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}(-4)^4 \xrightarrow{\phi} \Omega_{\mathbf{P}^5}^1(-2) \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow 0 \tag{5.6}$$

con  $\phi$  generico.

Si ricava che il polinomio di Hilbert di  $X$  é  $\frac{1}{6}(t+1)(7t^2+5t+6)$ . Siccome  $H^0(\Omega^1(2)) = \wedge^2 V$ , il morfismo  $\phi$  é definito da 4 matrici generiche antisimmetriche  $6 \times 6$   $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], C = [c_{ij}], D = [d_{ij}]$ . Le equazioni di  $X$  sono pertanto date dai 15 minori  $4 \times 4$  della matrice  $4 \times 6$

$$F = \begin{pmatrix} \sum a_{1i}x_i & \dots & \sum a_{6i}x_i \\ \sum b_{1i}x_i & \dots & \sum b_{6i}x_i \\ \sum c_{1i}x_i & \dots & \sum c_{6i}x_i \\ \sum d_{1i}x_i & \dots & \sum d_{6i}x_i \end{pmatrix}$$

Se  $x' \in X$  allora le 4 righe di  $F$  calcolate in  $x$  sono dipendenti, dunque esistono  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  tali che  $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$  é singolare. Seguendo la descrizione data nel capitolo 2 dello spazio delle matrici antisimmetriche troviamo che per  $A, B, C, D$  generici la matrice  $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$  non ha mai rango 2 mentre ha rango 4 esattamente per i valori di  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  appartenenti a  $S := \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid Pf(\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D) = 0\} \subset \mathbf{P}^3$ .  $S$  é una cubica liscia(perche?) in  $\mathbf{P}^3$  e quindi  $X$  viene ad essere isomorfo ad uno scroll su  $S$ , cioè abbiamo un morfismo  $p: X \rightarrow S$  tale che tutte le fibre di  $p$  sono rette immerse linearmente in  $\mathbf{P}^5$ .  $p$  si identifica con il morfismo di aggiunzione  $f_{K+2H}$ , che può essere descritto applicando il funtore  $\mathcal{HOM}(-, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5})$  alla successione che definisce  $X$ .

Il lettore avrà notato la stretta analogia tra la successione (5.6) che definisce lo scroll di Palatini e la (3.19) che definisce la superficie di Veronese in  $\mathbf{P}^4$ . Ricordiamo che per un teorema di Severi la superficie di Veronese é l'unica superficie liscia in  $\mathbf{P}^4$  che non sia 1-normale. L'analogia si fa ancora piú stretta osservando che se  $X$  é lo scroll di Palatini  $h^1(\mathcal{I}_X(2)) = h^1(\Omega^1) = 1$  e quindi  $X$  non é 2-normale. Un teorema di Zak assicura che tutte le 3-fold lisce in  $\mathbf{P}^5$  sono 1-normali. Lo scroll di Palatini é l'unico esempio noto che non sia 2-normale.

É naturale considerare dopo questa analisi il seguente difficile problema posto da Van de Ven:

**Problema.** *Classificare le 3-fold lisce in  $\mathbf{P}^5$  che non sono 2-normali. Ci sono altri esempi oltre allo scroll di Palatini?*

**Esempi.**

i) La superficie  $S$  in  $\mathbf{P}^4$  definita da

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^2 \rightarrow \mathcal{O}(1)^2 \oplus \mathcal{O}(n) \rightarrow \mathcal{I}_S(n+2) \rightarrow 0$$

é una fibrazione su  $\mathbf{P}^1$  con fibre curve piane di grado  $n$ . Notiamo che  $S$  é contenuta in una quadrica.

ii) La 3-fold  $X$  in  $\mathbf{P}^5$  definita da

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^3 \longrightarrow \mathcal{O}(1)^3 \oplus \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{I}_X(n+3) \longrightarrow 0$$

é una fibrazione su  $\mathbf{P}^2$  con fibre curve piane di grado  $n$ .

iii) La 3-fold  $X$  in  $\mathbf{P}^5$  definita da

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow \mathcal{O}(1)^2 \oplus \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{I}_X(n+2) \longrightarrow 0$$

é una fibrazione su  $\mathbf{P}^1$  con fibre superfici in  $\mathbf{P}^3$  di grado  $n$ .

iv) La 3-fold  $X$  in  $\mathbf{P}^5$  definita da

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \longrightarrow \mathcal{I}_X(a+b+1) \longrightarrow 0$$

é una fibrazione su  $\mathbf{P}^1$  con fibre superfici in  $\mathbf{P}^4$  intersezioni complete di tipo (a,b).

v) La 3-fold  $X$  in  $\mathbf{P}^5$  definita da

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^3 \longrightarrow \mathcal{O}(1)^2 \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \longrightarrow \mathcal{I}_X(a+b+2) \longrightarrow 0$$

é una fibrazione su  $\mathbf{P}^2$  con fibre curve in  $\mathbf{P}^3$  intersezioni complete di tipo (a,b).

- vi) La varietà luogo di degenerazione in  $\mathbf{P}^{2n}$  di  $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^{n+1}$  é uno scroll su  $\mathbf{P}^1$  con tutte le fibre isomorfe a  $\mathbf{P}^{n-1}$
- vii) La varietà luogo di degenerazione in  $\mathbf{P}^{2n+1}$  di  $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^{n+1}$  é  $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n$  immerso con il morfismo di Segre. Notiamo che per  $n \gg 0$  si ha sempre  $\dim X > \text{codim } X$  ma il rapporto  $\frac{\dim \mathbf{P}^{2n+1}}{\dim \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n}$  tende ad  $\frac{1}{2}$ . Non si conoscono esempi dove il rapporto tende ad un numero  $> \frac{1}{2}$ .
- viii) La varietà luogo di degenerazione (massimale) in  $\mathbf{P}^{2n+1}$  di  $\mathcal{O}^{n+2} \longrightarrow \Omega^1(2)$  ha dimensione  $n+1$  ed il morfismo  $K + nH$  la contrae su un'ipersuperficie di grado  $n+1$  in  $\mathbf{P}^{n+1}$ .

**Esercizio.** Sia  $X$  una 3-fold liscia in  $\mathbf{P}^5$ , sia  $K$  la classe canonica ed  $H$  la classe di un iperpiano. Provare che (analogamente al teorema 5.3):

$$c_2(X) = (15 - d)H^2 + 6HK + K^2$$

$$c_3(X) = c_2(X)(-K - 6H) + dH^2K + 20H^3$$

**Esercizio.** Oltre alle notazioni dell'esercizio precedente, poniamo  $g =$ genere sezionale di  $X$ ,  $d = \text{deg } X$ ,  $S =$ generica sezione iperpiana di  $X$ . Provare che

$$H^3 = d$$

$$H^2K = 2g - 2 - 2d$$

$$HK^2 = \frac{1}{2}d(d+1) - 9(g-1) + 6\chi(\mathcal{O}_S)$$

$$K^3 = -5d^2 + d(2g+25) + 24(g-1) - 36\chi(\mathcal{O}_S) - 24\chi(\mathcal{O}_X)$$

**Esercizio.** *Provare che la 3-fold  $X$  in  $\mathbf{P}^5$  definita da*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^9 \longrightarrow \Omega^2(3) \longrightarrow \mathcal{I}_X(6) \longrightarrow 0$$

*ha grado 18 ed il suo modello canonico é una 3-fold in  $\mathbf{P}^8$  di grado 42.  $X$  é di tipo generale.*

**Esercizio.** *Sia  $X$  lo scroll di Palatini*

- i) *Dualizzando (5.6) provare che  $K+2H$  é globalmente generato ed abbiamo il morfismo di aggiunzione  $f_{K+2H}: X \rightarrow \mathbf{P}^3$*
- ii) *Provare, utilizzando gli esercizi precedenti, che  $H^3 = 7$ ,  $KH^2 = -8$ ,  $K^2H = 7$ ,  $K^3 = -2$ .*
- iii) *Dedurre da ii) che  $(K+2H)^3 = 0$  e  $(K+2H) \cdot H = 3$ . Questi fatti danno un'altra dimostrazione che il morfismo di aggiunzione definisce una struttura di scroll su una superficie cubica.*

Un altro problema aperto interessante é il seguente.

Sia  $N$  il fibrato di correlazione nulla di rango 4 su  $\mathbf{P}^5$ . Siccome  $N$  é simplettico abbiamo  $\wedge^2 N = B \oplus \mathcal{O}$  con  $B$  fibrato di rango 5. La successione:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}(-1)^4 \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow \mathcal{I}_X(4) \longrightarrow 0$$

definisce per  $\phi$  generico una 3-fold liscia di grado 12 in  $\mathbf{P}^5$  che é un fibrato in coniche su una superficie  $S$  K3 con fibre *tutte coniche lisce!*[BOSS92]

**Problema.** *Esiste un fibrato  $E$  di rango 2 su  $S$  tale che  $X = \mathbf{P}(E)$ ? Può darsi che la risposta dipenda da  $\phi$ . La risposta é negativa nel caso in cui  $\text{Pic}(S) = \mathbf{Z}$ , ma non si conosce  $\text{Pic}(S)$ .*

## APPENDICE A LO PFAFFIANO

Tutti i risultati di questa sezione sono classici ed appaiono in un lavoro di Cayley pubblicato sul Crelle Journal del 1848.

Sia  $A$  una matrice antisimmetrica  $n \times n$ . É immediato verificare che il rango di  $A$  é sempre pari. In particolare  $A$  puó essere nondegenere solo se  $n$  é pari.

Se  $n$  é pari il determinante di  $A$  si puó scrivere come quadrato di una espressione polinomiale nei coefficienti, che si chiama lo *pfaffiano* di  $A$  (si veda [Bou]).

Ad esempio

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a^2, \text{ per cui } Pf \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = (af - be + cd)^2$$

per cui

$$Pf \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = af - be + cd$$

Consideriamo adesso  $n$  dispari. Sia  $A_{ij}$  il complemento algebrico ottenuto togliendo la riga  $i$ -esima e la colonna  $j$ -esima. Sia  $C_i$  lo pfaffiano della matrice (antisimmetrica) ottenuta togliendo riga e colonna  $i$ -esima. Vale allora la formula:

$$\det A_{ij} = C_i C_j \tag{A.1}$$

In particolare le equazioni  $C_i = 0 \quad \forall i \in \mathbf{Z}$  individuano la varietá delle matrici antisimmetriche di rango  $\leq n - 3$ , che é  $A_{n-3}$  con le notazioni del capitolo 2. Notiamo che bastano  $n$  equazioni mentre per una matrice qualunque tutti i minori  $(n - 2) \times (n - 2)$  danno  $\binom{n}{n-2}^2$  equazioni!

**Esercizio.** Sia  $A$  una matrice antisimmetrica  $n \times n$  con  $n$  dispari di rango massimo  $n - 1$ . Allora tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo  $A \cdot x = 0$  sono proporzionali al vettore  $(C_1, \dots, (-1)^{n-1} C_n)$  dato dagli pfaffiani di  $A$ .

*Suggerimento: Usare la regola di Cramer e la formula A.1.*

## APPENDICE B

### RISOLUZIONI MINIMALI DI MODULI E DI FASCI

Come bibliografia per questa sezione si veda ad esempio [Kunz] e [Green].

Denotiamo con  $S = K[x_0, \dots, x_n]$  l'anello graduato dei polinomi in  $x_0, \dots, x_n$  su un campo  $K$ . Sia  $M$  un  $S$ -modulo graduato finitamente generato (i.e. noetheriano).  $m_1, \dots, m_r \in M$  si dicono generatori minimali se generano  $M$  e se nessuno di essi é combinazione degli altri  $r - 1$ . Scelti  $m_1, \dots, m_r$  generatori minimali (omogenei) di  $M$  con  $\deg m_i = \mu_i$ , é definito un morfismo naturale  $\bigoplus_{i=1}^r S(-\mu_i) \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$ . Posto  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_r = (0, \dots, 0, 1)$  abbiamo  $f(\sum s_i e_i) = \sum s_i m_i$  con  $s_i \in S$ .  $M$  é libero se e solo se  $f$  é iniettiva.  $\text{Ker } f$  é per definizione il primo modulo delle sizigie per  $f_1, \dots, f_r$ . Infatti gli elementi di  $\text{Ker } f$  corrispondono a  $r$ -ple  $(g_1, \dots, g_r)$  con  $g_i \in S$  tali che  $\sum g_i m_i = 0$ . Siano  $(g_1^j, \dots, g_r^j)$  con  $j = 1, \dots, p$  generatori minimali per  $\text{Ker } f$ . É immediato verificare che  $g_i^j$  possono essere scelti omogenei. Poniamo  $\deg g_i^j = \gamma_i^j$  e  $\delta_j := \gamma_i^j + \mu_i$ . Abbiamo allora una successione esatta

$$\bigoplus_{j=1}^p S(-\delta_j) \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=1}^r S(-\mu_i) \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$$

dove  $g$  é definito dalla matrice  $r \times p$   $(g_i^j)$ . Notiamo che tale matrice deve essere omogenea nel senso che  $\gamma_i^j = \gamma_i^1 + \gamma_1^j - \gamma_1^1$  (quindi i gradi della prima riga e della prima colonna determinano tutti gli altri) e che  $M \simeq \text{Coker } g$  e quindi la matrice  $g_i^j$  determina  $M$ . Per dare le informazioni relative ad un  $S$ -modulo graduato  $M$  ad un computer é quindi sufficiente fornire la relativa matrice graduata delle prime sizigie.

$\text{Ker } g$  é per definizione il secondo modulo delle sizigie per  $f_1, \dots, f_r$ . Seguitando in questo modo si determina il terzo modulo delle sizigie e cosí via. Si trova la risoluzione:

$$\dots \bigoplus_{k=1}^q S(-\zeta_k) \xrightarrow{h} \bigoplus_{j=1}^p S(-\delta_j) \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=1}^r S(-\mu_i) \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$$

Puó sorgere il dubbio che la risoluzione dipenda dalle scelte dei generatori minimali fatte. In realtà i gradi dei generatori minimali ad ogni passo dipendono solo da  $M$  e si dicono i numeri di Betti di  $M$ . Si puó quindi parlare della *risoluzione minimale* per  $M$ . Tale risoluzione é finita e di lunghezza al piú  $n + 1$  grazie al

**Teorema delle sizigie di Hilbert.**  $L'$   $(n + 1)$ -esimo modulo delle sizigie di un  $S$ -modulo graduato  $M$  é libero.

Il record di lunghezza é ottenuto dal modulo artiniiano  $K$  che ammette la risoluzione (di Koszul)

$$0 \rightarrow \wedge^{n+1} S^{n+1}(-n-1) \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^2 S^{n+1}(-2) \rightarrow S^{n+1}(-1) \rightarrow S \rightarrow K \rightarrow 0$$



Per una dimostrazione del teorema delle sizigie si veda [Green]. In [CLO92] viene data una dimostrazione costruttiva che sfrutta l'algoritmo di Buchberger. Infatti, fissato un ordine monomiale, il calcolo di una base di Gröbner per un sistema di generatori di un modulo  $M$  mediante l'algoritmo di Buchberger dá anche in particolare una base di Gröbner per il modulo delle sizigie e permette di costruire induttivamente la risoluzione minimale di  $M$ . Tale algoritmo é implementato ad esempio in Macaulay (comando "nres") ed in Cocoa. Il comando "betti" di Macaulay fornisce in modo suggestivo la successione dei numeri di Betti di  $M$ .

Introducendo notazioni piú compatte si ha la risoluzione minimale:

$$0 \longrightarrow E_r \longrightarrow \dots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con

$$E_p = \bigoplus_q S(-q) \otimes_{\mathbf{C}} B_{p,q}$$

dove  $r \leq n + 1$  dal teorema delle sizigie e  $b_{p,q} = \dim B_{p,q}$  sono i numeri di Betti di  $M$ . Per provare che dipendono solo da  $M$  si prova che  $B_{p,q}$  é il sottospazio di grado  $q$  di  $\text{Tor}_S^p(M, \mathbf{C})$ .

La teoria é completata dal seguente

**Teorema.[Green].** *Sia data una risoluzione libera di un  $S$ -modulo graduato  $M$ . La risoluzione é minimale se e solo se nelle matrici che la definiscono non compaiono termini costanti  $\neq 0$ . Ovvero la risoluzione é minimale se e solo se localizzando ogni termine rispetto all'ideale massimale  $\mathcal{M} = (x_0, \dots, x_n) \subset S$  si trovano tutti morfismi nulli.*

Un esempio banale é il seguente. L'ideale  $I = (y^2, x) \subset S$  ammette la risoluzione

$$0 \longrightarrow S(-4) \xrightarrow{h} S(-4) \oplus S(-3) \xrightarrow{g} S(-2) \oplus S(-1) \xrightarrow{f} I \longrightarrow 0$$

dove

$$f = \begin{pmatrix} y^2 & x \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ -y^2 & -xy^2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

mentre la risoluzione minimale é

$$0 \longrightarrow S(-3) \xrightarrow{g'} S(-2) \oplus S(-1) \xrightarrow{f} I \longrightarrow 0$$

dove

$$g' = \begin{pmatrix} x \\ -y^2 \end{pmatrix}$$

In altre parole la risoluzione minimale di  $M$  é contenuta in ogni altra risoluzione, nel senso che si ottiene cancellando da una risoluzione data alcuni addendi uguali in posti adiacenti.

Per apprezzare meglio il teorema precedente é bene evidenziare subito che é falso considerando risoluzioni di fasci invece che risoluzioni di moduli (vedi tra poco l'esempio della quartica razionale in  $\mathbf{P}^3$ )

Ricordiamo che c'è una corrispondenza (non biunivoca!) tra  $S$ -moduli graduati finitamente generati e fasci coerenti su  $\mathbf{P}^n \simeq Proj(k[x_0, \dots, x_n])$  (vedi [Ha]). Dato un fascio coerente  $\mathcal{F}$  la sua risoluzione minimale é definita cosí: si considera la risoluzione minimale dell'  $S$ -modulo corrispondente  $\bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} H^0(\mathcal{F}(k))$  e si "fascifica" la risoluzione ottenendo una risoluzione di  $\mathcal{F}$ .

Siccome  $\mathcal{F}(k)$  é globalmente generato per  $k \gg 0$  (teorema A di Serre) si possono trovare  $\forall k \gg 0$  risoluzioni di  $\mathcal{F}$  della forma

$$\dots \rightarrow \mathcal{O}(-k)^N \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

e questo mostra che il teorema precedente non si può estendere ai fasci.

Segue dalla definizione che una successione esatta di fibrati

$$0 \rightarrow A_t \rightarrow \dots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

é una risoluzione minimale se e solo se  $\forall k \in \mathbf{Z}$  la successione

$$0 \rightarrow H^0(A_t(k)) \rightarrow \dots \rightarrow H^0(A_1(k)) \rightarrow H^0(A_0(k)) \rightarrow H^0(\mathcal{F}(k)) \rightarrow 0$$

é ancora esatta.

**Definizione.** Se  $\mathcal{F}$  é un fascio coerente su  $\mathbf{P}^n$  poniamo  $reg(\mathcal{F}) := \min(m | \mathcal{F} \text{ é } m\text{-regolare})$ .

**Teorema [Green].**  $reg(\mathcal{F}) = \max(q - p | b_{p,q} \neq 0)$

**Esempio.** La quartica razionale di  $\mathbf{P}^3$

*Puó essere utile per imparare ad usare Macaulay e/o Cocoa verificare su un computer questo esempio.*

Sia  $C$  una quartica liscia razionale in  $\mathbf{P}^3$  (ad esempio parametrizzata da  $(s^4, s^3t, st^3, t^4)$  con  $(s, t) \in \mathbf{P}^1$ ). La risoluzione minimale del fascio di ideali  $\mathcal{I}_C$  é:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-5) \rightarrow \mathcal{O}(-4)^4 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3)^3 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0$$

Con un pó di pazienza si ricava facilmente questa risoluzione anche con carta e penna! Applicando il teorema precedente abbiamo  $\text{reg}(\mathcal{I}_C) = 3$ . L'ideale omogeneo di  $C$  é generato da una quadrica e da tre cubiche. Però una quadrica e due cubiche sono sufficienti a tagliare  $C$  come schema (l'intersezione degli spazi tangenti nei punti di  $C$  é trasversa e consiste nella retta tangente a  $C$ )

ed otteniamo una risoluzione non minimale

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-7) \rightarrow \mathcal{O}(-6)^4 \rightarrow \mathcal{O}(-5)^5 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3)^2 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0$$

Notiamo che la seconda risoluzione é piú lunga di un passo, e non é esatta a livello di  $H^0$  tensorizzando per  $\mathcal{O}(3)$ . In altre parole, una quadrica e due cubiche non sono sufficienti a generare l'ideale  $I(C)$  mentre generano il fascio di ideali  $\mathcal{I}_C$ . Il lettore può provare a scrivere su ogni aperto di un ricoprimento la terza cubica come combinazione lineare della quadrica e delle prime due cubiche a coefficienti funzioni razionali con denominatore mai nullo sull'aperto. Questo fenomeno non può accadere per curve aritmeticamente Cohen-Macaulay ed é legato al fatto che  $H^1(\mathcal{I}_C(*)) \neq 0$ .

### Interpretazione dell'esempio precedente in termini di fibrati vettoriali su $\mathbf{P}^3$ .

La risoluzione minimale di  $\mathcal{I}_C$  si può troncare con

$$0 \rightarrow \mathbf{TP}^3(-5) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3)^3 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0$$

e  $C$  si ottiene come luogo di degenerazione di  $\phi$  in codimensione aspettata.

La risoluzione non minimale si tronca come:

$$0 \rightarrow N(-4) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3)^2 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0$$

dove  $N$  é il fibrato di correlazione nulla e  $C$  si ottiene ancora come luogo di degenerazione di  $\psi$  in codimensione aspettata.

**Esercizio.** Sia  $C$  la quartica razionale parametrizzata da  $(s^4, s^3t, s^2t^2, t^4)$  con  $(s, t) \in \mathbf{P}^1$ . Provare che  $C$  non é liscia.

**Esercizio.** Siano  $(a, b, c, d)$  coordinate omogenee in  $\mathbf{P}^3$ . Sia  $C$  in  $\mathbf{P}^3$  parametrizzata da  $a = s^4, b = s^3t, c = st^3, d = t^4$  con  $(s, t) \in \mathbf{P}^1$ . Provare che  $\frac{K[a,b,c,d]}{I(C)}$  non é integralmente chiuso.

*Suggerimento: le radici del polinomio monico  $t^2 - ad$  nel campo dei quozienti sono  $\frac{\pm c^2}{d}$  che non appartengono all'anello. Aggiungendo questi elementi si trova la normalizzazione  $C' \subset \mathbf{P}^4$  parametrizzata da  $(s^4, s^3t, s^2t^2, st^3, t^4)$*

I numeri di Betti di una varietà  $X$  sono per definizione i numeri di Betti del modulo delle coordinate  $\frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]}{I(X)}$ . É interessante studiare le relazioni tra proprietà geometriche di  $X$  e numeri di Betti. A questo proposito sono state formulate da Green alcune congetture (vedi [Green]).

## APPENDICE C

### POLINOMIO DI HILBERT E FUNZIONE DI HILBERT

Premettiamo alcune osservazioni elementari ma utili sui polinomi numerici

**Definizione.** Un polinomio  $p(t) \in \mathbf{Q}(t)$  si dice *polinomio numerico* se  $p(t) \in \mathbf{Z}$  per  $t \gg 0$ ,  $t \in \mathbf{Z}$

**Esempio.** Sia  $i \in \mathbf{N}$ . Allora  $\binom{t+i}{i} := \frac{(t+i)(t+i-1)\dots(t+1)}{i!}$  é un polinomio numerico. Conviene inoltre porre  $\binom{i}{0} = 1$ . Notiamo che abbiamo  $\binom{t+i}{i} \neq 0$  per  $t \ll 0$ , a differenze di altre definizioni dei coefficienti binomiali!

I due insiemi  $1, t, t^2, \dots, t^d$  e  $1, (t+1), \binom{t+2}{2}, \dots, \binom{t+d}{d}$  sono due basi dello spazio vettoriale dei polinomi di grado  $\leq d$ . (Con alcuni comandi in Cocoa si puó passare facilmente da una base all'altra). La seconda base é piú conveniente per scrivere i polinomi numerici, come é mostrato dal seguente

**Teorema.**  $p(t)$  é un polinomio numerico di grado  $d \Leftrightarrow P(t) = \sum_{i=0}^d a_i \binom{t+i}{i}$  con  $a_i \in \mathbf{Z}$ .

*Dimostrazione*

$\Leftarrow$  é ovvia

$\Rightarrow$  si prova per induzione su  $d$ . Per  $d = 0$  é banale. Poniamo  $P(t) = \sum_{i=0}^d a_i \binom{t+i}{i}$  con  $a_i$  da determinare. Abbiamo  $P(t) - P(t-1) = \sum_{i=0}^d a_i \binom{t+i}{i} - a_i \binom{t+i-1}{i} = \sum_{i=1}^d a_i \binom{t+i-1}{i-1} = \sum_{i=0}^{d-1} a_{i+1} \binom{t+i}{i}$ . Pertanto per ipotesi induttiva si trova  $a_{i+1} \in \mathbf{Z}$  per  $0 \leq i \leq d-1$ . Infine  $P(t) = a_0 + \sum_{i=1}^d a_i \binom{t+i}{i}$  da cui  $a_0 \in \mathbf{Z}$

**Corollario.** Se  $P(t)$  é un polinomio numerico allora  $P(t) \in \mathbf{Z} \quad \forall t \in \mathbf{Z}$

Denotiamo con  $S = \oplus S_d$  l'anello graduato dei polinomi  $K[x_0, \dots, x_n]$  su un campo  $K$ . Un  $S$ -modulo graduato  $M$  é un  $S$ -modulo con una decomposizione  $M = \oplus_{d \in \mathbf{Z}} M_d$  dove  $M_d$  sono sottogruppi tali che  $S_a \cdot M_b \subset M_{a+b}$ .

**Esempio.** Se  $V \subset \mathbf{P}^n$  é una varietà proiettiva allora l'ideale omogeneo  $I(V)$  é un  $S$ -modulo graduato

**Definizione.** Sia  $M$  un  $S$ -modulo graduato. Allora  $F_M(t) = \dim_K M_t$  si dice *funzione di Hilbert* di  $M$ . Se  $V \subset \mathbf{P}^n$  é una varietà proiettiva,  $F_{I(V)}$  si dice *funzione di Hilbert* di  $V$

**Teorema.** Sia  $M$  un  $S$ -modulo graduato noetheriano. Allora la funzione di Hilbert  $F_M(t)$  é un polinomio numerico per  $t \gg 0$

*Dimostrazione* Dal teorema delle sizigie di Hilbert,  $M$  ammette una risoluzione

$$0 \longrightarrow E_r \longrightarrow \dots \longrightarrow E_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con  $E_i$  moduli liberi, per i quali il teorema é vero (occorre notare che  $\binom{n+d}{n} = \dim S_d$  solo se  $d \geq -n$ , é proprio questo fatto che fa la differenza tra funzione di Hilbert e polinomio di Hilbert!). Quindi  $F_M(t) = \sum_{i=0}^r (-1)^i F_{E_i}(t)$  é un polinomio numerico per  $t \gg 0$ .

Un'altra interessante dimostrazione costruttiva del teorema precedente segue da un risultato di Macaulay del 1927: fissato un ordine monomiale la funzione di Hilbert di  $M$  coincide con quella del modulo monomiale generato dai termini principali [CLO92] ed é facile provare il teorema nel caso di moduli monomiali. Pertanto calcolando una base di Gröbner per  $M$  si ottiene di conseguenza la funzione di Hilbert di  $M$ . Tale algoritmo é implementato ad esempio in Macaulay (comando "hilb") e Cocoa.

**Definizione.** *Sia  $M$  un  $S$ -modulo graduato noetheriano. Il polinomio  $P_M(t)$  tale che  $P_M(t) = F_M(t)$  per  $t \gg 0$  si dice polinomio di Hilbert di  $M$ .*

Se  $\mathcal{F}$  é il fascio coerente su  $\mathbf{P}^n$  associato a  $M$ , abbiamo  $F_M(t) = \dim H^0(\mathcal{F}(t))$  e  $P_M(t) = \chi(\mathcal{F}(t))$ . Allora il fatto che  $F_M(t) = P_M(t)$  per  $t \gg 0$  corrisponde al teorema B di Serre. Se  $\mathcal{F}$  é un fibrato allora  $P_M(t)$  puó essere calcolato in funzione di  $c_i(\mathcal{F})$  mediante il teorema di Hirzebruch-Riemann-Roch (vedi [Ha]).

**Esempi.**

Se  $C \subset \mathbf{P}^n$  é una curva di grado  $d$  e genere  $g$  allora  $P_C(t) = d(t + 1) + (1 - g - d)$ . Pertanto si possono ricavare  $d, g$  conoscendo il polinomio di Hilbert.

Se  $S \subset \mathbf{P}^n$  é una superficie di grado  $d$ , genere aritmetico  $p_a$  e genere sezionale  $g$  (i.e.  $g$  é il genere della generica sezione iperpiana) allora  $P_S(t) = d \binom{t+2}{2} + (1 - g - d)(t + 1) + (p_a + g)$ . Pertanto si possono ricavare  $d, g, p_a$  conoscendo il polinomio di Hilbert.

**APPENDICE D**  
**I FUNTORI EXT E  $\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}$**

Sia  $X$  una varietà e  $F$  un fascio di  $\mathcal{O}_X$ -moduli su  $X$ .

I funtori  $Ext_X^i(F, -)$  e  $\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}_X^i(F, -)$  sono definiti rispettivamente come i funtori derivati di  $Hom(F, -)$  e  $\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}(F, -)$ . Si veda ad esempio [Ha].

Questo significa che se

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_1} \dots$$

è una risoluzione fiacca di  $G$  allora

$$Ext^p(F, G) := \frac{Ker [Hom(F, I_p) \xrightarrow{D_p} Hom(F, I_{p+1})]}{Im [Hom(F, I_{p-1}) \xrightarrow{D_{p-1}} Hom(F, I_p)]}$$

$$\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}^p(F, G) := \frac{Ker [\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}(F, I_p) \xrightarrow{D_p} \mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}(F, I_{p+1})]}{Im [\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}(F, I_{p-1}) \xrightarrow{D_{p-1}} \mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}(F, I_p)]}$$

Se  $0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$  è una successione esatta, si ricava la successione esatta lunga:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Hom(F, G') \longrightarrow Hom(F, G) \longrightarrow Hom(F, G'') \longrightarrow \\ \longrightarrow Ext^1(F, G') \longrightarrow Ext^1(F, G) \longrightarrow Ext^1(F, G'') \dots \end{aligned}$$

e si può provare che vale anche la seguente successione esatta

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Hom(G'', F) \longrightarrow Hom(G, F) \longrightarrow Hom(G', F) \longrightarrow \\ \longrightarrow Ext^1(G'', F) \longrightarrow Ext^1(G, F) \longrightarrow Ext^1(G', F) \dots \end{aligned}$$

Ci sono naturalmente due successioni analoghe per gli  $\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}$ .

Vale una successione spettrale di ipercoomologia (vedi [GH] pag. 706) con  $E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}^q(F, G))$  e  $E_\infty^{p,q} \Rightarrow Ext^{p+q}(F, G)$

In particolare abbiamo una successione esatta

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}(F, G)) \longrightarrow Ext^1(F, G) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}^1(F, G)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^2(\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}(F, G)) \longrightarrow Ext^2(F, G) \end{aligned}$$

Vale anche:  $F$  è localmente libero se e solo se

$$\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}^i(F, G) = 0 \quad \forall \quad \mathcal{O}_X - \text{ modulo } G \quad \forall i \geq 1$$

Se  $Y \subset X$  é una sottovarietà chiusa di codimensione  $r$  e  $F$  é localmente libero su  $X$  vale che  $\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}_X^i(\mathcal{O}_Y, F) = 0$  per  $i \neq r$  ([GH] pag. 690) ed inoltre

$$\mathcal{E}\mathcal{X}\mathcal{T}_X^r(\mathcal{O}_Y, F) \simeq F \otimes (\det N_{Y,X}) \quad \underline{\text{isomorfismo locale fondamentale}}$$

In particolare dalla successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

si ottiene

$$\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}_X(\mathcal{I}_Y, F) \simeq F$$

Ricordiamo infine [GH] che gli elementi di  $\text{Ext}_X^1(F, G)$  sono in corrispondenza biunivoca con le classi di equivalenza di successioni esatte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

dove due successioni siffatte con  $H, H_1$  al centro sono equivalenti se esiste  $h : H \rightarrow H_1$  tale che il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow h & & \downarrow id & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H_1 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

é commutativo.

**APPENDICE E**  
**LE CLASSI DI CHERN**

Sia dato un fibrato vettoriale  $E$  olomorfo di rango  $r$  su una varietà complessa  $X$  di dimensione  $n$ . Le classi di Chern  $c_i(E)$  sono delle classi di coomologia in  $H^{2i}(X, \mathbf{Z})$  che dipendono solo dalla struttura  $C^0$  (topologica) del fibrato. In realtà su varietà algebriche possono essere viste (in modo più fine) come elementi dell'anello di Chow (cioè a meno di equivalenza razionale). Ad esempio  $c_1(E) \in \text{Pic}(X)$  può essere definito come l'elemento corrispondente al fibrato in rette  $\det(E)$ . D'altronde su  $\mathbf{P}^n$  sia l'anello di Chow che l'anello di coomologia sono isomorfi a  $\mathbf{Z}$ , cioè

$$A^i(\mathbf{P}^n) \simeq H^{2i}(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$$

pertanto *le classi di Chern di fibrati su  $\mathbf{P}^n$  possono essere viste come numeri interi.*

In linea di massima ci limiteremo a considerare le classi di Chern come classi di coomologia.

Uno degli aspetti più interessanti della teoria delle classi di Chern è che possono essere introdotte da molti punti di vista diversi, e ciascuno di essi risulta utile nelle applicazioni.

**La definizione analitica.** [GH]

Sia  $\mathcal{A}^i$  lo spazio vettoriale delle  $i$ -forme  $C^\infty$  su  $X$  e  $\mathcal{A}^i(E)$  lo spazio delle  $i$ -forme  $C^\infty$  a valori in  $E$ . Una *connessione* su  $E$  è un morfismo  $\mathbf{C}$ -lineare  $D: \mathcal{A}^0(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(E)$  che soddisfa alla regola di Leibniz:

$$D(fs) = df \cdot s + fDs \quad \forall f \in \mathcal{A}^0 \quad \forall s \in \mathcal{A}^0(E)$$

$D$  può essere esteso a  $D: \mathcal{A}^p(E) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1}(E)$  mediante la formula

$$D(\omega s) = d\omega \cdot s + (-1)^p \omega Ds \quad \forall \omega \in \mathcal{A}^p$$

La *curvatura* della connessione  $D$  è il morfismo  $D^2: \mathcal{A}^0(E) \rightarrow \mathcal{A}^2(E)$  che può essere visto come un elemento  $\Theta \in \mathcal{A}^2(\text{End}E)$ . Localmente  $\Theta$  si rappresenta come una matrice  $r \times r$  di 2-forme. Sia  $P_k$  la  $k$ -esima funzione simmetrica degli autovalori di una matrice  $r \times r$ .

**Teorema.**  $P^k \left( \frac{i}{2\pi} \Theta \right)$  è una  $2k$ -forma (globale) chiusa su  $X$  e la sua classe di coomologia (ottenuta tramite il teorema di De Rham) non dipende dalla connessione  $D$  scelta.

Pertanto si pone

$$c_k(E) := \left[ P^k \left( \frac{i}{2\pi} \Theta \right) \right]$$

Abbiamo quindi formalmente



$$\det\left(\frac{i}{2\pi}\Theta - tI\right) = c_0(E) - c_1(E)t + c_2(E)t^2 - \dots$$

Risulta  $c_0(E) = [X]$  e  $c_k(E) = 0$  se  $k > r$

Poniamo  $c_E(t) := c_0(E) + c_1(E)t + c_2(E)t^2 + \dots$  polinomio di Chern di  $E$ . Formalmente il polinomio di Chern é un elemento di grado zero dell'anello graduato  $[\oplus_i H^i(X, \mathbf{Z})](t)$  dove  $\deg t = -1$ .

Notiamo che il grado (in  $t$ ) del polinomio di Chern é  $\leq \min(\dim X, \text{rank } E)$ .

Ad esempio sul fibrato banale  $E = X \times \mathbf{C}^r$  una connessione é data dall'operatore  $d$  ed ha curvatura nulla e quindi tutte le classi di Chern del fibrato banale sono nulle. Le classi di Chern possono essere quindi viste come ostruzioni a che un fibrato sia banale.

Con questa definizione é facile provare la

**Formola di Whitney.** *Se  $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$  é una successione esatta di fibrati allora  $c_E(t)c_G(t) = c_F(t)$ . In particolare la formola si applica se  $F \simeq E \oplus G$  (si ha sempre questa decomposizione per le strutture  $\mathbf{C}^\infty$ )*

Dalla formola di Whitney segue

$$c_1(F) = c_1(E) + c_1(G)$$

$$c_2(F) = c_2(E) + c_1(E) \cdot c_1(G) + c_2(G)$$

⋮

**Esempi.** Sia  $X = \mathbf{P}^n$ .

Il polinomio di Chern di  $\mathcal{O}(t)$  é  $(1 + t)$ . Il polinomio di Chern di  $\mathcal{O}(t)^p$  é  $(1 + t)^p$ , quindi  $c_k(\mathcal{O}(t)^p) = \binom{p}{k}$ . Dalla successione di Eulero  $0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O}^{n+1} \rightarrow \mathbf{TP}^n(-1) \rightarrow 0$  segue che il polinomio di Chern di  $\mathbf{TP}^n(-1)$  é  $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$  e quindi  $c_k(\mathbf{TP}^n(-1)) = 1 \quad \forall k \leq n$

**Esercizio.** *Calcolare il polinomio di Chern di  $\Omega_{\mathbf{P}^n}^1(2)$ . In particolare mostrare che  $c_n(\Omega_{\mathbf{P}^n}^1(2))$  é zero se e solo se  $n$  é dispari.*

Un'altra formola molto utile é la seguente:

$$c_k(E^*) = (-1)^i c_k(E) \tag{C.1}$$

Sia  $L$  un fibrato in rette, allora le classi di Chern di  $E \otimes L$  si calcolano con la formola:

$$c_k(E \otimes L) = \sum_{i=0}^k \binom{r-i}{k-i} c_i(E) c_1(L)^{k-i} \tag{C.2}$$

**Esercizio.** Sia  $E$  un fibrato di rango 2 e poniamo  $\Delta(E) = c_1^2(E) - 4c_2(E)$ . Provare che  $\Delta(E \otimes L) = \Delta(E)$

**Esercizio.** Sia  $E$  un fibrato di rango  $r$  e poniamo  $\Delta(E) = (r-1)c_1^2(E) - 2rc_2(E)$ . Provare che  $\Delta(E \otimes L) = \Delta(E)$

**Esercizio.** Ripetere il calcolo di  $c_n(\Omega_{\mathbf{P}^n}^1(2))$  usando che  $c_k(\mathbf{TP}^n(-1)) = 1 \quad \forall k \leq n$ ,  $\Omega_{\mathbf{P}^n}^1(2) \simeq (\mathbf{TP}^n(-1))^* \otimes \mathcal{O}(1)$  e le due formule precedenti.

**Definizione.** Le classi di Chern di una varietà sono quelle del suo fibrato tangente, vale a dire  $c_i(X) := c_i(TX)$

Ricordiamo a questo proposito il

**Teorema di Gauss-Bonnet.**[GH]pag.416. Sia  $X$  una varietà di dimensione  $m$ . Vale la formula:

$$c_m(X) = \chi(X, \mathbf{C})$$

**La definizione come luogo di degenerazione.**([GH], vedi anche il capitolo 2 di queste note).

Supponiamo  $E$  globalmente generato.

Prese  $r - k + 1$  sezioni generiche di  $E$  che denotiamo con  $s_1, \dots, s_{r-k+1}$  consideriamo il luogo di degenerazione di codimensione (complessa)  $k$  definito da

$$\{x \in X | s_1(x), \dots, s_{r-k+1}(x) \text{ sono linearmente dipendenti}\}$$

che definisce una classe in  $H_{2n-2k}(X, \mathbf{Z})$ .

Possiamo definire  $c_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbf{Z})$  come la classe di coomologia corrispondente per dualità di Poincaré. Con le notazioni del capitolo 2 abbiamo un morfismo  $\phi: \mathcal{O}^{r-k+1} \rightarrow E$  e  $c_k(E)$  corrisponde a  $D_{r-k}(\phi)$ .

Ovviamente questa definizione é coerente con la formula di Porteous (vedi 2.11)!

Un caso particolare importante si ha quando  $r \leq \dim X$ , allora  $c_r(E)$  (anche detta *top Chern class*) corrisponde alla sottovarietà luogo degli zeri di una sezione generica di  $E$ . La condizione  $c_r(E) = 0$  corrisponde al fatto che la sezione generica  $s$  di  $E$  non si annulla mai (se  $E$  é globalmente generato!). In questo caso il fascio quoziente  $\mathcal{F}$  ottenuto da  $0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{s} E \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$  é un fibrato vettoriale di rango  $r - 1$ .

Quando  $E = \Omega_{\mathbf{P}^n}^1(2)$  ed  $n$  é dispari il fibrato quoziente che si ottiene si chiama fibrato di *correlazione nulla*.

Se  $E$  non é globalmente generato si possono considerare delle opportune sezioni  $C^\infty$  per definire  $c_k(E)$  (vedi [GH]) oppure rimanendo nell'ambito olomorfo (algebrico) si puo' prendere  $t \gg 0$  in modo che  $E(t)$  sia globalmente generato, definire  $c_k(E(t))$  come luogo di degenerazione, e ricavare di conseguenza  $c_k(E)$  dalla formula (C.2).

**La definizione tramite il fibrato proiettivo.** [Gr2]

Si considera  $\mathbf{P}(E) \xrightarrow{\pi} X$  fibrato proiettivo (vedi [Ha] II.7), dove tutte le fibre di  $\pi$  sono isomorfe a  $\mathbf{P}^{r-1}$ . Sia  $H = \mathcal{O}_{\mathbf{P}(E)}(1)$ . In particolare  $\pi_* H = E$ . Vale allora la successione esatta su  $\mathbf{P}(E)$  (*successione di Eulero relativa*)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \pi^*(E^*) \otimes H \longrightarrow T_{rel} \longrightarrow 0$$

dove  $T_{rel}$  é un fibrato che é definito da:

$$0 \longrightarrow T_{rel} \longrightarrow \mathbf{TP}(E) \longrightarrow \pi^* TX \longrightarrow 0$$

Siccome  $T_{rel}$  é un fibrato, segue

$$c_r(\pi^*(E^*) \otimes H) = 0$$

che corrisponde (usando (C.1) e (C.2)) all'equazione di Wu-Chern:

$$H^r - H^{r-1} \cdot \pi^* c_1(E) + H^{r-2} \cdot \pi^* c_2(E) - \dots + (-1)^r \pi^* c_r(E) = 0$$

$c_i(E)$  possono essere definiti dall'equazione di Wu-Chern come i coefficienti che compaiono nell'espressione di  $H^r$  in funzione di  $1, H, \dots, H^{r-1}$  modulo  $\pi^* H^*(X, \mathbf{Z})$ . Questo ha senso perché si può dimostrare che  $1, H, \dots, H^{r-1}$  generano  $\mathbf{P}(E)$  modulo  $\pi^* H^*(X, \mathbf{Z})$

**La definizione mediante le classi di Segre.** [Ful]

Un altro approccio consiste nel definire geometricamente le classi di Segre  $s_i(E)$  mediante la formula

$$s_i(E) := \pi_*(H^{r-1+i})$$

ed il polinomio di Segre

$$s_E(t) := s_0(E) + s_1(E)t + s_2(E)t^2 + \dots$$

Le classi di Chern si ricavano allora formalmente da  $c_E(t) \cdot s_E(t) = 1$ , cioè

$$c_1(E) = -s_1(E)$$

$$c_2(E) = s_1^2(E) - s_2(E)$$

e così via.

Un'interpretazione della top Segre class  $s_n(E)$  é la seguente: se  $E$  é globalmente generato allora  $n + r$  sezioni sono sufficienti a generarlo. Non é detto che  $n + r - 1$  sezioni siano sufficienti a generare  $X$ . Abbiamo infatti

$$s_n(E) = \# \{x \in X \mid \mathcal{O}_X^{n+r-1} \xrightarrow{\phi} E \text{ non é suriettivo}\}$$

per  $\phi$  generico. La dimostrazione segue dalla formula di Porteous, perché il luogo precedente non é altro che il luogo di degenerazione  $D_{r-1}(\phi)$  che ha proprio codimensione  $n$ . In particolare se  $s_n(E) = 0$  allora  $n + r - 1$  sezioni sono sufficienti a generare  $E$  e si ottiene un nucleo di rango  $r - 1$ .

**Esempio.**  $s_i(\mathbf{TP}^n(-1)) = 0$  per  $i \geq 2$ .

**La definizione assiomatica.** [Gr2], [Ha]

Questa definizione é dovuta a Grothendieck. Si basa sul seguente

**Teorema.** Esiste una varietà  $Y$  ed un morfismo  $Y \xrightarrow{f} X$  tale che  $f^*E$  ammette una filtrazione in  $0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_r = f^*E$  dove  $F_i/F_{i-1} \simeq L_i$  sono fibrati in rette e  $f^* : H^i(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^i(Y, \mathbf{Z})$  é iniettiva. In particolare dalla formula di Whitney  $c_{f^*E} = \prod_{i=1}^r c_{L_i}$ , cioè  $f^*E$  ha le stesse classi di Chern di  $L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ .

Sono allora sufficienti le 3 proprietà:

- 1) Se  $L$  é un fibrato in rette,  $c_1(L)$  é la classe di un divisore associato a  $D$ .
- 2) Funtorialità:  $f^*c_i(E) = c_i(f^*E)$  per ogni morfismo  $f$
- 3) Formula di Whitney

per definire le classi di Chern di un fibrato qualunque su  $X$  varietà qualunque.

Da questa definizione deriva il cosiddetto *principio di spezzamento*: per stabilire una relazione sulle classi di Chern é sufficiente verificarla per i fibrati che spezzano.

**Esempio.** Sia  $E$  un fibrato di rango 2. Vogliamo calcolare le classi di Chern della potenza simmetrica  $S^2E$  in funzione di  $c_i(E)$ . Scriviamo formalmente  $E = A \oplus B$ ,  $c_1(A) = a$ ,  $c_1(B) = b$ . Allora  $c_1(E) = a + b$ ,  $c_2(E) = ab$  Siccome  $S^2E = S^2A \oplus (A \otimes B) \oplus S^2B$  segue

$$c_1(S^2E) = 2a + (a + b) + 2b = 3(a + b) = 3c_1(E)$$

$$c_2(S^2E) = 2a(a + b) + 2a \cdot 2b + (a + b)2b = 2(a + b)^2 + 4ab = 2c_1(E)^2 + 4c_2(E)$$

$$c_3(S^2E) = 2a \cdot (a + b) \cdot 2b = 4(a + b)ab = 4c_1(E)c_2(E)$$

Dal principio di spezzamento le formule che abbiamo ricavato, e cioè

$$c_1(S^2E) = 3c_1(E)$$

$$c_2(S^2E) = 2c_1(E)^2 + 4c_2(E)$$

$$c_3(S^2E) = 4c_1(E)c_2(E)$$

sono valide per un qualunque fibrato di rango 2  $E$  su  $X$  varietà qualunque.

**Esercizio.** Sia  $E$  un fibrato di rango 2. Provare che  $c_1(S^k E) = \binom{k+1}{2} c_1(E)$ . In particolare, fissato un fibrato in rette  $H$  ampio su  $X$  (polarizzazione), posto  $\mu(E) := \frac{c_1(E) \cdot H^{n-1}}{rk(E)}$  si ha  $\mu(S^k E) = k\mu(E)$

**Esercizio.** Sia  $E$  un fibrato vettoriale. Provare che  $\mu(S^k E) = k\mu(E)$  e  $\mu(\wedge^k E) = k\mu(E)$ . Questa formula si estende a tutti i funtori di Schur applicati a  $E$ .

**Esercizio.** Siano  $E, F$  due fibrati con  $rk E = e$ ,  $rk F = f$ . Provare che  $c_1(E \otimes F) = f \cdot c_1(E) + e \cdot c_1(F)$

**Esercizio.** Dimostrare le formule (C.1) e (C.2) utilizzando il principio di spezzamento.

## APPENDICE F

### TEOREMI DI ANNULLAMENTO PER FIBRATI AMPI

Per approfondire i fibrati ampi é sempre valido l'articolo di Hartshorne [Har66], mentre per i teoremi di annullamento un testo molto approfondito é [ShiffSom]. Si veda anche [Man94].

**Definizione.** *Un fibrato in rette  $L$  su  $X$  si dice ampio se esiste una metrica su  $L$  con curvatura positiva. Questo equivale a dire che una potenza  $L^k$  immerge  $X$  in  $\mathbf{P}(H^0(L^k)^*)$ .*

Per provare l'equivalenza affermata nella definizione é essenziale il

**Teorema di annullamento di Kodaira-Nakano.** *Sia  $L$  un fibrato in rette ampio su  $X$ . Allora*

$$H^p(X, \Omega^q \otimes L) = 0 \quad \text{per } p + q > n$$

in particolare

$$H^p(X, K_X \otimes L) = 0 \quad \text{se } p > 0$$

**Definizione.**  *$E$  fibrato vettoriale si dice ampio se  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(E)}(1)$  é ampio su  $\mathbf{P}(E)$*

La somma diretta di fibrati ampi é un fibrato ampio. Il quoziente di un fibrato ampio é ancora ampio [Har66]. Se  $E$  é globalmente generato e  $L$  é un fibrato ampio, allora  $E \otimes L$  é ancora ampio (infatti tensorizzando per  $L$  la successione  $\mathcal{O}^r \rightarrow E \rightarrow 0$  si ottiene  $L^r \rightarrow E \otimes L \rightarrow 0$ )

**Teorema di annullamento di Le Potier.** *Sia  $E$  un fibrato vettoriale ampio su  $X$  di rango  $r$ . Allora:*

$$H^p(X, \Omega^q \otimes E) = 0 \quad \text{per } p + q \geq n + r$$

in particolare

$$H^p(X, K_X \otimes E) = 0 \quad \text{se } p \geq r$$

Se  $r = 1$  il teorema di Le Potier si riconduce a quello di Kodaira-Nakano. La dimostrazione di Le Potier, semplificata in seguito da Schneider [Sch1], fa uso dell'isomorfismo

$$H^p(X, \Omega_X^q \otimes E) \simeq H^p(\mathbf{P}(E), \Omega_{\mathbf{P}(E)}^q \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(E)}(1))$$

Ricordando che  $\dim \mathbf{P}(E) = \dim X + r - 1$  la tesi segue applicando Kodaira-Nakano a  $\mathbf{P}(E)$

Si consiglia di leggere la dimostrazione in [Sch1] che é un ottimo articolo dove chiarire il significato della coomologia di Cech.

**Definizione.** *Un fibrato in rette  $L$  si dice nef se  $c_1(L|_C) \geq 0 \forall$  curva irriducibile  $C \subset X$ .  $L$  si dice nef e big se é nef e se  $c_1(L)^n > 0$*

Ogni fibrato globalmente generato é nef. Ogni fibrato ampio é nef e big.

Il teorema di Kodaira-Nakano ammette la seguente generalizzazione:

**Teorema di annullamento di Kawamata-Viehweg [ShiffSom].** *Sia  $L$  un fibrato in rette nef e big su  $X$ . Allora*

$$H^p(X, K_X \otimes L) = 0 \quad \text{se } p > 0$$

## BIBLIOGRAFIA

### Testi introduttivi alla geometria algebrica

- [CLO92] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, Ideals, Varieties and Algorithms. An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Springer 1992
- [Har92] J.Harris, Algebraic geometry. A first course. Springer 1992 GTM 133

### Manuali di geometria algebrica

- [GH] P. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley 1978
- [Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry. Springer 1977 GTM 52

### Bibliografia essenziale sulle sottovarietà di codimensione piccola

- [DP] W. Decker, S. Popescu, On surfaces in  $\mathbf{P}^4$  and 3-folds in  $\mathbf{P}^5$ , preprint 1994 alg-geom/9402006
- [EP] G.Ellingsrud, C.Peskine, Sur les surfaces lisses de  $\mathbf{P}^4$ , Inv. Math. 95, 1-11 (1989)
- [Har74] R. Hartshorne, Varieties of small codimension in projective space, BAMS 80 (1974)
- [Ok1] C.Okonek, On codimension 2 submanifolds in  $\mathbf{P}^4$  and  $\mathbf{P}^5$ , Mathematica Gottingensis 50 (1986)
- [Ok2] C. Okonek, Notes on varieties of codimension 3 in  $\mathbf{P}^n$ , Manuscr. Math. 84, 421-442 (1994)
- [OSS] C.Okonek, M.Schneider, H.Spindler, Vector bundles on complex projective spaces, Birkhauser 1980
- [Sch] M. Schneider, Vector bundles and low-codimensional submanifolds of projective space: a problem list, Topics in algebra. Banach Center Publications vol. 26, PWN 1989

### Bibliografia

- [AnO1] V.Ancona, G.Ottaviani, Some applications of Beilinson theorem to projective spaces and quadrics, Forum Math. 3, 157-176 (1991)
- [AnO2] V. Ancona, G. Ottaviani, An introduction to the derived categories and the theorem of Beilinson, Atti Accad. Pelor. cl. I, 67, 99-110 (1989)
- [A] A.Alzati, A new Castelnuovo bound for two codimensional subvarieties of  $\mathbf{P}^r$ , Proc. AMS 114, 607-611 (1992)
- [AlO1] A.Alzati, G. Ottaviani, A linear bound on the t-normality of codimension two subvarieties of  $\mathbf{P}^n$ , Crelle J. 409 (1990)
- [AlO2] A. Alzati, G. Ottaviani, A vanishing theorem for the ideal sheaf of codimension two subvarieties of  $\mathbf{P}^n$ , Rend. Matem. Trieste 22, 136-139 (1992)
- [AlO3] A. Alzati, G. Ottaviani, The theorem of Mather on generic projections in the setting of algebraic geometry, Manuscripta Math. 74, (1992)

- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris, Geometry of algebraic curves, Springer 1985
- [Arr94] E. Arrondo, Towards a generalization of Serre construction, preprint 1994
- [BC] E. Ballico, L. Chiantini, On smooth subcanonical varieties of codimension 2 in  $\mathbf{P}^n$ ,  $n \geq 4$ , Annali Mat. 135, 99-117 (1983)
- [Ban] C. Banica, Smooth Reflexive sheaves, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 36, 571-593 (1993)
- [Ba] W. Barth, Transplanting cohomology classes in complex projective space, Amer. J. Math. 92 (1970)
- [Bei] A.A.Beilinson, Coherent sheaves on  $\mathbf{P}^n$  and problems of linear algebra, Funct. Anal. Appl. 12, 214-216 (1978)
- [BEL] A. Bertram, L. Ein, R.Lazarsfeld, Vanishing theorems, a theorem of Severi and the equations defining projective varieties, Journal AMS 4, 587-602 (1991)
- [Bo] G.Bolondi, Surfaces in  $\mathbf{P}^4$  and deficiency modules, in Contemporary Math. 162 AMS, C.Ciliberto, L.Livorni, A.Sommese eds.
- [BOU] N. Bourbaki, Algebre cap. 9, Hermann
- [BOSS91] R. Braun, G. Ottaviani, M.Schneider, F.Schreyer, Boundedness for non general type 3-folds in  $\mathbf{P}^5$ , in: Complex analysis and Geometry, Proc. CIRM 1991, Plenum 1993, V.Ancona, A.Silva eds.
- [BOSS92] R. Braun, G. Ottaviani, M.Schneider, F.Schreyer, Classification of non log-general type 3-folds in  $\mathbf{P}^5$ , preprint 1992
- [Ca] G.Castelnuovo, Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni, Atti R. Ist. Veneto, ser, VII, 2, 855-901 (1891)
- [Chang] M.C.Chang, Chinese J. of Math. 21,(1993), MR94e:14057
- [CV] L.Chiantini, P.Valabrega, Subcanonical curves and complete intersections in projective 3-space, Annali di Matem. 138 (1984)
- [DES] W. Decker, L.Ein, F.Schreyer, Construction of surfaces in  $\mathbf{P}^4$  J.Alg.Geom. 2, 185-237, (1993)
- [E] L. Ein, An analogue of Max Noether's theorem, Duke Math. J. 52 (1985)
- [EG] E.Evans, P.Griffith, The syzygy problem, Ann. of Math. 114 (1981)
- [E91] L. Ein, Vanishing theorems for varieties of low codimension, LNM 1311 Springer
- [Ful] W.Fulton, Intersection theory, Springer 1984
- [FuLa] W.Fulton, R.Lazarsfeld, On the connectedness of degeneracy loci and special divisors, Acta Math. 146 (1981)
- [GO] F.Ghione, G.Ottaviani, A tribute to Corrado Segre, in: London Math. Soc. Lect. Notes Series 179, 1992
- [GoGu] Golubitsky, Guillemin, Stable mappings and their singularities, GTM 14, Springer 1973



- [Green] M.Green, Koszul cohomology and geometry, in: Lectures on Riemann Surfaces, World Scientific Press 1989, M.Cornalba ed.
- [Gr1] A. Grothendieck, Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. Math. 79, 121-138 (1956)
- [Gr2] A. Grothendieck, La theorie des classes de Chern, Bull. Soc. Math. France 86 (1958)
- [GP] L.Gruson, C.Peskine, in Progress in Math. 24 Birkhauser
- [Gu] G. Gurevich, Algebraic theory of invariants, Noordhoff 1964
- [HT] J. Harris, L. Tu, On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties, Topology 23, 71-84 (1984).
- [Har66] R. Hartshorne, Ample vector bundles, Publ. IHES 29 (1966)
- [Hor64] G. Horrocks, Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, Proc. London Math. Soc. 14, 689-713 (1964)
- [HM] G. Horrocks, D. Mumford, A rank 2 vector bundle on  $\mathbf{P}^4$  with 15,000 symmetries, Topology 12 (1973)
- [JLP] T. Josefiak, A. Lascoux, P.Pragacz, Classes of determinantal varieties associated with symmetric and skew-symmetric matrices. Math. USSR Izv. 18, 1982, 575-586
- [Kunz] E. Kunz, Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Birkhauser 1985
- [La] A. Lanteri, On the existence of scrolls in  $\mathbf{P}^4$ , Atti Accad. Naz. Lincei, 69 (1980)
- [Lar] M.E. Larsen, On the topology of projective manifolds, Invent. Math. 19, 251-260 (1973)
- [Man94] L. Manivel, Theoremes d'annulation sur certaines varietes projectives, preprint 1994
- [Ok84] C. Okonek, Über 2-codimensionale Untermannigfaltigkeiten vom Grad 7 in  $\mathbf{P}^4$  und  $\mathbf{P}^5$ , Math. Z. 187 209-219 (1984)
- [Ot92] G. Ottaviani, On 3-folds in  $\mathbf{P}^5$  which are scrolls, Annali Sc. Norm. Pisa 19, (1992)
- [PS] C. Peskine, L.Szpiro, Liaison de variétés algebriques I, Inv. Math. 26 (1974)
- [PPS] J. LePotier, Th. Peternell, M. Schneider, Vanishing theorems, linear and quadratic normality, Inv. Math. 87 (1987)
- [PrWe85] P. Pragacz, J. Weyman, Complexes associated with trace and evaluation. Another approach to Lascoux's resolution, Advances in Mathematics 57, 163-207 (1985)
- [Rao] P.Rao, Liaison among curves in  $\mathbf{P}^3$ , Inv. Math. 26 (1974)
- [Sch1] M. Schneider, Ein einfacher beweis des Verschwindungssatzes für positive holomorphe Vektorraumbündel, Manuscr. Math. 11, 95-101 (1974)
- [Sch2] M. Schneider, Boundedness of low-codimensional submanifolds of projective space, Intern. J. Math. 3, 397-399 (1992)
- [SZ] M. Schneider, J.Zintl, The theorem of Bath-Lafschetz as a consequence of Le Potier's vanishing theorem, preprint 1992
- [Serre] J.P.Serre, Algèbre locale, multiplicités, LNM 11 Springer 1965

- [ShiffSom] B. Shiffmann, A. Sommese, Vanishing theorems on complex manifolds, Progress in Math. 56, Birkhauser 1985
- [Som] A.Sommese, Submanifolds of abelian varieties, Math. Ann. 233 (1978)
- [Ve] L.Verdi, Le curve razionali normali sono insiemisticamente intersezione completa, BUMI 16 (1979)
- [Wal94] C. Walter, On Pfaffian Subschemes, preprint 1994, alg-geom/9406005