



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di
Scienze Matematiche
Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in
Matematica

IL TEOREMA DI BORSUK-ULAM E APPLICAZIONI

The Borsuk-Ulam Theorem and applications

Candidata:
Elena Zampoli

Relatore:
Giorgio Ottaviani

Anno Accademico 2013/2014

Indice

Introduzione	1
1 Il teorema di Borsuk-Ulam	1
2 Alcune applicazioni	7
2.1 Partizioni di insiemi mediante iperpiani	7
2.2 Il teorema di Lyusternik e Shnirel'man	9
2.3 Il teorema di Lovász-Kneser	10
Bibliografia	12

Introduzione

Il teorema di Borsuk-Ulam deve il suo nome ai matematici Stanislaw Ulam, che congetturò il teorema, e a Karol Borsuk che lo dimostrò nel 1933.¹ Sebbene sia un risultato tipico della topologia algebrica, il teorema di Borsuk-Ulam richiede ipotesi assai poco restrittive che gli permettono di trovare applicazione in molti altri contesti. In questo modo il teorema di Borsuk-Ulam si rivela uno dei principali strumenti offerti dalla topologia algebrica.

1 Il teorema di Borsuk-Ulam

Tra le innumerevoli formulazioni del teorema di Borsuk-Ulam² ci si prefigge di dimostrare la versione seguente:

Teorema (di Borsuk-Ulam). *Non esiste alcuna funzione continua $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$ tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^n$.*

Tale risultato è scontato per $n = 1$, in quanto ogni applicazione $f: S^1 \rightarrow S^0$ che soddisfa $f(-x) = -f(x)$ è suriettiva ma, poiché S^1 è connesso mentre S^0 non lo è, f non potrebbe essere continua.

Mentre già per $n = 2$ la dimostrazione del teorema di Borsuk-Ulam richiede l'utilizzo di strumenti topologici più affinati che sono alla base della topologia algebrica, quali la nozione di gruppo fondamentale e di rivestimento.

In particolare nella dimostrazione seguente il vantaggio offerto dalla topologia algebrica risiede nel considerare la retta reale un rivestimento a infiniti fogli della circonferenza tramite l'applicazione $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(s) = e^{2\pi i s} = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$.

Dimostrazione per $n=2$. Si suppone per assurdo che esista una funzione $f: S^2 \rightarrow S^1$ tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^2$.

Si considera il laccio η che percorre l'equatore della sfera S^2 in senso antiorario:

$$\begin{aligned} \eta: I &\rightarrow S^2 \\ s &\mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0) \end{aligned}$$

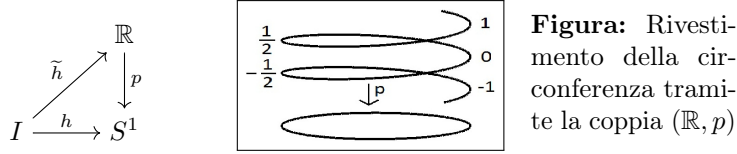
¹Borsuk nel suo lavoro dal titolo *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, pubblicato nel 1933, riportava una nota in calce al teorema nella quale attribuiva a St. Ulam la formulazione della congettura.

²Lo stesso Karol Borsuk aveva presentato nel suo lavoro più formulazioni del teorema.

Per il laccio h ottenuto componendo le funzioni η e f si ottiene la relazione seguente:

$$\begin{aligned} h(s + \frac{1}{2}) &= f(\eta(s + \frac{1}{2})) = f(\cos 2\pi(s + \frac{1}{2}), \sin 2\pi(s + \frac{1}{2}), 0) \\ &= f(\cos(2\pi s + \pi), \sin(2\pi s + \pi), 0) = f(-\cos 2\pi s, -\sin 2\pi s, 0) \\ &= f(-\eta(s)) = -f(\eta(s)) = -h(s) \quad \forall s \in [0, \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

Si considera il sollevamento $\tilde{h}: I \rightarrow \mathbb{R}$, con punto iniziale $\tilde{h}(0)$ scelto arbitrariamente in $p^{-1}(h(0))$, la cui esistenza e unicità è garantita dal teorema di sollevamento dei cammini dimostrato in [1, p.88].



Dalla relazione valida per h ne consegue un'altra per il sollevamento \tilde{h} :

$$\begin{aligned} (\cos 2\pi\tilde{h}(s + \frac{1}{2}), \sin 2\pi\tilde{h}(s + \frac{1}{2})) &= e^{2\pi i\tilde{h}(s + \frac{1}{2})} = p(\tilde{h}(s + \frac{1}{2})) = h(s + \frac{1}{2}) \\ &= -h(s) = -p(\tilde{h}(s)) = -e^{2\pi i\tilde{h}(s)} \\ &= -(\cos 2\pi\tilde{h}(s), \sin 2\pi\tilde{h}(s)) \end{aligned}$$

per cui risulta

$$2\pi\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = 2\pi\tilde{h}(s) + \pi q$$

cioè

$$\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) = \tilde{h}(s) + \frac{q}{2}$$

dove q è un intero dispari che potrebbe dipendere da s , essendo stato trovato per s fissato.

Comunque osservando che q assume solo valori discreti e che vale la relazione $q = 2[\tilde{h}(s + \frac{1}{2}) - \tilde{h}(s)]$ si conclude che q deve essere indipendente da s .

In particolare q è lo stesso sia quando s vale $\frac{1}{2}$, sia quando s vale 0:

$$\tilde{h}(1) = \tilde{h}(\frac{1}{2}) + \frac{q}{2} = \tilde{h}(0) + q$$

Essendo q un intero dispari, il punto iniziale $\tilde{h}(0)$ e il punto finale $\tilde{h}(1)$ del sollevamento \tilde{h} del laccio h in S^1 non coincidono:

$$\tilde{h}(0) \neq \tilde{h}(1)$$

Quindi h , avendo un sollevamento \tilde{h} con lo stesso punto iniziale ma diverso punto finale del laccio costante, dovrà appartenere a una classe di omotopia diversa da quella banale, in quanto, per il lemma di monodromia, dimostrato in [1, p.89], due cammini i cui sollevamenti hanno lo stesso punto iniziale ma punti finali diversi, non appartengono alla stessa classe di omotopia.

D'altra parte f , in quanto applicazione continua tra spazi topologici, induce un omomorfismo tra i gruppi fondamentali dei rispettivi spazi:

$$f_*: \pi_1(S^2) \rightarrow \pi_1(S^1)$$

comunque, essendo $\pi_1(S^2) = \{0\}$, questo omomorfismo si riduce a quello banale

$$[h] = [f \circ \eta] = f_*([\eta]) = 0$$

Questo contraddice il fatto che h non appartiene alla stessa classe di omotopia del laccio costante. La contraddizione è sorta dall'esistenza di una funzione $f: S^2 \rightarrow S^1$ tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^2$. Quindi tale funzione non esiste. \square

Nota. Un'altra dimostrazione di natura topologica del teorema di Borsuk-Ulam per $n = 2$ è riportata in [3, p.178]. In tale dimostrazione, come in quella appena svolta, l'esistenza della funzione $f: S^2 \rightarrow S^1$ con le caratteristiche indicate dal teorema porta ad un assurdo: tale funzione permette di definire una nuova applicazione, su uno spazio topologico con gruppo fondamentale banale, che ha come immagine un cammino non omotopo a quello costante.

Seppur simili, la differenza sostanziale tra le due dimostrazioni consiste nella scelta degli spazi di rivestimento: diversamente da quanto assunto in precedenza, la circonferenza non viene rivestita con la retta reale, ma viene considerata essa stessa rivestimento della retta proiettiva tramite l'applicazione $p: S^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $p(x) = [x]$.

Per n qualsiasi, il teorema di Borsuk-Ulam si ottiene come conseguenza di un risultato più generale, che stabilisce che tipo di valori sono compatibili con il grado di una funzione dispari:

Teorema. *Ogni applicazione continua $f: S^n \rightarrow S^n$ tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^n$, ha grado dispari.*

Nella dimostrazione di questo risultato si rivela utile l'impiego dei gruppi di omologia a coefficienti in \mathbb{Z}_2 . Questi gruppi si ottengono considerando come gruppi di catene i gruppi abeliani liberi generati da catene, che invece di avere coefficienti in \mathbb{Z} , hanno coefficienti in \mathbb{Z}_2 .

Dimostrazione. Si considera S^n come rivestimento a due fogli dello spazio proiettivo. A partire dall'applicazione $p: S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, $p(x) = [x]$ sarà definita una nuova applicazione $\tau: \mathbb{P}^n \rightarrow S^n$ in modo tale da ottenere la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow C_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_i(S^n, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_\#} C_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

Affinché la successione sia esatta è necessario che l'immagine di ogni funzione della catena sia uguale al nucleo della successiva, cioè che $p_\#$ sia suriettiva, τ iniettiva e che $\ker p_\# = \text{Im } \tau$.

L'applicazione $p_\#$ è suriettiva in quanto, per il criterio di sollevamento, presente sia in [2, p.61] che in [1, p.95], ogni simpleso $\sigma: \Delta^i \rightarrow \mathbb{P}^n$ ha almeno un sollevamento $\tilde{\sigma}: \Delta^i \rightarrow S^n$ dato che Δ^i è semplicemente connesso.

Per calcolare il nucleo di $p_\#$ si osserva che il numero di sollevamenti dipende dal numero di fogli del rivestimento: poiché S^n è un rivestimento a due fogli

dello spazio proiettivo \mathbb{P}^n , ogni sempliceo $\sigma: \Delta^i \rightarrow \mathbb{P}^n$ ha esattamente due sollevamenti $\tilde{\sigma}_1: \Delta^i \rightarrow S^n$ e $\tilde{\sigma}_2: \Delta^i \rightarrow S^n$. L'utilizzo dei coefficienti in \mathbb{Z}_2 permette di concludere che la somma dei due sollevamenti di σ è un elemento del nucleo di $p_\#$:

$$p_\#(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2) = p_\#(\tilde{\sigma}_1) + p_\#(\tilde{\sigma}_2) = \sigma + \sigma = 0$$

Quindi il nucleo di $p_\#$ è generato dalle somme dei sollevamenti $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$ di semplici $\sigma: \Delta^i \rightarrow \mathbb{P}^n$.

A questo punto si definisce τ come l'applicazione che a ogni sempliceo $\sigma: \Delta^i \rightarrow \mathbb{P}^n$ associa la somma dei sollevamenti $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$. L'applicazione τ , così definita, completa la successione esatta corta in quanto è iniettiva e la sua immagine coincide con il nucleo di $p_\#$.

Dato che τ e $p_\#$ commutano con le applicazioni bordo, scrivendo per ogni i le successioni esatte corte verticalmente, piuttosto che orizzontalmente, si ottiene la successione esatta corta di complessi di catene:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & \cdots \\ & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1}(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & \cdots \\ & & \downarrow p_\# & & \downarrow p_\# & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Da questa successione esatta corta di complessi di catene, attraverso la cosiddetta procedura di caccia al diagramma, si ottiene la successione esatta lunga di gruppi di omologia:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{p_*} & H_{n+1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} \\ & & & & & & & \\ & & \xrightarrow{p_*} & H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & H_{n-1}(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} & \cdots \\ & & & & & & & & & \\ \cdots & \xrightarrow{\tau_*} & H_i(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} & H_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_i} & H_{i-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & H_{i-1}(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} & \cdots \\ & & & & & & & & & & \\ \cdots & \xrightarrow{\tau_*} & H_1(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} & H_1(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_1} & H_0(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} \\ & & & & & & \xrightarrow{\tau_*} & H_0(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} & H_0(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tutti i gruppi di omologia presenti nella successione esatta lunga sono noti:

$$H_i(S^n, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se } i = 0, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad H_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se } i = 0, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I gruppi di omologia possono essere sostituiti nella successione esatta lunga per ottenere informazioni sulle applicazioni ∂_i e τ_* .

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{p_*} & 0 & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\tau_*} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{p_*} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\partial_n} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\tau_*} & 0 & \xrightarrow{p_*} & \cdots \\
& & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & \cdots & \xrightarrow{\tau_*} & 0 & \xrightarrow{p_*} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\partial_i} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\tau_*} & 0 & \xrightarrow{p_*} & \cdots \\
& & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & \cdots & \xrightarrow{\tau_*} & 0 & \xrightarrow{p_*} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\partial_1} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\tau_*} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{p_*} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Per l'esattezza della successione, l'applicazione ∂_i è isomorfismo per ogni $1 \leq i \leq n$ mentre l'applicazione indotta da τ è isomorfismo solo tra i gruppi $H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2)$ e $H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$.

Per sfruttare le informazioni raccolte sulle funzioni ∂_i e τ_* è necessario ricorrere alle ipotesi fatte su f . La possibilità di supporre $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^n$ permette di definire la funzione $\bar{f}: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ ponendo $\bar{f}([x]) = [f(x)]$. Tale funzione è ben definita in quanto dati x e y in S^n con $[x] = [y]$ se $x = y$ allora $\bar{f}([x]) = [f(x)] = [f(y)] = \bar{f}([y])$ mentre se $x = -y$ risulta $\bar{f}([x]) = [f(x)] = [f(-y)] = [-f(y)] = [f(y)] = \bar{f}([y])$.

Le funzioni f e \bar{f} inducono delle applicazioni tra i gruppi di catene delle successioni esatte corte:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_\#} & C_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \bar{f}_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow \bar{f}_\# & & \\
0 & \longrightarrow & C_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_\#} & C_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

In questo diagramma il quadrato di destra commuta in quanto per ogni simpleso $\sigma: \Delta^i \rightarrow \mathbb{P}^n$ risulta:

$$\begin{aligned}
\bar{f}_\#(p_\#(\sigma))(t_0, \dots, t_i) &= \bar{f}\left(p(\sigma(t_0, \dots, t_i))\right) = \bar{f}([\sigma(t_0, \dots, t_i)]) \\
&= [f(\sigma(t_0, \dots, t_i))] = p\left(f(\sigma(t_0, \dots, t_i))\right) \\
&= p_\#(f_\#(\sigma))(t_0, \dots, t_i) \quad \forall (t_0, \dots, t_i) \in \Delta^i
\end{aligned}$$

Mentre per mostrare che anche il quadrato di sinistra è commutativo si considera un simpleso $\sigma: \Delta^i \rightarrow \mathbb{P}^n$. Se $\tilde{\sigma}_1: \Delta^i \rightarrow S^n$ e $\tilde{\sigma}_2: \Delta^i \rightarrow S^n$ sono i suoi due sollevamenti, allora $f_\#(\tilde{\sigma}_1)$ e $f_\#(\tilde{\sigma}_2)$ sono due sollevamenti di $\bar{f}_\#(\sigma)$ infatti per $k = 1, 2$ si ha:

$$\begin{aligned}
p(f_\#(\tilde{\sigma}_k)(t_0, \dots, t_i)) &= p\left(f(\tilde{\sigma}_k(t_0, \dots, t_i))\right) = [f(\tilde{\sigma}_k(t_0, \dots, t_i))] \\
&= \bar{f}([\tilde{\sigma}_k(t_0, \dots, t_i)]) = \bar{f}\left(p(\tilde{\sigma}_k(t_0, \dots, t_i))\right) \\
&= \bar{f}(\sigma(t_0, \dots, t_i)) = \bar{f}_\#(\sigma)(t_0, \dots, t_i) \quad \forall (t_0, \dots, t_i) \in \Delta^i
\end{aligned}$$

A questo punto si può verificare che anche il quadrato di sinistra è commutativo:

$$f_\#(\tau(\sigma)) = f_\#(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2) = f_\#(\tilde{\sigma}_1) + f_\#(\tilde{\sigma}_2) = \tau(\bar{f}_\#(\sigma))$$

Estendendo alla successione esatta lunga il diagramma costruito per la successione esatta corta, si ottengono in particolare i seguenti diagrammi:

$$\begin{array}{ccc}
H_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_i} & H_{i-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & & H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) \\
\downarrow \bar{f}_* & & \downarrow \bar{f}_* & 1 \leq i \leq n & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* \\
H_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_i} & H_{i-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & & H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)
\end{array}$$

Per mostrare che $\bar{f}_\#$ induce un isomorfismo tra i gruppi di omologia a coefficienti in \mathbb{Z}_2 dello spazio proiettivo \mathbb{P}^n si procede per induzione su i .

L'applicazione $\bar{f}_*: H_0(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_0(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2)$ è isomorfismo perché \bar{f} , in quanto continua, induce una biezione tra componenti connesse.

Sfruttando il fatto evidente che se tre applicazioni in un diagramma commutativo sono isomorfismi lo è anche la quarta, si conclude che $\bar{f}_*: H_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2)$ è isomorfismo per ogni $1 \leq i \leq n$.

Dal fatto che $\bar{f}_*: H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2)$ è un isomorfismo, applicando al secondo diagramma le stesse argomentazioni addotte per il primo diagramma, si deduce che l'applicazione $f_*: H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$ è isomorfismo.

Se l'applicazione f avesse grado pari, f_* sarebbe l'applicazione nulla in quanto, come dimostrato in [2, p.154], f_* è la moltiplicazione per il grado di f modulo 2. Dunque f ha grado dispari. \square

Questo risultato asserisce molto più di quanto necessario per provare il teorema di Borsuk-Ulam. In realtà, per la dimostrazione del teorema, sarà sufficiente tenere presente che funzioni dispari non possono avere grado zero.

Dimostrazione (Borsuk-Ulam). Si suppone per assurdo che esista una funzione $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$ tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^n$. Per il risultato precedente la restrizione di f alla sfera $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n, 0) \in S^n\}$ ha grado dispari.

D'altra parte $f|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ ha grado 0 in quanto è omotopa ad una costante:

$$F: S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-1}$$

$$(x_1, \dots, x_n, t) \mapsto f(tx_1, \dots, tx_n, \sqrt{1-t^2})$$

L'applicazione F costituisce l'omotopia cercata in quanto è continua e risulta:

$$F(x_1, \dots, x_n, 0) = f(0, \dots, 0, 1) = c_{f(0, \dots, 0, 1)}(x_1, \dots, x_n)$$

$$F(x_1, \dots, x_n, 1) = f(x_1, \dots, x_n, 0) = f|_{S^{n-1}}(x_1, \dots, x_n)$$

\square

Come anticipato inizialmente, del teorema di Borsuk-Ulam esistono altre formulazioni diverse da quella appena dimostrata.

Proposizione. *Le seguenti affermazioni:*

- (1) *Non esiste alcuna applicazione continua $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$ tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^n$.*
- (2) *Ogni applicazione continua $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ammette almeno un punto $x \in S^n$ tale che $f(-x) = f(x)$.*
- (3) *Ogni applicazione continua $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^n$ ammette almeno un punto $x \in S^n$ tale che $f(x) = 0$.*

sono equivalenti.

Dimostrazione. **(1) \implies (2)** Se per assurdo esistesse una applicazione continua $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $f(-x) \neq f(x)$ per ogni $x \in S^n$, si potrebbe definire la funzione continua $g: S^n \rightarrow S^{n-1}$, $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$ che soddisfa $g(-x) = -g(x)$ per ogni $x \in S^n$, contro **(1)**.

(2) \implies (3) La funzione $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ data in **(3)** soddisfa le ipotesi di **(2)**, quindi ammette un punto $x \in S^n$ tale che $f(-x) = f(x)$. Poichè f soddisfa anche la relazione $f(-x) = -f(x)$, f deve annullarsi in x .

(3) \implies (1) Essendo $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, **(3)** impedisce la costruzione di una funzione continua $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^n$ con $f(S^n) \subseteq S^{n-1}$. \square

La dimostrazione, data prima per $n = 2$ e poi nel caso generale, della prima delle tre formulazioni del teorema di Borsuk-Ulam sopra riportate, conferisce validità anche alle affermazioni **(2)** e **(3)**.

Osservazioni. La formulazione **(2)** si rivela interessante soprattutto dal punto di vista fisico: approssimando la terra a una sfera perfetta e assumendo come continua la funzione che a ogni punto della superficie terrestre associa la coppia di valori data da pressione e temperatura, il teorema di Borsuk-Ulam per $n = 2$ garantisce l'esistenza, per ogni istante di tempo, di una coppia di punti antipodali in cui pressione e temperatura sono le stesse.

Inoltre, sempre per la seconda formulazione del teorema di Borsuk-Ulam, la sfera S^n non è omeomorfa ad alcun sottospazio di \mathbb{R}^n , in quanto **(2)** preclude l'esistenza di funzioni continue e iniettive da S^n in \mathbb{R}^n .

2 Alcune applicazioni

2.1 Partizioni di insiemi mediante iperpiani

Teorema (del panino al prosciutto). *Dati n compatti $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ esiste un iperpiano che divide ognuno di essi in due parti di ugual misura.*

Il nome di tale teorema è dovuto all'interpretazione che si ha per $n = 3$: come tre insiemi possono essere divisi da un iperpiano in modo tale che ciascuno dei due semispazi aperti contenga parte di ciascun insieme in ugual misura, nello stesso modo un panino al prosciutto, formato da due fette di pane e una di prosciutto, può essere diviso con un taglio netto in modo che il prosciutto e il pane contenuto nelle rispettive fette si trovino in uguale quantità nelle due parti in cui è diviso il panino.

Dimostrazione. Dato che gli insiemi A_1, \dots, A_n , in quanto compatti, sono limitati è sempre possibile, a meno di cambiare unità di misura, supporre che siano contenuti all'interno della sfera unitaria S^{n-1} .

Fissato un punto x della sfera unitaria S^{n-1} , si considera il diametro D_x di S^{n-1} che congiunge x con $-x$. L'iperpiano $P_t(x)$ perpendicolare a D_x che lo interseca a distanza t da x divide ogni A_i in due parti: si indica con A_i' la parte di A_i ottenuta dall'intersezione con il semispazio contenente x e con A_i'' la rimanente parte di A_i . Per ogni $x \in S^{n-1}$ fissato, si definiscono le applicazioni $f_{A_i'}$ e $f_{A_i''}$

che per ogni $t \in [0, 1]$ associano rispettivamente le misure degli insiemi A'_i e A''_i :

$$\begin{array}{ll} f_{A'_i} : I \rightarrow \mathbb{R} & f_{A''_i} : I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto m(A'_i) & t \mapsto m(A''_i) \end{array}$$

Essendo $f_{A'_i}$ crescente e $f_{A''_i}$ decrescente, la funzione differenza

$$\begin{array}{l} f_{A_i} : I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f_{A'_i}(t) - f_{A''_i}(t) \end{array}$$

risulta crescente. Inoltre ogni f_{A_i} assume valori opposti agli estremi dell'intervallo:

$$\begin{aligned} f_{A_i}(0) &= f_{A'_i}(0) - f_{A''_i}(0) = -f_{A''_i}(0) = -m(A_i) = -f_{A'_i}(1) = -f_{A'_i}(1) + f_{A''_i}(1) \\ &= -(f_{A'_i}(1) - f_{A''_i}(1)) = -f_{A_i}(1) \end{aligned}$$

Essendo ogni f_{A_i} anche continua, in quanto lo sono le funzioni $f_{A'_i}$ e $f_{A''_i}$, si conclude che ogni funzione f_{A_i} si dovrà annullare in un punto o in un intervallo. A seconda dei due casi possibili, con $\alpha_i(x)$ si indica o l'unico punto di I in cui f_{A_i} si annulla o il punto medio dell'intervallo in cui f_{A_i} si annulla.

In questo modo, per ogni $x \in S^{n-1}$ risulta determinato il valore $\alpha_i(x)$ per cui l'iperpiano $P_{\alpha_i(x)}(x)$ divide il compatto A_i in due parti di ugual misura. Ogni funzione α_i è continua e soddisfa la relazione $\alpha_i(-x) = 1 - \alpha_i(x)$ in quanto, in $-x$, $f_{A'_i}$ e $f_{A''_i}$ si scambiano tra loro. La funzione

$$\begin{array}{l} f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ x \mapsto (\alpha_1(x) - \alpha_2(x), \dots, \alpha_1(x) - \alpha_n(x)) \end{array}$$

è continua perché $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono continue e risulta:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (\alpha_1(-x) - \alpha_2(-x), \dots, \alpha_1(-x) - \alpha_n(-x)) \\ &= (1 - \alpha_1(x) - (1 - \alpha_2(x)), \dots, 1 - \alpha_1(x) - (1 - \alpha_n(x))) \\ &= (-\alpha_1(x) + \alpha_2(x), \dots, -\alpha_1(x) + \alpha_n(x)) \\ &= -(\alpha_1(x) - \alpha_2(x), \dots, \alpha_1(x) - \alpha_n(x)) = -f(x) \end{aligned}$$

Per la formulazione **(3)** del teorema di Borsuk-Ulam, esiste almeno un punto in cui la funzione f si annulla. Detto y tale punto, risulta:

$$\alpha_1(y) = \alpha_2(y) = \dots = \alpha_n(y)$$

Pertanto l'iperpiano $P_{\alpha_1(y)}(y)$ divide ogni compatto A_i in due parti di ugual misura. \square

Teorema. *Dati n insiemi $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$, ciascuno formato da un numero finito di punti, esiste un iperpiano che biseca ogni insieme A_i , cioè che divide \mathbb{R}^n in modo tale che ciascun semispazio aperto contenga al più $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ punti di ciascun insieme A_i .*

Dimostrazione. In primo luogo si suppone che gli insiemi A_i non abbiano punti in comune, che ciascun A_i contenga un numero dispari di punti e che non più di n punti contenuti nell'unione degli A_i si trovino sullo stesso iperpiano.

Indicato con A_i^ϵ l'insieme che si ottiene sostituendo a ogni punto di A_i la palla di raggio ϵ centrata in tale punto, si sceglie $\epsilon > 0$ in modo tale che non più di n palle possano essere intersecate dallo stesso iperpiano.

Applicando il teorema del panino al prosciutto si ottiene l'esistenza di un iperpiano h che divide ciascun A_i^ϵ in due parti di ugual misura.

Poiché ogni A_i^ϵ ha un numero dispari di palle, h deve intersecare almeno una di esse, inoltre, poiché lo stesso iperpiano interseca al più n palle, n sarà l'esatto numero di palle intersecato dall'iperpiano h .

Per di più, poiché h divide esattamente a metà le palle che interseca, h passa attraverso il loro centro. Quindi l'iperpiano h biseca ogni insieme A_i .

Ora si suppone di nuovo che gli A_i contengano un numero dispari di punti, ma non si richiedono più ipotesi aggiuntive sulla posizione dei loro punti.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si considera l'insieme $A_{i,k}$ ottenuto da A_i muovendo ogni punto di A_i al massimo di una distanza $\frac{1}{k}$ in modo tale che gli insiemi $A_{i,k}$ non abbiano punti in comune e che non più di n punti contenuti nell'unione degli $A_{i,k}$ si trovino sullo stesso iperpiano. Per quanto dimostrato nel caso precedente, per ogni $k \in \mathbb{N}$ è possibile trovare un iperpiano h_k che biseca ciascun $A_{i,k}$. Scrivendo per ogni $k \in \mathbb{N}$ tale iperpiano nella forma cartesiana $h_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_k, x \rangle = b_k\}$, con a_k un vettore unitario, si osserva che lo scalare b_k appartiene a un intervallo limitato indipendente da k . Dunque la successione $\{(a_k, b_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ risulta contenuta in un compatto ed è quindi possibile estrarre una sottosuccessione $\{(a_{k_j}, b_{k_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente a un punto (a, b) di \mathbb{R}^{n+1} . Poiché un punto x che giace a una distanza δ dall'iperpiano $h = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = b\}$ rimane a una distanza di almeno $\frac{1}{2}\delta$ da h_{k_j} per j sufficientemente grande, allora se il semispazio aperto determinato da h contiene almeno q elementi di A_i , per j sufficientemente grande, il corrispondente semispazio aperto individuato da h_{k_j} contiene almeno q punti di A_{i,k_j} . Inoltre considerando per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'unico punto di A_{i,k_j} che si trova sull'iperpiano h_{k_j} si individua una successione che tende a un punto di h . Dunque h biseca ogni A_i .

Infine nel caso in cui qualche insieme A_i abbia un numero pari di punti è possibile ricondursi al caso precedente cancellando arbitrariamente un punto da ciascun insieme di pari cardinalità. L'iperpiano determinato in tale circostanza, anche riaggiungendo i punti tolti, continua a dividere \mathbb{R}^n in due semispazi, ciascuno dei quali contiene al suo interno al più $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$ punti di ciascun insieme A_i . \square

2.2 Il teorema di Lyusternik e Shnirel'man

Teorema (di Lyusternik e Shnirel'man). *Se S^n è unione di $n+1$ insiemi chiusi A_1, \dots, A_{n+1} , allora almeno uno di essi contiene una coppia di punti antipodali.*

Dimostrazione. Per ogni punto x della sfera S^n si considera la sua distanza da ciascun aperto A_i : $d_i(x) = \inf_{y \in A_i} |x - y|$. Applicando il teorema di Borsuk-Ulam alla funzione $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = (d_1(x), \dots, d_n(x))$ si ottiene l'esistenza di una coppia di punti antipodali x e $-x$ tali che $d_i(x) = d_i(-x)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Se almeno una delle quantità $d_1(x), \dots, d_n(x)$ è nulla, allora x e $-x$ appartengono entrambi a uno degli insiemi A_1, \dots, A_n . Mentre se nessuna delle quantità $d_1(x), \dots, d_n(x)$ è annulla, allora x e $-x$ appartengono entrambi all'insieme A_{n+1} . \square

Il teorema di Lyusternik e Shnirel'man rimane valido per ricoprimenti formati sia da insiemi aperti che chiusi.

Teorema (di Lyusternik e Shnirel'man generalizzato). *Se S^n è unione di $n + 1$ insiemi A_1, \dots, A_{n+1} , ciascuno dei quali aperto o chiuso, allora almeno uno di essi contiene una coppia di punti antipodali.*

Dimostrazione. In primo luogo si considera il caso in cui ogni insieme A_i sia aperto. In questo caso, per ogni $x \in S^n$ esiste un intorno V_x la cui chiusura è contenuta in un A_i . Essendo l'insieme dei V_x un ricoprimento aperto del compatto S^n , è possibile estrarre un numero finito di intorni V_{x_j} la cui unione è ancora S^n .

Poiché gli $n + 1$ insiemi $K_i = \bigcup_{\overline{V_{x_j} \subset A_i}} \overline{V_{x_j}}$ soddisfano le ipotesi del teorema di Lyusternik e Shnirel'man, almeno uno tra gli insiemi K_i contiene una coppia di punti antipodali. In quanto $K_i \subset A_i$, si è determinato l'insieme A_i che contiene la coppia di punti antipodali.

Nel caso in cui non tutti gli insiemi A_i siano aperti, fissato $k \in \mathbb{N}$ si considera il ricoprimento aperto di S^n che si ottiene sostituendo a ciascun insieme chiuso A_i l'insieme aperto

$$U_i^k = \{x \in S^n : \text{dist}(x, A_i) < \frac{1}{k}\}$$

Applicando quanto dimostrato nel caso precedente per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ottiene l'esistenza di una successione di insiemi F_k del ricoprimento contenente una coppia di punti antipodali. Dato che, se per qualche $k \in \mathbb{N}$ uno degli aperti A_i coincidesse con F_k , tale insieme costituirebbe l'insieme richiesto dal teorema, si può supporre che la successione $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sia formata esclusivamente dagli insiemi U_i^k .

Poiché il numero di insiemi che formano il ricoprimento è finito, esiste un $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ per cui l'insieme U_i^k compare nella successione $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ infinite volte. Estratta la successione $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ degli indici per cui $U_i^{k_j} \in \{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, la sottosuccessione x_{k_j} , formata da punti di $U_i^{k_j}$ il cui antipodale è ancora contenuto nell'insieme, verifica la relazione:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}(x_{k_j}, A_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}(-x_{k_j}, A_i) = 0$$

Dato che S^n è compatto, è possibile estrarre da $\{x_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sottosuccessione convergente. Il limite di questa sottosuccessione converge ad un punto x di A_i in quanto A_i è chiuso. Dunque x e $-x$ costituiscono la coppia antipodale richiesta. \square

2.3 Il teorema di Lovász-Kneser

I risultati della sezione precedente ottenuti con metodi topologici trovano applicazione anche in combinatoria e nella teoria dei grafi.

In particolare il teorema di Lyusternik e Shnirel'man generalizzato risulterà utile nella dimostrazione del teorema di Lovász-Kneser, permettendo di determinare il numero cromatico di un particolare grafo, detto grafo di Kneser.

Definizione. Posto $[n] = \{1, \dots, n\}$, il grafo di Kneser $KG_{n,k}$ ha come vertici i sottoinsiemi di $[n]$ di ordine k e come archi le coppie di vertici formate da insiemi

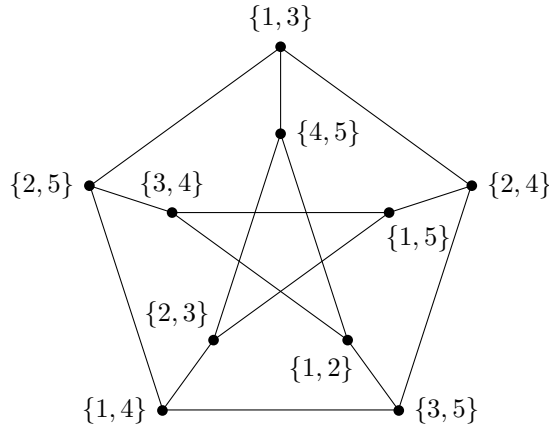
disgiunti. In simboli:

$$KG_{n,k} = \left(\binom{[n]}{k}, \{ \{F_1, F_2\} : F_1, F_2 \in \binom{[n]}{k}, F_1 \cap F_2 = \emptyset \} \right)$$

In seguito, seguendo le notazioni del testo [5], si indicherà con $\chi(G)$ il numero cromatico di un grafo G , cioè il minimo numero di colori che servono per ottenere una colorazione del grafo in cui vertici adiacenti hanno colore diverso.

Esempi. Particolarmente interessanti sono i grafi di Kneser $KG_{n,k}$ che si ottengono per alcuni valori di n e k :

- Per $k = 1$ il corrispondente grafo di Kneser, $KG_{n,1}$ è formato da n vertici a due a due collegati da un arco. Essendo necessario un colore per ciascun vertice, risulta $\chi(KG_{n,1}) = n$.
- Il grafo di Kneser $KG_{2k-1,k}$, ottenuto ponendo $n = 2k - 1$, non ha archi, in quanto i sottoinsiemi di ordine k contenuti in $[2k - 1]$ non possono essere disgiunti. Potendo assegnare a tutti i vertici del grafo lo stesso colore, risulta $\chi(KG_{2k-1,k}) = 1$.
- Nel grafo $KG_{2k,k}$ i soli archi presenti connettono i vertici corrispondenti agli insiemi di ordine k che sono l'uno il complementare dell'altro. In questo caso risulta $\chi(KG_{2k,k}) = 2$, in quanto basta assegnare i soli due colori disponibili alle coppie di vertici adiacenti.
- Infine per $n = 5$ e $k = 2$ il grafo di Kneser $KG_{5,2}$ è costituito da 10 vertici e 15 archi:



Per questo grafo, noto anche come *grafo di Petersen*, si verifica direttamente che $\chi(KG_{5,2}) = 3$.

Essendo per $n \leq 2k - 1$, come nel secondo esempio, $\chi(KG_{n,k}) = 1$, il teorema seguente, che stabilisce il valore della quantità $\chi(KG_{n,k})$ per $n \geq 2k - 1$, completa la descrizione del numero cromatico del grafo di Kneser $KG_{n,k}$.

Teorema (di Lovász-Kneser). *Per tutti i $k > 0$ e $n \geq 2k - 1$, il numero cromatico del grafo di Kneser, $\chi(KG_{n,k})$, è $n - 2k + 2$.*

Dimostrazione. Per mostrare che il numero cromatico del grafo di Kneser non può superare $n - 2k + 2$, è sufficiente trovare una colorazione del grafo con esattamente $n - 2k + 2$ colori. A tale scopo si assegna ad ogni vertice F del grafo di Kneser il colore indicato o dal numero minimo degli elementi presenti in F se questo numero non supera $n - 2k + 2$ o $n - 2k + 2$ altrimenti:

$$\chi(F) = \min\{\min(F), n - 2k + 2\}$$

La colorazione così ottenuta è una buona colorazione in quanto se due vertici F_1 e F_2 del grafo di Kneser hanno lo stesso colore $\chi(F_1) = \chi(F_2) = i < n - 2k + 2$ allora non possono essere collegati da un arco, dato che F_1 e F_2 in qualità di sottoinsiemi di $[n]$ non sono disgiunti. Anche i sottoinsiemi corrispondenti a due vertici a cui è assegnato il colore $n - 2k + 2$ non possono essere disgiunti in quanto i loro elementi apparterranno nell'insieme $\{n - 2k + 2, \dots, n\}$ che ha solo $2k - 1$ elementi.

Per provare la disuguaglianza opposta si suppone per assurdo di avere una colorazione del grafo con $d = n - 2k + 1$ colori.

Si dispongono gli elementi dell'insieme $[n]$ sulla sfera S^d in modo tale che ogni iperpiano passante per l'origine non contenga più di d elementi di $[n]$.

Detto $H(x) = \{y \in S^d : \langle x, y \rangle > 0\}$ l'emisfero centrato nel punto x di S^d , per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$ si considera l'insieme A_i formato dai punti x di S^d per i quali esiste un vertice del colore i costituito da elementi di $[n]$ che sono contenuti in $H(x)$.

Osservando che gli insiemi A_1, \dots, A_d sono aperti e $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d)$ è chiuso, per il teorema di Lyusternik e Shnirel'man generalizzato, è possibile trovare tra gli insiemi A_1, \dots, A_{d+1} , che ricoprono S^d , un A_i che contiene una coppia di punti antipodali x e $-x$.

Il caso in cui $i \leq d$ non si può realizzare, in quanto, se così fosse, $H(x)$ e $H(-x)$ conterebbero due sottoinsiemi disgiunti, ciascuno contenuto nel rispettivo emisfero, corrispondenti a vertici dello stesso colore i .

Nel caso rimanente in cui $i = d + 1$ nei rispettivi emisferi $H(x)$ e $H(-x)$ sono presenti al massimo $k - 1$ elementi di $[n]$. Ma all'insieme $S^d \setminus (H(x) \cup H(-x)) = \{y \in S^d : \langle x, y \rangle = 0\}$ che risulta intersezione di S^d con un iperpiano passante per l'origine, appartengono almeno $n - 2k + 2 = d + 1$ elementi di $[n]$ in contraddizione con la scelta fatta inizialmente. \square

Bibliografia

- [1] Croom Fred H. *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1978
- [2] Hatcher Allen, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ.Press, New York, 2001
- [3] Kosniowski Czes, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, Bologna, 1988
- [4] Matoušek Jiří, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer-Verlag, Berlino, 2003
- [5] Diestel Reinhard, *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, 2005