

Quale cultura matematica per gli insegnanti di matematica

XXX Convegno UMI - CIIM
Bergamo 25 - 27 Ottobre 2012

Giorgio Ottaviani

Università di Firenze

25 Ottobre, 2012

Formazione degli insegnanti di matematica. Avviene in tre/quattro fasi

- 1 quando i futuri insegnanti sono *studenti di scuola*
- 2 quando i futuri insegnanti sono *studenti universitari*
- 3 quando i futuri insegnanti hanno una *formazione specifica come professione insegnanti*
- 4 Formazione in servizio (ricordare l'inizio del PNI)

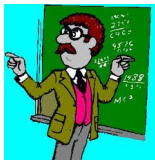
Naturalmente la cultura la si ottiene da formazione personale, dall'ambiente, da amici, dalla famiglia...

Osservazioni generali: la *fase 3*. è relativamente recente

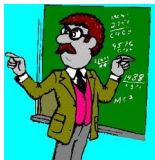
Raccordo tra le fasi di formazione



E' fondamentale avere un raccordo tra queste fasi.
Spesso i docenti universitari si sentono in un mondo a parte, non partecipano a un progetto comune.



- Stefano, bravo studente di Matematica, si innamora dell'algebra. Immagina che gli studenti del Liceo Scientifico apprezzerebbero maggiormente la matematica se imparassero la teoria dei gruppi. Prepara una unità didattica con una introduzione assiomatica alla teoria dei gruppi, cercando di semplificare l'approccio che ha ricevuto all'Università. Purtroppo pochi studenti comprendono l'argomento.



- Stefano, bravo studente di Matematica, si innamora dell'algebra. Immagina che gli studenti del Liceo Scientifico apprezzerebbero maggiormente la matematica se imparassero la teoria dei gruppi. Prepara una unità didattica con una introduzione assiomatica alla teoria dei gruppi, cercando di semplificare l'approccio che ha ricevuto all'Università. Purtroppo pochi studenti comprendono l'argomento.
- Antidoto: Maggiore attenzione agli obiettivi e non ai contenuti. Stefano avrebbe potuto presentare i gruppi di trasformazioni (simmetrie del triangolo equilatero) e rappresentare l'operazione come una tabella pitagorica.



- Maria, studentessa appassionata di Matematica, si convince che la Matematica è insegnata in modo troppo noioso. Prepara una collezione di giochi divertenti e di aneddoti con i quali vuole appassionare i suoi futuri studenti. Maria rischia un po'. Entro poco tempo può perdere le sue illusioni e con disincanto piombare nell'insegnamento tradizionale che detestava.



- Maria, studentessa appassionata di Matematica, si convince che la Matematica è insegnata in modo troppo noioso. Prepara una collezione di giochi divertenti e di aneddoti con i quali vuole appassionare i suoi futuri studenti. Maria rischia un po'. Entro poco tempo può perdere le sue illusioni e con disincanto piombare nell'insegnamento tradizionale che detestava.
- Ma dobbiamo comprendere Maria. Maria dovrà combattere con tanti luoghi comuni. Troverà colleghi che si vanteranno di non sapere la matematica ("lo di matematica non ho mai capito niente...").



- Maria, studentessa appassionata di Matematica, si convince che la Matematica è insegnata in modo troppo noioso. Prepara una collezione di giochi divertenti e di aneddoti con i quali vuole appassionare i suoi futuri studenti. Maria rischia un po'. Entro poco tempo può perdere le sue illusioni e con disincanto piombare nell'insegnamento tradizionale che detestava.
- Ma dobbiamo comprendere Maria. Maria dovrà combattere con tanti luoghi comuni. Troverà colleghi che si vanteranno di non sapere la matematica ("lo di matematica non ho mai capito niente...").
- Antidoto: diamo una preparazione pedagogica più solida per Maria, che diventi più cosciente delle problematiche educative. Maria sarà una brava insegnante se conserverà il suo entusiasmo.



- Beatrice, studentessa di matematica, nonostante cinque anni di Liceo Scientifico, ha appena toccato la geometria euclidea. Si è laureata ed oggi è supplente. Dai corsi di Analisi e Fisica ha imparato tante cose che le sono utili nell'insegnamento. Dal corso di Geometria non ha imparato niente che le sia utile nell'insegnamento: le matrici non sono in programma. Affrontera' appena dal libro di Geometria i primi assiomi e poco più. Poi abbandonerà la Geometria per rifugiarsi nell'algebra.



- Beatrice, studentessa di matematica, nonostante cinque anni di Liceo Scientifico, ha appena toccato la geometria euclidea. Si è laureata ed oggi è supplente. Dai corsi di Analisi e Fisica ha imparato tante cose che le sono utili nell'insegnamento. Dal corso di Geometria non ha imparato niente che le sia utile nell'insegnamento: le matrici non sono in programma. Affrontera' appena dal libro di Geometria i primi assiomi e poco più. Poi abbandonerà la Geometria per rifugiarsi nell'algebra.
- Diagnosi: la Geometria insegnata nei corsi universitari ha spesso perso il contatto con la semantica del suo nome.

Perché si insegna matematica ?

Perché si insegna matematica ?

- La matematica è utile/ la matematica è bella

Perché si insegna matematica ?

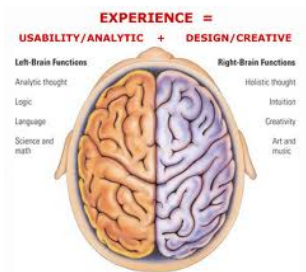
- La matematica è utile/ la matematica è bella
- La matematica permette di creare modelli/ la matematica fa ragionare

Luigi e Maria Giuditta Campedelli



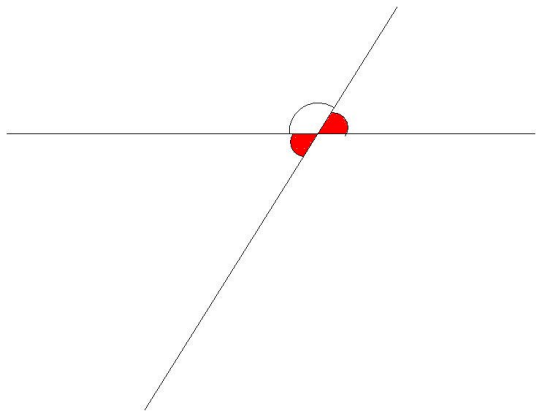
Emisferi destro e sinistro del cervello

- ragionamento algebrico-analitico/geometrico-spaziale
- pensiero sintetico e analitico

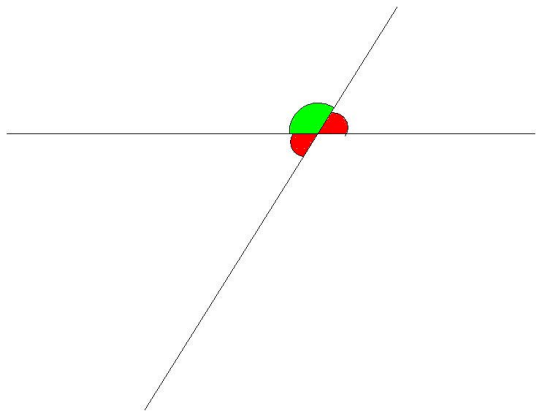


- Angoli opposti al vertice
- Rette parallele tagliate da una trasversale
- La somma degli angoli di un triangolo
- Il teorema di Pitagora
- Il teorema di Talete
- Circonferenze inscritte e circoscritte, il teorema di Poncelet
- Invarianti di due coniche
- Quartiche di Lüroth

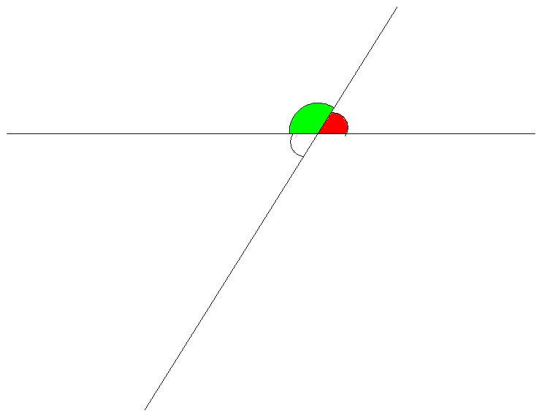
Angoli opposti al vertice



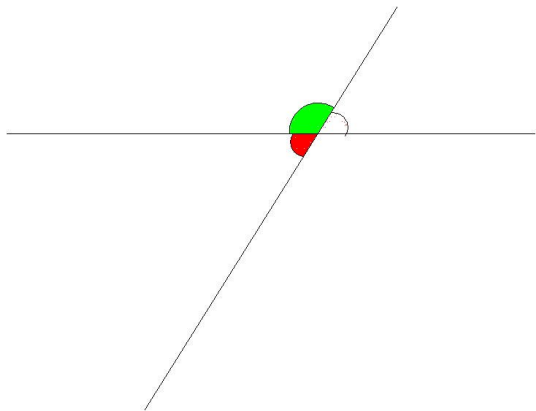
Angoli opposti al vertice



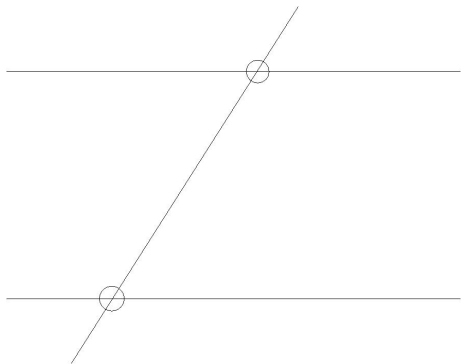
Angoli opposti al vertice



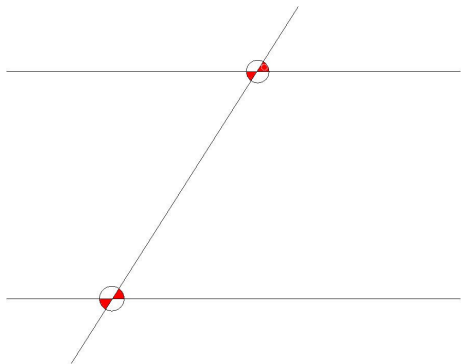
Angoli opposti al vertice



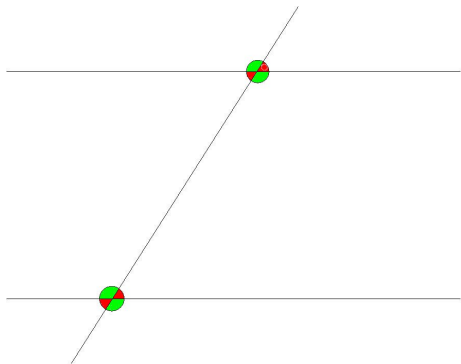
Rette parallele tagliate da una trasversale



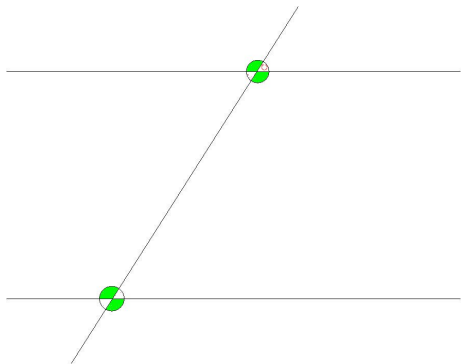
Rette parallele tagliate da una trasversale



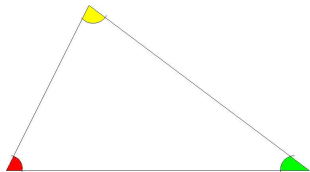
Rette parallele tagliate da una trasversale



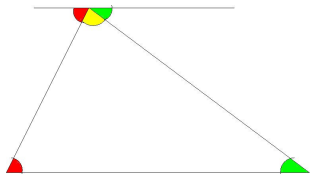
Rette parallele tagliate da una trasversale



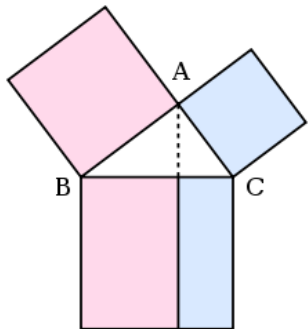
La somma degli angoli interni di un triangolo



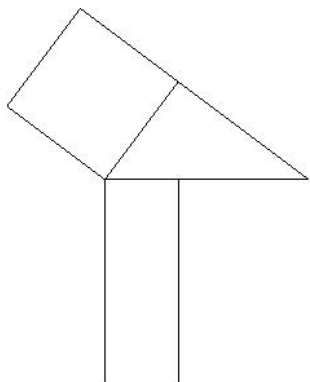
La somma degli angoli interni di un triangolo



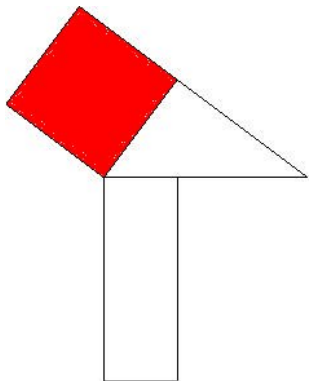
Il Teorema di Pitagora



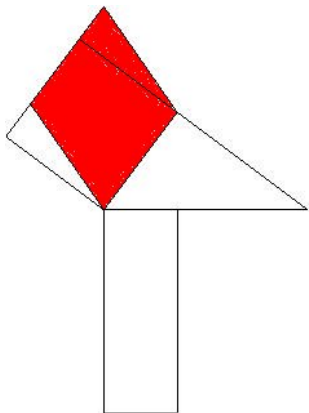
Il Teorema di Pitagora



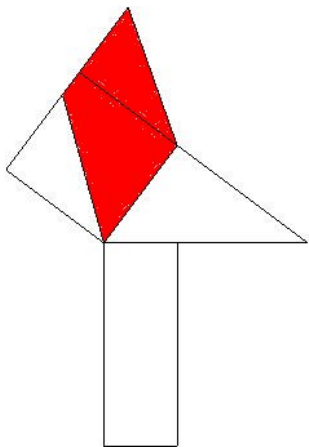
Il Teorema di Pitagora



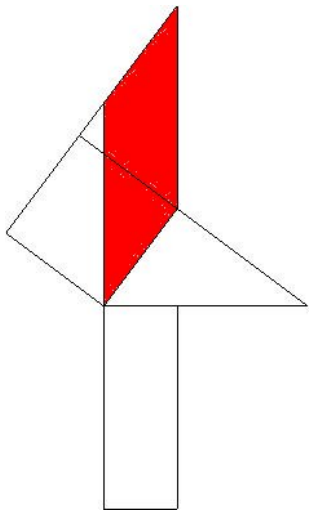
Il Teorema di Pitagora



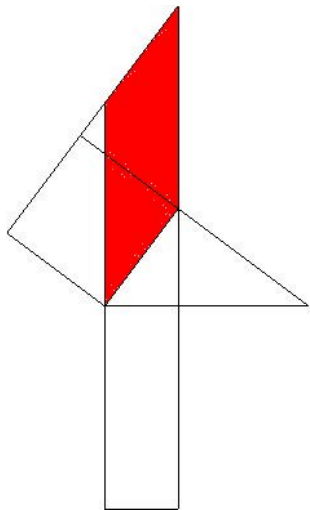
Il Teorema di Pitagora



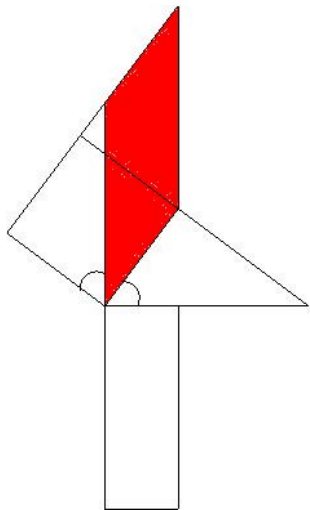
Il Teorema di Pitagora



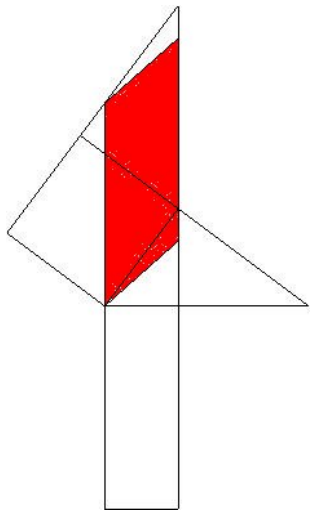
Il Teorema di Pitagora



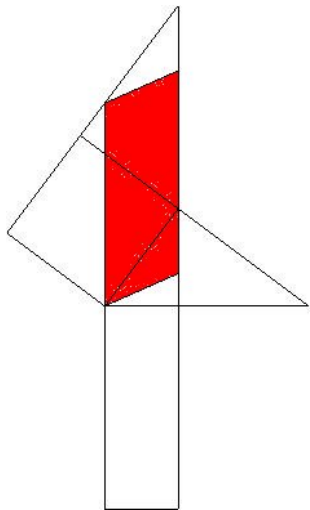
Il Teorema di Pitagora



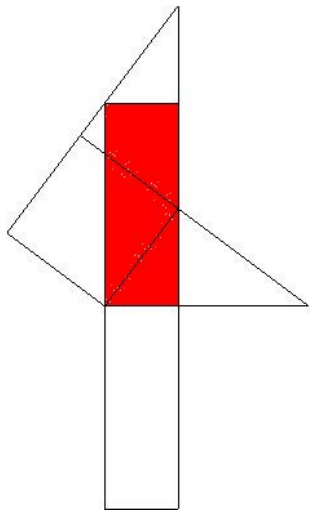
Il Teorema di Pitagora

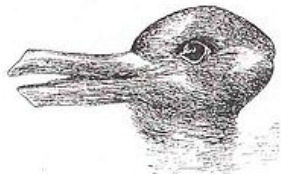


Il Teorema di Pitagora



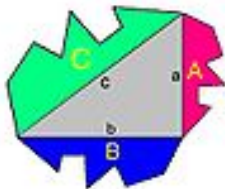
Il Teorema di Pitagora



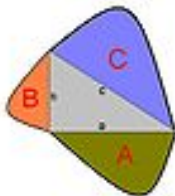
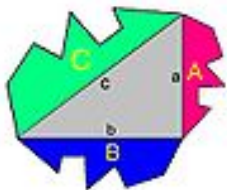


E' un'oca o un coniglio ?

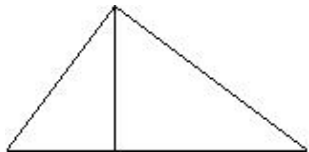
Generalizzazioni del Teorema di Pitagora



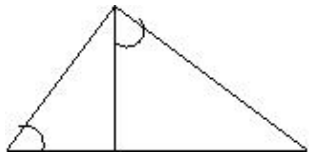
Generalizzazioni del Teorema di Pitagora



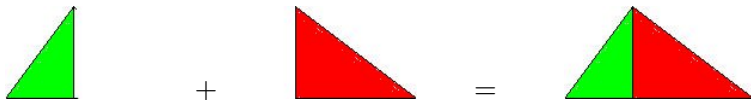
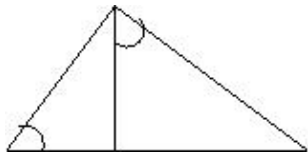
Dimostrazione *rapida* del teorema di Pitagora



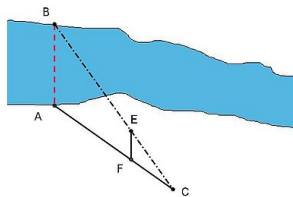
Dimostrazione *rapida* del teorema di Pitagora



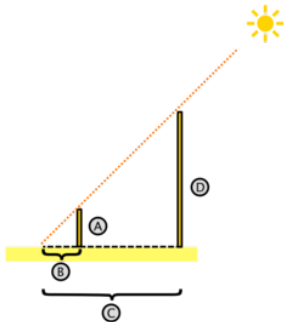
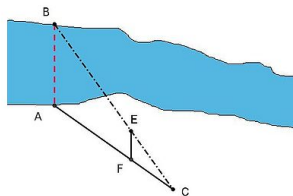
Dimostrazione *rapida* del teorema di Pitagora



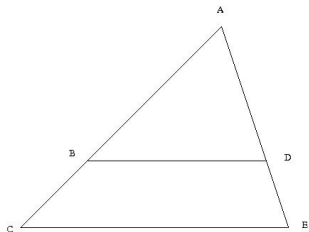
Applicazioni del Teorema di Talete



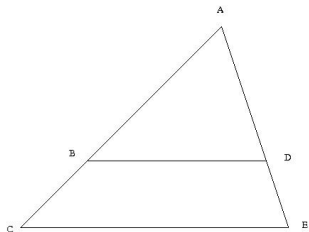
Applicazioni del Teorema di Talete



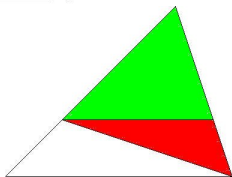
Dimostrazione del Teorema di Talete



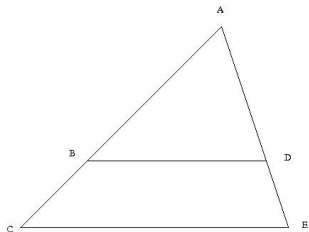
Dimostrazione del Teorema di Talete

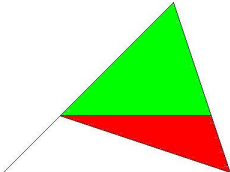


$$\frac{AD}{DE} = \frac{\text{area}(ADB)}{\text{area}(DEB)}$$



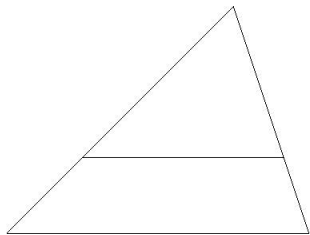
Dimostrazione del Teorema di Talete



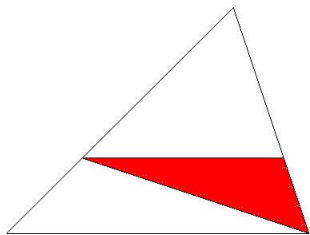
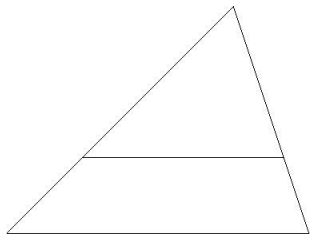
$$\frac{AD}{DE} = \frac{\text{area}(ADB)}{\text{area}(DEB)}$$


$$= \frac{\text{area}(ADB)}{\text{area}(BDC)} = \frac{AB}{BC}$$

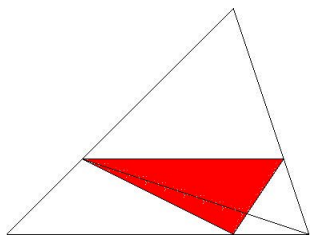
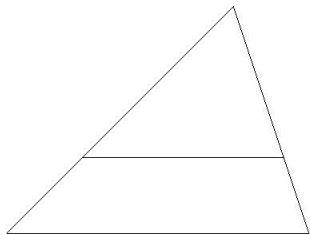

Animazione per la dimostrazione del Teorema di Talete



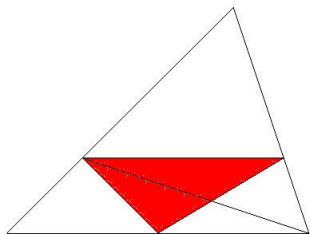
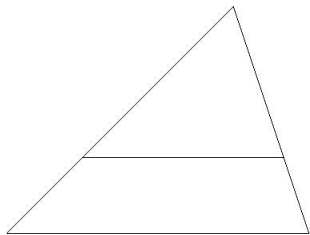
Animazione per la dimostrazione del Teorema di Talete



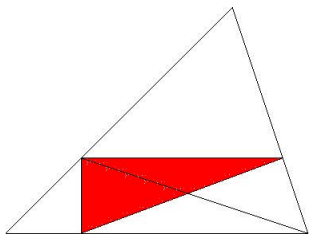
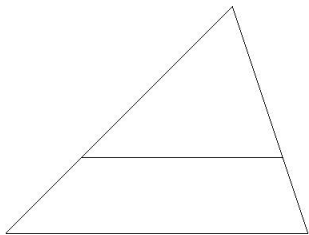
Animazione per la dimostrazione del Teorema di Talete



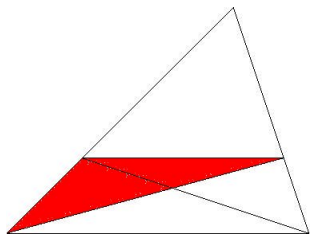
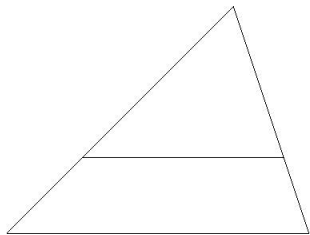
Animazione per la dimostrazione del Teorema di Talete



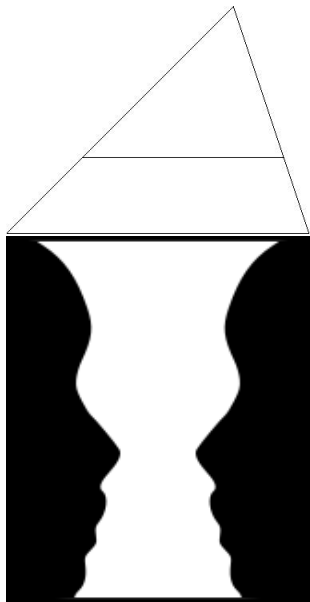
Animazione per la dimostrazione del Teorema di Talete



Animazione per la dimostrazione del Teorema di Talete



Animazione per la dimostrazione del Teorema di Talete

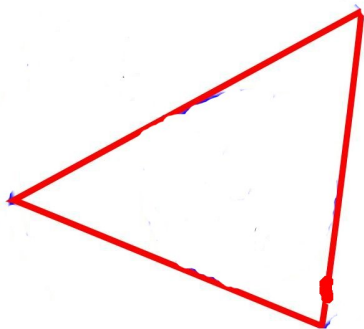


La misura della scuola

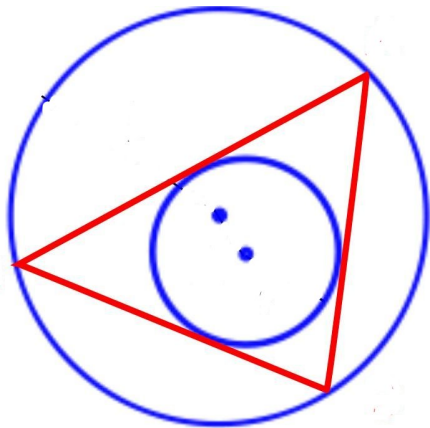
Di spalle vedete Margherita durante il suo tirocinio.



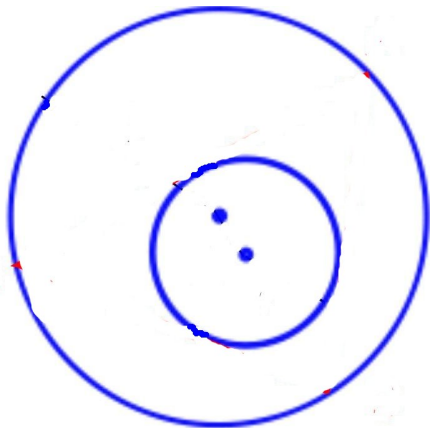
Circonferenza inscritta e circoscritta a un triangolo



Circonferenza inscritta e circoscritta a un triangolo



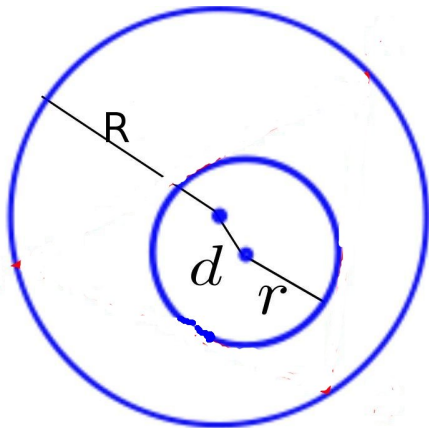
Teorema di Eulero



circoscritto ?

Esiste un triangolo inscritto e

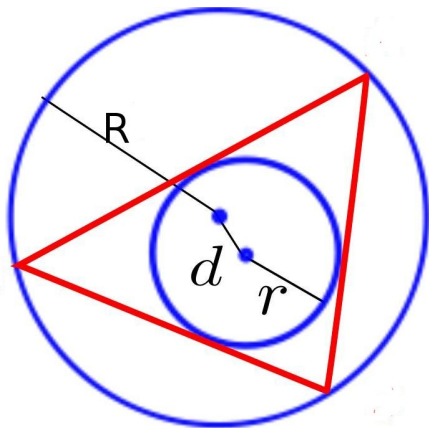
Teorema di Eulero



$$d^2 = R(R - 2r)$$

Il triangolo esiste se e solo se

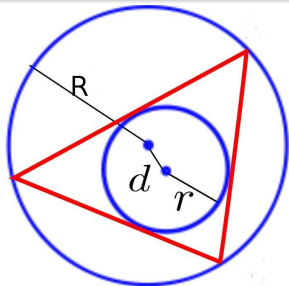
Teorema di Eulero



$$\text{Qui } d^2 = R(R - 2r)$$

Corollario

Siano r e R i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta a un triangolo. Abbiamo $2r \leq R$ e vale l'uguaglianza se e solo se il triangolo è equilatero.



Invarianti di due coniche

Siano A e B le matrici simmetriche 3×3 di due coniche .
Scriviamo

$$\det(A + tB) = \det A + t\sigma_1(A, B) + t^2\sigma_2(A, B) + t^3 \det B$$

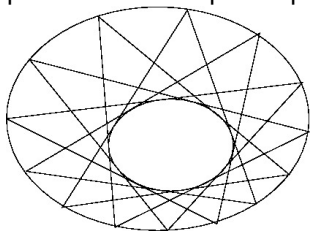
C'è un triangolo inscritto ad A e circoscritto a B se e solo se

$$\sigma_1(A, B)^2 - 4 \det A \sigma_2(A, B) = 0$$

(Cambridge Mathematical Tripos 1876)

Teorema di Poncelet

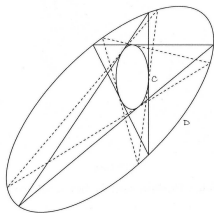
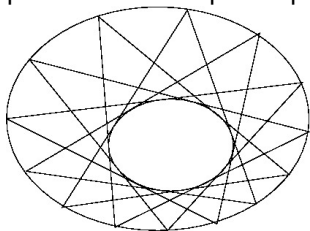
Se il “polilatero” si chiude dopo n passi, partendo da un punto particolare della conica esterna, allora si chiude dopo n passi partendo da un qualunque punto della conica esterna,



Ci sono formule analoghe (più complicate) per le coppie di coniche che ammettono un n -polilatero inscritto e circoscritto.

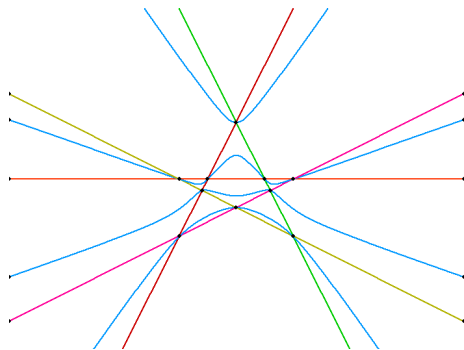
Teorema di Poncelet

Se il “polilatero” si chiude dopo n passi, partendo da un punto particolare della conica esterna, allora si chiude dopo n passi partendo da un qualunque punto della conica esterna,



Ci sono formule analoghe (più complicate) per le coppie di coniche che ammettono un n -polilatero inscritto e circoscritto.

Quartiche di Lüroth



Una curva quartica piana si dice di Lüroth se è circoscritta a un pentalatero completo. L'invariante delle quartiche di Lüroth ha grado 54 e il suo studio è un attuale problema aperto. Poche settimane fa è stata trovata una formula esplicita, ancora non del tutto soddisfacente.

Commenti sul percorso visivo

Il rigore esiste a molti livelli.

Un luogo comune è che il ragionamento geometrico “attraverso le figure” è solo intuitivo. Questo è il modo sbagliato di approcciarsi alla geometria.

Il rapporto tra geometria sintetica e geometria analitica è ben più complesso, solo con Hilbert si è compreso che sono due facce della stessa disciplina.



Qualche conclusione

è importante mantenere un percorso di geometria sintetica all'interno dell'insegnamento nella scuola superiore
è importante che gli studenti universitari affrontino questioni di geometria sintetica, e trovino lo charme del nome Geometria.
è importante che nel percorso di formazione degli insegnanti la geometria sintetica venga recuperata anche dal punto di vista disciplinare

Lo studente per primo deve collegare la matematica del Liceo con la matematica universitaria.





Grazie per l'attenzione!