Spazi affini e combinazioni affini. Morfismi affini.

Giorgio Ottaviani

Abstract

Introduciamo il concetto di combinazione affine in uno spazio affine, e in base a questo, ne caratterizziamo i sottospazi. Queste note integrano il cap. 7 sugli spazi affini del testo di E. Sernesi "Geometria I".

1 Spazi affini

Sia V uno spazio vettoriale su K (in prima lettura si può supporre $K = \mathbb{R}$).

Definiamo adesso uno spazio affine su V. Si tratta di un insieme, che vedremo in corrispondenza biunivoca con V stesso, ma con una struttura che lo rende più adatto a sviluppare le nozioni geometriche. In particolare in uno spazio affine non ci sono punti privilegiati, come l'origine in V. Il fatto fondamentale è che i sottospazi affini in $\mathbf{A}$ sono molti di più dei sottospazi vettoriali di V, che contengono sempre l'origine.

Definizione 1 *Uno spazio affine su V è un insieme non vuoto $\mathbf{A}$, dotato di una funzione*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \times \mathbf{A} & \to & V \\ (P, Q) & \mapsto & \overrightarrow{PQ} \end{array}$$

tale che i seguenti due assiomi siano soddisfatti

- *SA1* $\forall P \in \mathbf{A}$ *e* $\forall v \in V$ $\exists! Q \in \mathbf{A}$ *tale che* $\overrightarrow{PQ} = v$.
- *SA2* $\forall P, Q, R \in \mathbf{A}$ *vale* $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

Gli elementi di A si dicono punti, e il vettore $\overrightarrow{PQ}$ si dice vettore di punto iniziale P e punto finale Q.

Lemma 2 *(i)* $\forall P \in \mathbf{A}$ $\overrightarrow{PP} = 0$ *è il vettore nullo.*
(ii) $\forall P, Q \in \mathbf{A}$ $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Dimostrazione Prendendo $P = Q = R$ in SA2 abbiamo $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$ e dalla legge di cancellazione segue (i).

Prendendo $R = P$ in SA2 abbiamo $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP}$ e (ii) segue da (i). $\square$

Esempio 3 *Ogni spazio vettoriale V è uno spazio affine su se stesso ponendo*

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

che è ben definito quando $P, Q \in V$.

Nel caso $V = \mathbb{R}^n$ lo spazio affine che si ottiene in questo modo si denota $\mathbb{A}^n$. Notiamo che, come insiemi, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{A}^n$ coincidono.

Osservazione Fissato $O \in \mathbf{A}$, l'assioma SA1 implica che abbiamo una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \to & V \\ P & \mapsto & \overrightarrow{OP} \end{array}$$

(l' "esistenza" implica che è suriettiva e l' "unicità" implica che è iniettiva.)

Una definizione equivalente degli spazi affini si ottiene considerando una funzione

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \times V & \to & \mathbf{A} \\ (P, v) & \mapsto & t_v(P) \end{array}$$

tale che

- SA1' $\forall P, Q \in \mathbf{A}$, $\exists! v \in V$ tale che $t_v(P) = Q$.
- SA2' $\forall P \in \mathbf{A}$ e $\forall v, w \in V$ vale $t_w[t_v(P)] = t_{w+v}(P)$

$t_v(P)$ si dice il traslato di P mediante v. Il legame tra le due definizioni si ottiene ponendo $v = \overrightarrow{PQ}$ in SA1'. SA2' si esprime dicendo che abbiamo un'*azione* del gruppo V su $\mathbf{A}$. SA1' esprime che tale azione è transitiva ("esistenza") e libera ("iniettività").

Quando V è uno spazio affine su stesso (ad esempio nel caso $\mathbf{A} = \mathbb{A}^n$) abbiamo $t_v(P) = P + v$.

2 Combinazioni affini e sottospazi

Siano $P_1, \ldots P_k \in \mathbf{A}$ e siano $a_1, \ldots a_k \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^k a_i = 1$. Vogliamo definire la *combinazione affine* $\sum_{i=1}^k a_i P_i$.

Proposizione-Definizione 4 *Per ogni $P \in \mathbf{A}$ denotiamo con $Q = \sum_{i=1}^k a_i P_i$ il punto di $\mathbf{A}$ tale che $\overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1} a_i \overrightarrow{PP_i}$. Tale punto è determinato grazie all'assioma SA2.*

Il punto $Q = \sum_{i=1}^k a_i P_i$ non dipende da P e quindi l'espressione $\sum_{i=1}^k a_i P_i$ è ben definita.

Dimostrazione Per un altro punto P' abbiamo $\sum_{i=1} a_i \overrightarrow{P'P_i} = \sum_{i=1} a_i (\overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PP_i}) = \sum_{i=1} a_i \overrightarrow{P'P} + \sum_{i=1} a_i \overrightarrow{PP_i} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q}$ e quindi il punto Q definito rispetto a P coincide con quello definito rispetto a P'. $\square$

Notiamo che nella dimostrazione precedente l'ipotesi $\sum_{i=1}^k a_i = 1$ è necessaria. Senza tale ipotesi l'espressione $\sum_{i=1}^k a_i P_i$ non ha senso in uno spazio affine, perché dipenderebbe dalla scelta di un punto.

Notiamo che ogni P_i si ottiene come particolare combinazione affine di $P_1, \ldots, P_k$ con coefficienti $a_j = \delta_{ij}$.

In $\mathbb{A}^n$ l'espressione $\sum_{i=1}^{k} a_i P_i$ si calcola come se fosse una usuale combinazione lineare. Infatti, dalla definizione, se $Q = \sum_{i=1} a_i P_i$ abbiamo $Q - P = \overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1} a_i \overrightarrow{PP_i} = \sum_{i=1} a_i (P_i - P) = (\sum_{i=1} a_i P_i) - P$.

Questo permette di scrivere in coordinate le combinazioni affini esattamente come le combinazioni lineari. Ad esempio se $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n$, $Q = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{A}^n$, allora $(1-t)P + tQ$ ha coordinata i-esima data da $(1-t)x_i + ty_i$.

Definizione 5 *Un punto $O \in \mathbf{A}$ e una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di V determinano un sistema di coordinate affini. Diremo che $P \in \mathbf{A}$ ha coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ rispetto a questo riferimento se*

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Notiamo che il punto origine O ha coordinate tutte nulle. Se A ha coordinate $(a_1, \ldots, a_n)$, e B ha coordinate $(b_1, \ldots, b_n)$ allora

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) e_i$$

Il punto $(1-t)A + tB$ ha coordinata i-esima (rispetto allo stesso sistema) data da $(1-t)a_i + tb_i$.

Definizione 6 *Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale e sia $Q \in \mathbf{A}$. Il sottospazio affine passante per Q e parallelo a W è il sottoinsieme S di $\mathbf{A}$ costituito da tutti i punti $P \in A$ tali che $\overrightarrow{QP} \in W$.*

Proposizione 7 *W è in corrispondenza biunivoca con S mediante l'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} S & \rightarrow & W \\ P & \mapsto & \overrightarrow{QP} \end{array}$$

Dimostrazione Se $w \in W$ esiste unico $P \in A$ tale che $\overrightarrow{QP} = w$ grazie all'assioma SA1. Dalla definizione di S segue che $P \in S$. $\square$

Notiamo che W può essere ricostruito da S e da un suo punto Q come

$$W = \{v \in V | v = \overrightarrow{QP} \text{ per qualche } P \in S\}$$

W si dice la *giacitura* di S.

S risulta uno spazio affine su W. Il numero $\dim(W)$ è detto *dimensione* di S e si indica con $\dim(S)$. In particolare $\dim \mathbb{A}^n = n$.

Nel caso $\dim(S) = 1$ allora S si dice una *retta*, e la sua giacitura si chiama anche la *direzione* della retta.

Se $\dim(S) = 2$ allora S si dice un *piano*.

Se $\dim \mathbf{A} = n$ e $S \subset \mathbf{A}$ è un sottospazio di dimensione $n-1$ allora si dice un *iperpiano*.

Esempio 8 *I sottospazio affini di* $\mathbb{A}^2$ *sono*

(0) i punti, che hanno dimensione zero.

(1) le rette (anche non passanti per l'origine), che hanno dimensione 1*.*

(2) $\mathbb{A}^2$ *stesso.*

Se $S \subseteq \mathbb{A}^n$ è un sottospazio affine con giacitura W e $P \in S$ possiamo scrivere $S = P + W$. Questo permette di pensare a un sottospazio affine come a un traslato di un sottospazio vettoriale.

Teorema 9 *Sia* S *un sottospazio affine e* $P_1, \dots P_k \in S$*. Allora ogni combinazione affine di* $P_1, \dots P_k$ *appartiene a* S*, cioè per ogni* $a_1, \dots, a_k$ *tali che* $\sum_{i=1}^k a_i = 1$ *abbiamo* $\sum_{i=1}^k a_i P_i \in S$*.*

Dimostrazione Sia W la giacitura di S. Scegliamo un punto $P \in S$, allora per definizione $\overrightarrow{PP_i} \in W$. Pertanto, se $Q = \sum_{i=1}^k a_i P_i$ abbiamo $\overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1} a_i \overrightarrow{PP_i} \in W$ (perché W è chiuso rispetto alle combinazioni lineari) e quindi $Q \in S$ come volevamo.

□

Il teorema 9 si esprime dicendo che i sottospazi affini sono chiusi rispetto alle combinazioni affini. Questa proprietà caratterizza i sottospazi affini, come è mostrato dal seguente:

Teorema 10 *Sia* $S \subsetneq \mathbf{A}$ *un sottoinsieme tale che per ogni* $P_1, \dots P_k \in S$ *e per ogni* $a_1, \dots, a_k$ *tali che* $\sum_{i=1}^k a_i = 1$ *abbiamo* $\sum_{i=1}^k a_i P_i \in S$*. Allora* S *è un sottospazio affine.*

Dimostrazione Fissiamo $Q \in S$. Definiamo $W = \{v \in V | v = \overrightarrow{QP}$ per qualche $P \in S\}$. Vogliamo provare che W è un sottospazio vettoriale di V. Presi $w_1, w_2 \in W$ esistono due punti $P_1, P_2 \in S$ tali che $\overrightarrow{QP_i} = w_i$ per $i = 1, 2$. Sia $v = c_1 w_1 + c_2 w_2$, dobbiamo provare che $v \in W$. Definiamo $P_0 = (1 - c_1 - c_2)Q + c_1 P_1 + c_2 P_2$, per ipotesi $P_0 \in S$. Allora $\overrightarrow{QP_0} = (1 - c_1 - c_2)\overrightarrow{QQ} + c_1 \overrightarrow{QP_1} + c_2 \overrightarrow{QP_2} = 0 + c_1 w_1 + c_2 w_2 = v$ e quindi $v \in W$ come volevamo. Pertanto S è il sottospazio affine passante per Q parallelo a W. □

Notiamo che una combinazione affine di due punti P, Q si può scrivere come $(1 - t)P + tQ$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Si ottiene una parametrizzazione della retta per P e Q.

Il teorema seguente riassume i risultati precedenti e dà un utile criterio per provare che un sottoinsieme S di uno spazio affine $\mathbf{A}$ è un sottospazio affine. Si può esprimere dicendo che S è un sottospazio affine se e solo se per ogni $P, Q \in S$ la retta per P e Q è contenuta in S.

Teorema 11 *Sia* $S \subseteq \mathbf{A}$ *un sottoinsieme dello spazio affine* $\mathbf{A}$*. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) S *è un sottospazio affine.*

(2) per ogni $P_1, \dots P_k \in S$ *e per ogni* $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ *tali che* $\sum_{i=1}^k a_i = 1$ *abbiamo* $\sum_{i=1}^k a_i P_i \in S$

(3) per ogni $P, Q \in S$ *e per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *abbiamo* $(1 - t)P + tQ \in S$

Dimostrazione (1)$\Longrightarrow$ (2) per il Teorema 9. (2)$\Longrightarrow$ (1) per il Teorema 10. (2)$\Longrightarrow$ (3) prendendo $k = 2$. Dimostriamo (3)$\Longrightarrow$ (2) per induzione su k. Il caso $k = 2$ corrisponde all'ipotesi (3). Prendiamo $P_1, \ldots P_k \in S$. Se $k \geq 3$, consideriamo $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^k a_i = 1$. Esiste i tale che $a_i \neq 1$ (se $a_i = 1$ per ogni i sarebbe $\sum_{i=1}^k a_i = k$). Riordinando gli elementi possiamo supporre $a_1 \neq 1$.

Allora

$$\sum_{i=1}^k a_i P_i = a_1 P_1 + (1 - a_1) \sum_{i=2}^k \left(\frac{a_i}{1 - a_1}\right) P_i$$

Notiamo che $\sum_{i=2}^k \left(\frac{a_i}{1-a_1}\right) = \frac{1}{1-a_1} \sum_{i=2}^k a_i = \frac{1}{1-a_1} \cdot (1 - a_1) = 1$ da cui, posto $Q = \sum_{i=2}^k \left(\frac{a_i}{1-a_1}\right) P_i$ abbiamo per ipotesi induttiva $Q \in S$ e quindi $\sum_{i=1}^k a_i P_i = a_1 P_1 + (1 - a_1) Q \in S$ per (3). Questo prova (2) e conclude la dimostrazione. $\square$

Proposizione-Definizione 12 *Siano $P_0, P_1, \ldots P_k \in \mathbf{A}$ punti di uno spazio affine.*

(i) L'insieme di tutte le combinazioni affini di $P_0, \ldots, P_k$ è un sottospazio affine che denotiamo con $\overline{P_0 \ldots P_k}$.

(ii) $\overline{P_0 \ldots P_k}$ è il più piccolo sottospazio affine che contiene $P_0, \ldots, P_k$.

Dimostrazione Per provare che $\overline{P_0 \ldots P_k}$ è un sottospazio affine utilizziamo la condizione (3) del Teorema 11. Siano $P, Q \in \overline{P_0 \ldots P_k}$. Allora esistono scalari a_i, b_i per $i = 1, \ldots, k$ tali che $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^k b_i = 1$ e $P = \sum_{i=1}^k a_i P_i$, $Q = \sum_{i=1}^k b_i P_i$. Pertanto $(1 - t)P + tQ = (1 - t) \sum_{i=1}^k a_i P_i + t \sum_{i=1}^k b_i P_i = \sum_{i=1}^k [(1 - t)a_i + tb_i] P_i$

L'ultima uguaglianza può essere verificata in coordinate. Notiamo che $\sum_{i=1}^k [(1 - t)a_i + tb_i] = (1 - t) \sum_{i=1}^k a_i + t \sum_{i=1}^k b_i = (1 - t) + t = 1$.

Quindi $(1 - t)P + tQ$ è una combinazione affine, da cui $(1 - t)P + tQ \in \overline{P_0 \ldots P_k}$, il che dimostra che $\overline{P_0 \ldots P_k}$ è un sottospazio affine.

Per provare (ii) sia T un sottospazio affine che contiene $P_0, \ldots, P_k$. Sia Q una combinazione affine di $P_0, \ldots, P_k$. Per il teorema 9 $Q \in T$. Segue che $\overline{P_0 \ldots P_k} \subseteq T$. $\square$

Proposizione 13 *Sia $P \in \overline{P_0 \ldots P_k}$. La giacitura di $\overline{P_0 \ldots P_k}$ coincide con $< \overrightarrow{PP_0}, \ldots, \overrightarrow{PP_k} >$.*

Dimostrazione La giacitura W è formata dai vettori $\overrightarrow{PQ}$ con $Q \in \overline{P_0 \ldots P_k}$. Se $Q = \sum_{i=0}^k a_i P_i$ (combinazione affine) allora $\overrightarrow{PQ} = \sum_{i=0}^k a_i \overrightarrow{PP_i}$. Questo prova che $W \subseteq < \overrightarrow{PP_0}, \ldots, \overrightarrow{PP_k} >$. L'inclusione opposta è ovvia. $\square$

Corollario 14 *La giacitura di $\overline{P_0 \ldots P_k}$ coincide con $< \overrightarrow{P_iP_0}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_k} >$ (otteniamo k generatori perché $\overrightarrow{P_iP_i} = 0$ può essere omesso dalla lista). In particolare lo spazio $< \overrightarrow{P_iP_0}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_k} >$ non dipende da i.*

Dimostrazione Scegliamo $P = P_i$ nella proposizione precedente. $\square$

Per il corollario abbiamo che $\dim \overline{P_0 \ldots P_k} \leq k$. Il caso in cui vale l'uguaglianza ha una importanza particolare.

Definizione 15 *$P_0, \dots P_k \in \mathbf{A}$ si dicono indipendenti se* $\dim \overline{P_0 \dots P_k} = k$. *Equivalentemente (per il corollario 14) $P_0, \dots P_k$ si dicono indipendenti se i vettori $\overrightarrow{P_iP_0}, \dots, \overrightarrow{P_iP_k}$ sono indipendenti (sempre per il corollario questa affermazione non dipende da i).*

Altrimenti si dicono dipendenti.

Il significato geometrico della definizione può essere compreso dai primi esempi. Un punto è sempre indipendente. Due punti P_0, P_1 sono indipendenti se e solo se sono distinti. In questo caso $\overline{P_0P_1}$ è la retta per P_0 e P_1.

Tre punti P_0, P_1, P_2 sono indipendenti se e solo se non sono allineati. In questo caso $\overline{P_0P_1P_2}$ è il piano per i tre punti.

Teorema 16 *Siano $P_0, \dots P_k \in \mathbf{A}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) $P_0, \dots P_k$ sono dipendenti.

(2) Uno tra i punti $P_0, \dots P_k$ è combinazione affine dei rimanenti.

Dimostrazione

(1)$\Longrightarrow$ (2) Per ipotesi $\dim < \overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k} >< k$. Pertanto esistono scalari a_i per $i = 1, \dots k$, non tutti nulli, tali che $\sum_{i=1}^k a_i\overrightarrow{P_0P_i} = 0$. Se $\sum_{i=1}^k a_i \neq 0$, dividendo per $\sum_{i=1}^k a_i$ possiamo supporre che $\sum_{i=1}^k a_i = 1$. In tal caso abbiamo $P_0 = \sum_{i=1}^k a_iP_i$, cioè P_0 è combinazione affine di $P_1, \dots, P_k$.

Se $\sum_{i=1}^k a_i = 0$, dobbiamo cambiare il punto P_0.

Scegliamo j tale che $a_j \neq 0$. Rispetto al punto P_j abbiamo $0 = \sum_{i=1}^k a_i\overrightarrow{P_0P_i} = (\sum_{i=1}^k a_i)\overrightarrow{P_0P_j} + \sum_{i=1}^k a_i\overrightarrow{P_jP_i} = \sum_{i=1}^k a_i\overrightarrow{P_jP_i}$

Gli addendi della somma sono in realtà $k-1$ perché per $i = j$ il vettore $\overrightarrow{P_jP_i}$ è nullo.

Quindi abbiamo $0 = \sum_{i=1\dots\hat{j}\dots k} a_i\overrightarrow{P_jP_i}$. Notiamo che $\sum_{i=1\dots\hat{j}\dots k} a_i = \sum_{i=1}^k a_i - a_j = -a_j \neq 0$.

Come sopra, dividendo per $-a_j$ possiamo supporre che $\sum_{i=1\dots\hat{j}\dots k} a_i = 1$.

Pertanto $P_j = \sum_{i=1\dots\hat{j}\dots k} a_iP_i$, cioè P_j è combinazione affine di $P_1, \dots, \widehat{P_j}, \dots P_k$.

(2)$\Longrightarrow$ (1) Possiamo supporre $P_0 = \sum_{i=1}^k a_iP_i$ con $\sum_{i=1}^k a_i = 1$. Allora $0 = \overrightarrow{P_0P_0} = \sum_{i=1}^k a_i\overrightarrow{P_0P_i}$ e quindi i punti sono dipendenti. □

Teorema 17 *Siano $P_0, \dots P_k \in \mathbb{A}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) $P_0, \dots P_k$ sono dipendenti.

(2) Esistono $(c_0, \dots, c_k)$ non tutti nulli tali che $\sum_{i=0}^k c_iP_i = 0$, $\sum_{i=0}^k c_i = 0$.

Dimostrazione

(1)$\Longrightarrow$ (2) Per il teorema precedente, possiamo supporre $P_0 = \sum_{i=1}^k c_iP_i$ con $\sum_{i=1}^k c_i = 1$. Posto $c_0 = -1$ abbiamo la tesi.

(2)$\Longrightarrow$ (1) . Sia $c_j \neq 0$ Moltiplicando tutti i c_i per $\frac{1}{c_j}$ possiamo supporre $c_j = -1$, da cui $\sum_{i=0\dots\hat{j}\dots k} c_i = 1$ e $P_j = \sum_{i=0\dots\hat{j}\dots k} c_iP_i$ come volevamo. □

Il teorema precedente fornisce delle utili espressioni in coordinate.

Ad esempio, dati tre punti $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{A}^2$ per $i = 0, \ldots, 2$ abbiamo che sono allineati (dipendenti) se e solo se esistono (c_0, c_1, c_2) non nulli tali che

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto P_0, P_1, P_2 sono dipendenti se e solo se

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \leq 2$$

se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} = 0$$

3 Morfismi affini

Sia A uno spazio affine su V ed A' uno spazio affine su V'.

Ricordiamo che un morfismo affine è una funzione $f\colon A \to A'$ tale che esiste $\phi\colon V \to V'$ lineare per cui per ogni P, $Q \in A$ vale $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{PQ})$

Proposizione 18 *Sia f un morfismo affine. Le seguenti proprietà sono equivalenti.*

- *i) f è biunivoca.*
- *ii) ϕ è biunivoca.*

Dimostrazione Sia $f(O) = O'$. Considero $P' \in A'$. Se ϕ è suriettiva, abbiamo che esiste unico $v \in V$ tale che $\phi(v) = \overrightarrow{O'P'}$. Esiste anche $P \in A$ tale che $v = \overrightarrow{OP}$. Quindi $\phi(v) = \overrightarrow{f(O)f(P)}$, da cui

$$\overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f(O)P'}$$

e segue $f(P) = P'$, cioè f è suriettiva. Se abbiamo $P' = f(P) = f(Q)$ allora $\phi(\overrightarrow{OP}) = \phi(\overrightarrow{OQ})$ e per l'iniettività di ϕ segue $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ da cui $P = Q$, e quindi f è iniettiva. Il viceversa è analogo ed è lasciato per esercizio. □

Un morfismo affine f biunivoco da A in A si dice affinità.

Le proprietà seguenti, dimostrate per un qualunque morfismo affine, sono vere in particolare anche per le affinità.

Proposizione 19 *Sia f un morfismo affine. Allora f conserva le combinazioni affini, vale a dire per ogni $P_i \in A$ $i = 1, \ldots k$ e per ogni $a_1, \ldots, a_k$ tali che $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$ vale*

$$f(\sum_{i=1}^{k} a_i P_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(P_i)$$

Dimostrazione Sia $Q = \sum_{i=1}^{k} a_i P_i$.
Abbiamo

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{PQ}) = \phi(\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{PP_i}) = \sum_{i=1}^{k} a_i \phi(\overrightarrow{PP_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{f(P)f(P_i)} = \overrightarrow{f(P)R}$$

dove $R = \sum_{i=1}^{k} a_i f(P_i)$
Segue $f(Q) = R$ che è quello che dovevamo dimostrare. $\square$

Corollario 20 *Sia f un morfismo affine e sia $S \subseteq A$ un sottospazio affine. Allora $f(S)$ è un sottospazio affine di A'.*

Dimostrazione Utilizziamo la condizione (3) del Teorema 11. Siano P, $Q \in$, da cui $f(P)$, $f((Q) \in f(S)$. Allora $(1-t)f(P) + tf(Q) = f[(1-t)P + tQ] \in f(S)$ perché per ipotesi S è un sottospazio e $(1-t)P + tQ \in S$. $\square$

Proposizione 21 *Sia $f\colon A \to A'$. Le seguenti proprietà sono equivalenti*

- *i) f è un morfismo affine.*
- *ii) f conserva le combinazioni affini.*

Dimostrazione La proposizione precedente mostra che (i) implica (ii). Proviamo il viceversa. Se vale (ii), fissiamo un punto $O \in A$ e definiamo $\phi\colon V \to V'$ nel modo seguente. Se $v = \overrightarrow{OQ}$ allora $\phi(v) = \overrightarrow{f(O)f(Q)}$. La definizione non dipende da O, infatti se $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{AB}$ abbiamo $B = A + Q - O$ (combinazione affine) da cui $f(B) = f(A) + f(Q) - f(O)$ e segue $\overrightarrow{f(0)f(Q)} = \overrightarrow{f(A)f(B)}$, quindi ϕ è ben definita. Dobbiamo provare che ϕ è lineare. Siano $v, w \in V$, esistono P, $Q \in A$ tali che $v = \overrightarrow{OP}$, $w = \overrightarrow{OQ}$.
Segue

$$\phi(c_1 v + c_2 w) = \phi(c_1\overrightarrow{OP} + c_2\overrightarrow{OQ} + (1 - c_1 - c_2)\overrightarrow{OO}) = \phi(\overrightarrow{OR})$$

dove $R = c_1 P + c_2 Q + (1 - c_1 - c_2)O$
Quindi

$$\phi(\overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{f(O)f(R)} = \overrightarrow{f(O)\,[c_1 f(P) + c_2 f(Q) + (1 - c_1 - c_2)f(O)]} =$$

$$= c_1\overrightarrow{f(O)f(P)} + c_2\overrightarrow{f(O)f(Q)} + \overrightarrow{0} = c_1\phi(v) + c_2\phi(w)$$

come volevamo dimostrare.
Esercizio Sia $f\colon A \to A'$. Provare che le seguenti proprietà sono equivalenti

- i) f è un morfismo affine.
- ii) Per ogni P, $Q \in A$ e per ogni $t \in \mathbf{R}$ vale $f[(1-t)P + tQ] = (1-t)f(P) + tf(Q)$

Suggerimento: (i)$\Longrightarrow$ (ii) è un caso particolare della proposizione precedente. Per provare (ii)$\Longrightarrow$ (i), si provi (ii) della proposizione precedente, per induzione, come nel Teorema 11.