UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Curriculum per l'insegnamento

Tesi di Laurea Magistrale

Una sperimentazione didattica: dalla geometria alle misure astronomiche

Candidata: Margherita Scarpelli

20 Dicembre 2011

Relatore: Prof. Giorgio Ottaviani
Supervisore della sperimentazione: Prof.ssa Stefania Bianchin

Anno Accademico 2010/2011

Indice

Introduzione **v**

0.1 Struttura del lavoro di tesi vi

1 Progettazione e obiettivi **1**

1.1 Perché insegnare la geometria? 1

1.2 Storia del progetto di tirocinio 4

1.3 Prerequisiti necessari e situazione "scolastica" della classe . . 5

1.4 Obiettivi generali della sperimentazione 6

1.5 Programmazione didattica 7

2 Prima parte della sperimentazione **11**

2.1 Materiale presentato 11

2.1.1 Terminologia, postulati e definizioni 11

2.1.2 Rette perpendicolari e parallele: proprietà 13

2.1.3 La circonferenza e il cerchio 20

2.2 Diario di bordo 28

2.2.1 Lezione 0- 26 Gennaio 2011 28

2.2.2 Lezione 1- 9 Febbraio 2011 30

2.2.3 Lezione 2- 14 Febbraio 2011 32

2.2.4 Lezione 3. 21 Febbraio 2011 34

3 Seconda parte della sperimentazione **37**

3.1 Materiale presentato 37

3.1.1 Corrispondenza di Talete 37

3.1.2 Proporzioni fra grandezze 41

3.1.3 Lunghezza della circonferenza e area del cerchio 43

3.1.4 Teorema di Talete 44

3.1.5 Similitudine fra triangoli. 48

3.2 Diario di bordo 53

3.2.1 Lezione 4. 28 Febbraio 2011 53

3.2.2 Lezione 5: 14 Marzo 2011 55

3.2.3 Lezione 6: 21 Marzo 2011 57

3.2.4 Lezione 7: test di metà lavoro 28 Marzo 2011 59

4 Terza parte della sperimentazione 69
4.1 Materiale presentato 69
4.1.1 Il pianeta Terra 69
4.1.2 Misura indiretta dell'altezza di un oggetto 80
4.1.3 Misura del meridiano e del raggio terrestre 83
4.1.4 Il teorema del pappagallo 87
4.2 Diario di bordo 93
4.2.1 Lezione 8: 9 Aprile 2011 93
4.2.2 Lezione 9: 11 Aprile 2011 95
4.2.3 Lezione 10: 2 Maggio 2011 98
4.2.4 Lezione 11: 9 Maggio 2011 100
4.2.5 Lezione 12: Test finale 102

5 Analisi della sperimentazione 105
5.1 Valutazione verifiche presentate 105
5.1.1 Primo test di valutazione: 28 Marzo 2011 105
5.1.2 Secondo test di valutazione: 11 Maggio 2011 110
5.2 Cosa ne pensano i ragazzi 117
5.2.1 Argomenti preferiti 122
5.2.2 Commenti liberi e suggerimenti 124

6 Il moto retrogrado dei pianeti 127
6.1 Sistemi di coordinate 128
6.1.1 Coordinate eclittiche 128
6.2 Struttura del sistema solare 129
6.2.1 Le configurazioni planetarie 130
6.3 Leggi di Keplero 131
6.3.1 Il tempo e la Terra 132
6.4 Il moto retrogrado 133
6.4.1 Il nostro modello del moto retrogrado 134
6.4.2 Espressione degli angoli ad un generico tempo t 138
6.4.3 Studio della derivata 139
6.4.4 Condizione necessaria per il verificarsi del moto retrogrado 143
6.4.5 Un'altra espressione della derivata 144
6.4.6 Intervallo tra due moti retrogradi 146
6.4.7 Studio della derivata seconda 147
6.4.8 Segno della derivata seconda 149
6.4.9 Parametri 151
6.4.10 Risultati del nostro modello 152
6.4.11 Studio qualitativo della traiettoria eclittica del pianeta. 155
6.4.12 Considerazioni didattiche per una classe quinta o quarta. 163

7 Conclusioni 165

Bibliografia **167**

Ringraziamenti **169**

Introduzione

L'origine di questo lavoro di tesi sta nel mio amore per la geometria.
Ricordo ancora in prima superiore il mio grande piacere nel poter anche io dimostrare dei piccoli teoremi, utilizzando risultati geometrici studiati e senza che i "numeri" entrassero in gioco.
Da allora il tempo dedicato alla geometria mi è sempre sembrato più interessante, rispetto a quello dedicato all'algebra e all'analisi. Il ragionamento razionale ha infatti un ruolo primario nella risoluzione degli esercizi e l'inventiva risulta indispensabile.
Ho pensato quindi di sfruttare questa mia passione per scrivere una tesi di didattica riguardante argomenti di geometria.
Si trattava, quindi, di trovare un argomento interessante per i ragazzi della scuola dove avrei fatto tirocinio e utile per la mia sperimentazione. Mi sono rivolta al Prof. Ottaviani che, per darmi alcune idee, mi ha consigliato vari testi e articoli sull'insegnamento della geometria. Leggendo [1] ho avuto l'idea per il mio lavoro di tesi.
In quell'articolo del Prof. Ottaviani si parla di "matematica per il cittadino", quindi non solo utile per lo scienziato o l'ingegnere, ma anche per il semplice cittadino che vuole conoscere a fondo il mondo che lo circonda.
Nel paragrafo "Geometria e mondo fisico" vengono citati nomi di scienziati dell'antichità quali Aristarco e Eratostene, che si sono serviti di strumenti geometrici, in particolare di elementi di geometria euclidea e trigonometria, per avere delle informazioni sul mondo che ci circonda e per misurare distanze e lunghezze, altrimenti difficilmente misurabili, tramite metodi indiretti.
Ho pensato quindi di poter effettuare una sperimentazione di questo tipo: in una prima parte introdurre nozioni basiche di geometria e poi successivamente usare gli argomenti introdotti per studiare i vari metodi di misurazione usati nell'antichità.
La classe scelta per questo lavoro è stata una terza del Liceo Socio-Psico-Pedagogico dell'Istituto d'Istruzione Superiore "Galileo Galilei" di Firenze. La sperimentazione è stata fatta sotto la guida della Prof.ssa Stefania Bianchin, insegnante di matematica di tale classe.
Ad inizio gennaio sono andata nella classe per la prima volta e con una parte degli alunni ho fatto domande riguardanti le loro conoscenze pregresse. Poi

vi sono state sei lezioni di introduzione dei contenuti teorici seguite da un test di metà lavoro.
La parte più interessante di sperimentazione reale, consistente nella spiegazione dei metodi usati nell'antichità per la misura di lunghezze e distanze astronomiche, è stata effettuata in quattro lezioni, seguite da un test di verifica finale e da un questionario di valutazione dell'esperienza.
Nella prima parte del lavoro ci siamo quindi soffermati su argomenti di geometria euclidea classica e di base quali: perpendicolaritá e parallelismo fra rette, rette parallele tagliate da una trasversale, cerchio e circonferenza, proporzioni fra grandezze, Teorema di Talete, similitudini fra triangoli.
Nella seconda parte del lavoro invece ci siamo soffermati, dopo una lezione introduttiva sulle nozioni astronomiche di base, su tre particolari esperienze: la misura indiretta dell'altezza di un edificio tramite la sua ombra, la misura del raggio terrestre effettuata da Eratostene e la storia della misura di Talete della Piramide di Cheope raccontata nel libro "Il Teorema del Pappagallo" [2].
I metodi utilizzati sono stati per la prima parte del lavoro lezioni frontali, per la seconda lezioni in cui si è fatto uso di diapositive, lavori di gruppo, lettura di libri in classe e un'esperienza pratica di misurazione dell'altezza della palestra della scuola.
L'ultima parte del lavoro di tesi non riguarda la sperimentazione didattica, ma è un approfondimento su un fenomeno del sistema solare: il moto retrogrado. Ho modellizzato tale fenomeno in un'ottica sia di importanza matematica dello studio stesso, sia di proposta per la didattica; terminerò, infatti, con alcune considerazioni didattiche nel caso in cui lo si volesse in parte introdurre in una classe quinta, o quarta, di un Liceo Scientifico.

0.1 Struttura del lavoro di tesi

Il mio lavoro di tesi è composto da sette capitoli: i primi cinque sono interamente dedicati alla sperimentazione svolta in classe, il sesto è un approfondimento teorico che in parte può essere utilizzato come schema per un lavoro in una classe quinta, o quarta, di un Liceo Scientifico.
Nel **primo capitolo** è presentata la sperimentazione: vi sono riportate le origini di questo lavoro, perché ho scelto di fare una tesi di questo tipo, come ho selezionato gli argomenti teorici da trattare, gli obiettivi e i contenuti del lavoro di tirocinio, le esperienze "complementari" che sono state effettuate con i ragazzi e, in maniera schematica, è riportata la "programmazione didattica" in cui, per ogni lezione, riportiamo obiettivi specifici e argomenti introdotti.
Il **secondo capitolo** è suddiviso in due sezioni: la prima dal titolo "Materiale presentato" contiene i contenuti delle lezioni dal 26 Gennaio 2011 al 21 Febbraio 2011 che sono un'introduzione alla geometria finalizzate alla

"presa di confidenza" della classe con i contenuti geometrici abbandonati da tempo; la seconda, il "Diario di bordo", è una vera e propria cronaca delle lezioni contenente domande degli studenti, reazioni agli argomenti trattati, difficoltà e attitudini emerse durante la sperimentazione.
Il **terzo capitolo** è strutturato come il precedente. Nel "Materiale presentato" si riportano i contenuti che saranno di fondamentale importanza per il seguito del lavoro e per l'effettuazione delle esperienze complementari: il Teorema di Talete e il concetto di similitudine fra triangoli. Il "Diario di bordo", invece, contiene la cronaca delle lezioni e il test di metà sperimentazione. Sono stati riportati i test di tutte le file poiché gli errori sono stati differenziati.
Nel **quarto capitolo** la sezione "Materiale presentato" è composta da una serie di diapositive di introduzione all'astronomia (presentate in classe nella lezione del 9 Aprile), dalle dispense che ho scritto per i ragazzi, servite da guida per le esperienze complementari di misura di "distanze astronomiche" con metodi indiretti e dalle pagine del libro [2] utilizzate per la lezione del 9 Maggio 2011. Il "diario di bordo" ha la stessa struttura dei precedenti. Nell'ultimo paragrafo di questa sezione è riportato il test di verifica finale.
Il **quinto capitolo** è una vera e propria *analisi della sperimentazione* dove sono stati evidenziati i risultati nei test effettuati, gli errori nei differenti esercizi e le votazioni finali ottenute. Una seconda sezione è dedicata ai risultati del *questionario di valutazione dell'esperienza* compilato dalla III BL dopo la sperimentazione.
Nel **sesto capitolo** è riportato un modello del moto retrogrado dei pianeti, da me impostato, finalizzato allo studio delle caratteristiche di tale fenomeno. Ho infatti studiato quando, come e per quanto avviene, utilizzando anche il software Octave per le simulazioni e i grafici. Il capitolo termina con delle considerazioni didattiche sulla possibilità di introdurre parzialmente un modello del genere in una scuola.
Il **settimo capitolo** è una riflessione conclusiva sull'intero lavoro.

Capitolo 1

Progettazione e obiettivi della sperimentazione

1.1 Perché insegnare la geometria?

La risposta alla domanda che compone il titolo di questo paragrafo non è delle più semplici. Studiosi di didattica della matematica si sono più volte chiesti l'importanza dell'insegnamento di questa scienza fin dalla scuola primaria.
Ecco cosa viene riportato nei programmi ministeriali della scuola primaria (dal sito [9]), nella parte dedicata agli obiettivi del biennio (prima e seconda elementare) dell'apprendimento della geometria:

1. localizzare oggetti nello spazio, prendendo come riferimento sia sé stessi, sia altre persone e oggetti, e usare correttamente i termini: davanti/dietro, sopra/sotto, a destra/a sinistra, vicino/lontano, dentro/fuori;

2. effettuare spostamenti lungo percorsi che siano assegnati mediante istruzioni orali e scritte e descrivere, verbalmente o per iscritto, percorsi eseguiti da altri, anche ricorrendo a rappresentazioni grafiche appropriate;

3. riconoscere gli oggetti dell'ambiente e denominare correttamente i più semplici tipi di figure geometriche, piane e solide;

4. individuare simmetrie in oggetti e figure date; realizzare e rappresentare graficamente simmetrie mediante piegature, ritagli, disegni, ecc.;

5. confrontare e misurare lunghezze, estensioni, capacità, durate temporali, usando opportune unità, arbitrarie o convenzionali, e loro successive divisioni.

Da questi obiettivi è evidente che le nozioni di geometria che verranno introdotte ai bambini dei primi anni delle scuole elementari, avranno un'importanza rilevante nella loro crescita per la risoluzione delle problematiche "sociali" della vita quotidiana.
Se alla geometria viene data particolare importanza nel corso della scuola primaria, già alla scuola secondaria inferiore, pur affrontando un ampio programma di geometria, gli obiettivi della matematica sono "molto meno geometrici". Si leggono, infatti, i seguenti obiettivi (per l'insegnante):

1. suscitare un interesse che stimoli le capacità intuitive degli alunni;

2. condurre gradualmente a verificare la validità delle intuizioni e delle congetture con ragionamenti via via più organizzati;

3. sollecitare ad esprimersi e comunicare in un linguaggio che, pur conservando piena spontaneità, diventi sempre più chiaro e preciso, avvalendosi anche dei simboli, rappresentazioni grafiche, ecc. che facilitino l'organizzazione del pensiero;

4. guidare alla capacità di progressiva chiarificazione dei concetti e facendo riconoscere analogie in situazioni diverse, così da giungere a una visione unitaria su alcune idee centrali (variabile, funzione, trasformazione, struttura ...);

5. avviare alla consapevolezza e alla padronanza del calcolo.

Gli obiettivi del biennio del liceo sono sulla scia dei precedenti. Si legge infatti:

1. avviare alla comprensione graduale dei problemi fondamentali posti dalle discipline scientifiche, con riguardo agli aspetti metodologici e culturali;

2. introdurre all'uso appropriato della terminologia scientifica, anche al fine di ottenere il necessario rigore nell'espressione linguistica;

3. abituare ad un lavoro organizzato come mezzo per ottenere risultati significativi;

4. sviluppare capacità intuitive ed operative;

5. guidare verso una capacità di ragionare induttivamente e deduttivamente, favorendo gli atteggiamenti critici verso i problemi presentati;

6. evidenziare l'importanza di alcuni eventi nello sviluppo della storia del pensiero scientifico.

Sia alle medie che al liceo questi tipi di obiettivi sono giustificati nell'ambito di un progetto più ampio che include anche l'apprendimento delle altre scienze (Fisica, Chimica, Astronomia). Il tutto è finalizzato all'acquisizione del "metodo scientifico".
Guardando poi in maniera specifica i contenuti teorici da introdurre al biennio delle scuole medie superiori, la geometria euclidea è presente negli ultimi due punti di un elenco di otto; conseguentemente sempre più spesso viene tralasciata per scelta degli insegnanti in favore del calcolo algebrico. Grande importanza è data, inoltre, alle Teoria degli insiemi. Tale fatto, conseguenza tangibile della rivoluzione Bourbakista, è stato per molto tempo giustificato dalla facilità di apprendimento dell'insiemistica. Un'affermazione di questo tipo è stata smentita da numerose sperimentazioni (vedi [8]). L'impatto di Bourbaki è stato molto rilevante in Francia, dove nei primi anni '70 una riforma scolastica ha modificato in maniera sostanziale l'insegnamento della matematica. Il dibattito, però, non si è fermato con la riforma, ma continua ancora oggi a tal punto che ci si è chiesti se valesse la pena di continuare ad insegnare la geometria. Ne sono nati molti studi tra cui un trattato del 1999 dal titolo "Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement" stilato dalla "Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques" [3]. La geometria esce "vincitrice" da tale elaborato e l'importanza dell'apprendimento della stessa viene messa in evidenza adducendo motivazioni significative di due tipi: le prime riguardanti l'utilità per il cittadino comune, le seconde riguardanti l'essenzialità di una valida conoscenza geometrica per ingegneri, ricercatori e professori. In questo mio lavoro mi limiterò a riportare le prime, concentrandomi sulla "matematica per il cittadino" di cui si parla nell'introduzione.
Le motivazioni che rendono la geometria indispensabile nell'insegnamento nella scuola primaria e secondaria (di primo e di secondo livello, per tutti gli indirizzi) sono le seguenti:

- la visione dello spazio nella vita quotidiana;
- l'allenamento al ragionamento;
- gli aspetto estetici e culturali della geometria.

La formazione ad *una buona visione dello spazio* è sicuramente uno dei meriti condivisi da tutti della geometria. Come sottovalutare l'influsso che una buona visione geometrica ha su problematiche della vita quotidiana quali spostarsi in una grande città ignota, in campagna, in un bosco o in mare, come utilizzare o creare una cartina geografica per determinare una posizione e individuare un percorso o come rappresentare quello che ci circonda. Molto più geometricamente in [3] viene detto che "il fatto di aver costruito, studiato, manipolato le figure, piane e non, è senza dubbio essenziale per appropriarsi di una buona visione dello spazio e delle sue rappresentazioni, che

resta uno degli scopi principali dell'insegnamento della matematica".
Il ruolo della geometria nell'*allenamento al ragionamento* non è così evidente come quello nel punto precedente. Per il cittadino il saper ragionare è sicuramente un requisito indispensabile che permette di "esercitare le sue responsabilità in maniera lucida nella nostra società e di prendere parte a dibattiti politici, economici e sociali". Ci sono molti ambiti in cui il ragionamento viene esercitato, a cominciare da altre branche della matematica o altre scienze. Il ragionamento geometrico ha però delle caratteristiche particolari, delle sue "specificità": è una disciplina ricca e varia, con un aspetto visivo e ludico molto forte, può essere affrontata presto (già dalla scuola primaria), in essa il ragionamento interviene fin dall'inizio e i suoi elementi sono "utili e pertinenti" (cosa che la differenzia dal latino, innalzato a disciplina cardine della formazione del ragionamento). Chiaramente l'insegnamento della geometria non è banale: nella risoluzione di un problema geometrico ogni allievo si troverà nella situazione di "non sapere cosa fare": l'insegnare a superare situazioni di questo tipo sarà fondamentale non solo per la risoluzione di problemi matematici, ma anche quotidiani.
L'aspetto estetico e culturale della geometria è universalmente noto: il ruolo che gli enti geometrici avevano negli usi dei popoli dell'antichità è tutt'altro che trascurabile. Alcuni enti geometrici con la civiltà greca hanno acquistato un ruolo mitico anche nella società odierna (poliedri regolari o numero aureo). Inoltre la "contemplazione di belle figure" crea, in un certo senso, soddisfazione estetica. Come non notare, ad esempio, quanto la geometria renda bella e maestosa la nostra Cattedrale di Santa Maria del Fiore? Come sarebbe stata possibile la costruzione di un monumento di tale raffinatezza senza la geometria euclidea? Per non parlare della struttura di città, costruite secondo un reticolato, o di grandi arterie stradali che collegano i grandi monumenti in città come Roma o Parigi. Ma non si parla solo di passato: oggi l'uso del cemento armato, ha portato, soprattutto nella costruzione di archi e volte, all'utilizzo di superfici regolari.
Le motivazioni riportate mi sembrano alquanto illuminanti sull'importanza della geometria nel processo di crescita personale di ogni individuo. Per questo motivo nel mio lavoro di tirocinio, ho scelto un percorso di ripresa dei concetti geometrici e di applicazione degli stessi.

1.2 Storia del progetto di tirocinio

La lettura dell'articolo [1] è stato di indubbia importanza nella scelta dell'argomento della mia sperimentazione. Ancora prima di leggerlo e di sapere con quale classe avrei dovuto lavorare, la mia idea era quella di fare un tirocinio di geometria che evidenziasse in particolar modo le applicazioni "pratiche" della matematica. L'idea comune del matematico molto spesso è quella di un individuo che vive in un mondo parallelo alla realtà e che si

occupa di cose totalmente astratte. Durante gli anni del liceo, molto spesso, discutendo con i miei compagni di classe sugli scopi delle varie materie, era idea comune che la matematica fosse "inutile". A posteriori, ripensando a quelle discussioni, mi sorprendo di come una classe di liceo scientifico non riuscisse a capire l'importanza quotidiana di strumenti come, ad esempio, le proporzioni.
Quindi alla ricerca di un'idea per il mio lavoro mi "imbattei" in [1]. Nel paragrafo "Geometria e mondo fisico" si parla del ruolo che la geometria greca ha avuto nell'astronomia per la comprensione del sistema solare. In particolare vengono riportate due misure: quella di Aristarco del rapporto tra la distanza della Terra dal Sole e quella dalla Luna e la misura del meridiano terrestre di Eratostene. Ho pensato quindi di poter affrontare applicazioni di questo tipo in classe dopo un'adeguata preparazione geometrica. La misura di Aristarco ben presto ho dovuta escluderla in quanto la scelta della classe è caduta su una terza pedagogico, quindi la trigonometria avrebbe dovuto essere spiegata completamente.
Abbiamo quindi pensato insieme al Prof. Ottaviani e alla docente della classe, la Prof.ssa Stefania Bianchin, di concentrarci sulla similitudine fra triangoli. L'importanza applicativa della stessa, specialmente in campo astronomico, è universalmente nota; le misure indirette si basano sempre sull'impostazione di proporzioni, a volte descritte dopo la verifica della similitudine di due o più triangoli. L'esigenza di dover trattare il concetto di proporzione, inoltre, risultava particolarmente utile per il mio scopo di mostrare ai ragazzi una matematica "utile" nella vita quotidiana: costo delle merci, ricette e quant'altro sono impossibili da maneggiare senza dimestichezza in ambito matematico. Inizialmente avevo ideato tre "esperienze pratiche" da effettuare con la classe: la misura dell'altezza di un oggetto, la misura del meridiano terrestre e la misura della distanza di un oggetto dall'osservatore mediante la sovrapposizione di due fotogrammi (fenomeno della parallasse nel caso in cui l'oggetto trattato sia un stella "vicina"). Successivamente, a lavoro già iniziato, abbiamo deciso, in accordo con la docente della classe, di sostituire l'ultima applicazione con la lettura del racconto della misurazione di Talete della Piramide di Cheope.

1.3 Prerequisiti necessari e situazione "scolastica" della classe

Le tre "esperienze pratiche" da trattare necessitano di molti prerequisiti evidenziati nel seguente elenco:

1. *"Quanto è alto un campanile?"*: misura indiretta dell'altezza di un qualunque edificio.
   Prerequisiti: nozioni generali di astronomia (sistema solare, rotazione

terrestre, meridiani e paralleli, distanze varie), rette parallele tagliate da trasversali, similitudini fra triangoli.

2. *Esperienza di Eratostene*: misura indiretta della lunghezza del meridiano e del raggio terrestre.
   Prerequisiti: meridiani e paralleli terrestri, proprietà della circonferenza, rette parallele tagliate da una trasversale, triangoli simili.

3. *Esperienza di Talete*: misura indiretta dell'altezza della piramide di Cheope.
   Prerequisiti: vedi 1.

Per arrivare quindi a misurare l'altezza di un edificio, trovare la lunghezza del meridiano e del raggio terrestre con i dati che aveva Eratostene e capire la misurazione indiretta dell'altezza della piramide di Cheope ho dovuto impostare un lavoro di consolidamento dei concetti geometrici e astronomici necessari.
Dalla docente ho saputo che l'insegnante del biennio aveva deciso di non trattare la parte di programma relativa alla geometria. Le conoscenze pregresse, quindi, derivavano dalle scuole medie. Nella prima parte dell'anno scolastico la docente aveva deciso di svolgere i concetti di base della geometria euclidea fino alle congruenze tra triangoli; il resto, del quale i ragazzi erano totalmente all'oscuro, avrei dovuto introdurlo io. Ho avuto, quindi, la responsabilità di fare una breve introduzione alla geometria come disciplina e come modo di pensare. Naturalmente, nelle lezioni svolte, non ho introdotto tutti i concetti della geometria euclidea (sarebbe stata un'impresa titanica), ma tutta quella parte di geometria sintetica indispensabile per la comprensione delle esperienze pratiche.

1.4 Obiettivi generali della sperimentazione

Gli obiettivi di questo lavoro sono molteplici e possiamo dividerli in obiettivi di formazione dei ragazzi e obiettivi utili per la sperimentazione.
Per i nostri ragazzi che frequentano un liceo socio-psico-pedagogico, che quindi prepara i futuri insegnanti della scuola primaria, la conoscenza dei concetti base della geometria è fondamentale. Eventuali lacune generalizzate in tale campo causerebbero non poche problematiche nell'insegnamento alle vecchie "scuole elementari". Sicuramente uno degli scopi che ci siamo prefissati è quello di colmare parte di queste lacune.
La conoscenza di applicazioni astronomiche, oltre ad arricchire il bagaglio culturale degli alunni, dovrebbe suscitare l'interesse e favorire l'apprendimento della geometria: la decisione di eseguire esperienze pratiche e di introdurre le stesse tramite contestualizzazione dell'argomento è stata presa proprio in quest'ottica.
Per la mia sperimentazione è particolarmente importante capire quanto la

"contestualizzazione" storica (intesa come storia aneddotica di alcune idee) possa aiutare lo studente a superare le effettive difficoltà che incontra nell'applicazione dei concetti studiati alla realtà e valutare la possibilità di inserire in un eventuale programma scolastico futuro esperienze di questo tipo.
Anche la differenziazione dei metodi di insegnamento dovrebbe contribuire a dare delle risposte sulle esigenze dei ragazzi. I metodi utilizzati sono quindi stati vari, dalle lezioni frontali, al lavoro di gruppo, alla proiezione di diapositive.

1.5 Programmazione didattica

Di seguito riportiamo la programmazione didattica: per ogni lezione diamo un elenco schematico dei contenuti della lezione accompagnati in corsivo dagli obiettivi specifici della stessa.

Lezione 0 26 Gennaio 2011 dedicata alla scoperta del background dei ragazzi. Intervista frontale a tre alunni.
Obiettivo: capire le conoscenze di base dei ragazzi sia in campo matematico che in campo astronomico.

Lezione 1 7 Febbraio 2011 perpendicolarità e parallelismo fra rette.
Obiettivo: apprendimento della definizione di rette perpendicolari e parallele e principali proprietà di quest'ultime. Stimolare l'interesse verso questo argomento introducendo aneddoti storici sul quinto postulato (accenno alle geometrie non euclidee).

- Definizione di rette perpendicolari;
- teorema relativo alle rette perpendicolari;
- definizione di rette parallele;
- quinto postulato di Euclide (presentazione sia storica che concettuale dell'argomento);
- criterio di parallelismo fra rette.

Lezione 2 14 Febbraio 2011 esercizi su rette parallele tagliate da una trasversale.
Obiettivo: convincersi dell'importanza dei concetti di rette parallele e perpendicolari.

Lezione 3 21 Febbraio 2011 definizioni e proprietà del cerchio e della circonferenza.
Obiettivo: riportare alla mente alcune formule già apprese dai ragazzi alla scuola media, dimostrandole usando gli argomenti introdotti.

- Definizioni di circonferenza, centro, raggio, diametro;

- definizioni di cerchio, arco e corda, angolo al centro e angolo alla circonferenza;
- proprietà;

Lezione 4 28 Febbraio 2011 corrispondenza di Talete.
Obiettivo: porre le basi per l'introduzione delle proporzioni fra grandezze e per la dimostrazione del teorema di Talete.

- Proprietà del fascio di rette parallele tagliato da due trasversali;
- proprietà delle parallele ai lati di un triangolo tracciate per il punto medio di un altro lato;
- applicazione: dividere un segmento in un numero qualsiasi di parti congruenti;
- consegna di un esercizio sulle proporzioni.

Lezione 5 14 Marzo 2011 proporzioni fra grandezze e teorema di Talete.
Obiettivo: capire cosa vuol dire che due grandezze sono in proporzione, capire analogie e differenze con i concetti introdotti nella lezione precedente.

- Definizione di grandezze in proporzione;
- esercizi sulle proporzioni;
- teorema di Talete e corollari;
- applicazione: dividere un segmento in parti proporzionali.
- lunghezza della circonferenza e area del cerchio.

Lezione 6 21 Marzo 2011 similitudine fra triangoli.
Obiettivo: fare proprio il concetto della similitudine tra triangoli, analogie e differenze con la congruenza fra triangoli.

- Definizione di similitudine fra triangoli e proprietà;
- definizione di lati, angoli e vertici corrispondenti e di rapporto di similitudine;
- criteri di similitudine fra triangoli.

Lezione 7 28 Marzo 2011 test di verifica conoscenze geometriche.

Lezione 8 9 Aprile 2011 il sistema solare e il pianeta Terra.
Obiettivo: i ragazzi dopo questa lezione dovrebbero conoscere le principali caratteristiche del sistema solare, del pianeta Terra, della rotazione di quest'ultima attorno al Sole.

- Introduzione di concetti astronomici quali latitudine e longitudine, paralleli, meridiani speciali (tropici, equatore), osservazioni sull'alternanza delle stagioni, solstizi e equinozi;

- descrizione dei metodi utilizzati nell'antichità per conoscere l'universo. Che cos'è uno gnomone? Precisazione sull'ombra di un oggetto.

Lezione 9 11 Aprile 2011 misura dell'altezza della palestra della scuola: esperienza 1.
Obiettivo: accrescere, tramite un'esperienza di misurazione, l'interesse per la geometria, facendo capire ai ragazzi che la matematica non è una scienza così astratta come sembra.

Lezione 10 2 Maggio 2011 Esperienza 2 e valutazione degli errori commessi durante la misurazione della lezione precedente.
Obiettivo: accrescere l'interesse introducendo anche storicamente l'esperienza di Eratostene. Capire quanti errori sono commessi in un qualsiasi esperimento, capendo che non sempre i numeri sono "belli da vedere".

- Analisi dell'errore nell'esperienza di misurazione (errori sistematici e accidentali, errore relativo, assoluto e percentuale);
- introduzione storica dell'esperienza 2;
- divisioni in gruppi e calcolo della lunghezza del meridiano terrestre e del raggio.

Lezione 11 9 Maggio 2011 esperienza 3.
Obiettivo: far vedere ai ragazzi un tipo di lezione nuova dove si fa uso di mezzi diversi rispetto a quelli usuali, come la lettura di un romanzo. Illustrare un'altra esperienza storica riguardante le applicazioni della matematica.

- Lettura di alcuni pezzi di un capitolo del libro "Il Teorema del Pappagallo";
- lettura della biografia di Talete;
- comprensione, tramite le figure presenti nel libro, della misurazione dell'altezza della piramide di Cheope fatta da Talete.

Lezione 12 11 Maggio 2011 test finale di verifica di conoscenze e questionario di valutazione delle esperienze.

Capitolo 2

Prima parte della sperimentazione: introduzione alla geometria

2.1 Materiale presentato

Quando si comincia un qualsiasi corso di Geometria Euclidea si parte dalla spiegazione di una terminologia che sarà poi usata nel seguito del corso. Anche nella mia piccola esperienza di "insegnante" ho cominciato con una parte di geometria che normalmente è la parte introduttiva del corso di geometria di Prima liceo, questo perché la classe in questione (una terza di un liceo socio-psico-pedagogico) non aveva nel corso del biennio trattato argomenti di geometria. Naturalmente non ho affrontato in dieci lezioni l'intero programma dei due anni precedenti, ma mi sono limitata agli argomenti che sarebbero stati utili per le esperienze successive.
Questa prima parte è pensata come un manuale da consegnare agli studenti; il linguaggio è quindi quello consono ad un libro finalizzato all'apprendimento delle scuole secondarie superiori. Non mancheranno però delle considerazioni di altro livello che aiuteranno ad analizzare i contenuti da un punto di vista più alto. I testi utilizzati come guida sono quindi stati testi indirizzati alle classi superiori di una scuola secondaria superiore (ex-magistrale) tra cui il libro di testo della classe del biennio ([6]). Gli altri sono riportati in bibliografia ([11], [4], [5]).

2.1.1 Terminologia, postulati e definizioni

Nello studio della geometria si parte da **concetti** ed **enti primitivi**, che non si possono, cioè, definire in maniera più elementare, ma sono espressi da parole il cui significato è noto a tutti. Per esempio sono concetti primitivi l'idea di movimento rigido e di appartenenza; sono, invece, enti geometrici primitivi il punto, la retta, il piano e lo spazio. Oltre a questi quattro tipi di oggetti ce ne saranno altri che necessiteranno però di una **definizione**. Si parlerà anche di **postulati**; essi sono "affermazioni che esprimono proprietà evidenti suggerite dalla nostra intuizione e dalla nostra esperienza". A questo punto possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 2.1.1. L'insieme di tutte le rette di un piano che passano per uno stesso punto è detto **fascio di rette**. Tale punto è detto **centro del fascio**.

Cominciamo adesso a trattare quella che si chiama la **posizione reciproca** tra due rette:

Definizione 2.1.2. Se due rette hanno un solo punto in comune esse si dicono rette **incidenti**. Due rette distinte in uno stesso piano si dicono **parallele** se non hanno alcun punto in comune.

Definizione 2.1.3. Data una retta orientata r ed un suo punto qualsiasi O, si chiama semiretta di origine O l'insieme costituito dal punto O stesso e dai punti di r che precedono o seguono O.

Definizione 2.1.4. Si definisce segmento di estremi A e B l'insieme costituito dai punti A e B e da tutti i punti della retta AB compresi tra A e B.

Definizione 2.1.5. Due semirette a e b di un piano avente origine in comune e non sovrapposte dividono il piano in due parti ciascuna delle quali viene chiamata **angolo**. Le due semirette si dicono **lati** dell'angolo e la loro origine si chiama **vertice** dell'angolo.

In geometria per indicare i differenti enti geometrici si adottano le seguenti convenzioni:

- con le lettere maiuscole A, B, C, *etc* si indicano i punti e i vertici;
- con le lettere minuscole r, q, s, *etc* si indicano le rette;
- con le lettere greche α, β, γ, *etc* si indicano gli angoli.

Definizione 2.1.6. Due semirette a e b che siano l'una il prolungamento dell'altra determinano due angoli ciascuno dei quali si dice **angolo piatto**. Se due semirette a e b sono sovrapposte si hanno un **angolo nullo** (quello costituito dai soli lati) e un **angolo giro**.

Definizione 2.1.7. Due angoli di uno stesso piano aventi in comune un vertice, un lato e nessun altro punto si dicono **consecutivi**; se oltre ad essere consecutivi hanno i due lati non comuni che sono l'uno il prolungamento dell'altro, si dicono **adiacenti**. Due angoli si dicono **opposti al vertice** se il lati dell'uno sono i prolungamenti dell'altro.

Definizione 2.1.8. Dei due angoli formati da due semirette a e b di un piano aventi l'origine in comune e non giacenti sulla stessa retta, uno non contiene i prolungamenti dei lati, l'altro li contiene; al primo viene dato il nome di **angolo convesso**, al secondo di **angolo concavo**.

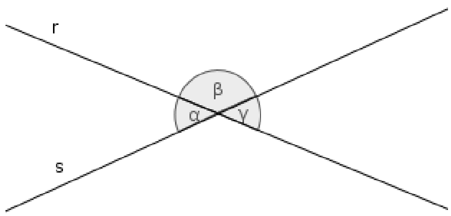
Definizione 2.1.9. Dati due angoli convessi α e β la loro somma è l'angolo che si ottiene disponendo uno consecutivo all'altro due angoli α' e β' rispettivamente congruenti ad α e β.

Teorema 2.1.10. *Esiste sempre una semiretta e una sola che divide un angolo qualunque in due parti uguali. Essa si dice* ***bisettrice****.*

Definizione 2.1.11. Ciascuno dei due angoli in cui viene diviso un angolo piatto dalla bisettrice è detto **retto**; un angolo minore dell'angolo retto si dice **acuto**; un angolo convesso maggiore di un angolo retto si dice **ottuso**.

Definizione 2.1.12. Due angoli la cui somma è un angolo retto si dicono tra loro **complementari**; due angoli la cui somma è un angolo piatto si dicono tra loro **supplementari**.

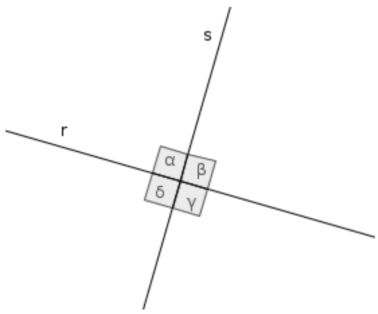
Lemma 2.1.13. *Angoli opposti al vertice sono congruenti.*



Dimostrazione. Siano r e s due rette incidenti e sia α uno degli angoli da esse formato. Sia γ il suo opposto al vertice. Essi sono congruenti perché supplementari allo stesso angolo β. □

2.1.2 Rette perpendicolari e parallele: proprietà

Lemma 2.1.14. *Se due rette intersecandosi formano un angolo retto, sono retti anche gli altri tre angoli da esse formati.*

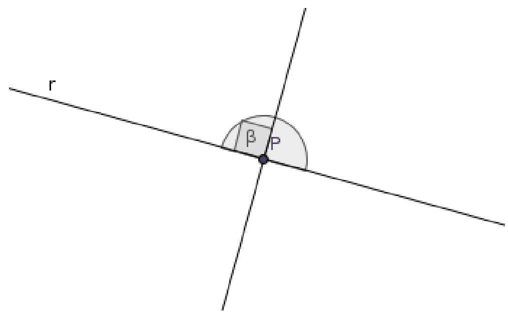


Dimostrazione. Siano r e s due rette incidenti e sia retto uno degli angoli da esse formato, per esempio l'angolo α. Se α è retto, quindi metà di un angolo piatto, anche β e δ che sono adiacenti ad α, quindi supplementari ad α, sono retti. γ è opposto al vertice di α quindi anch'esso è retto per 2.1.13. □

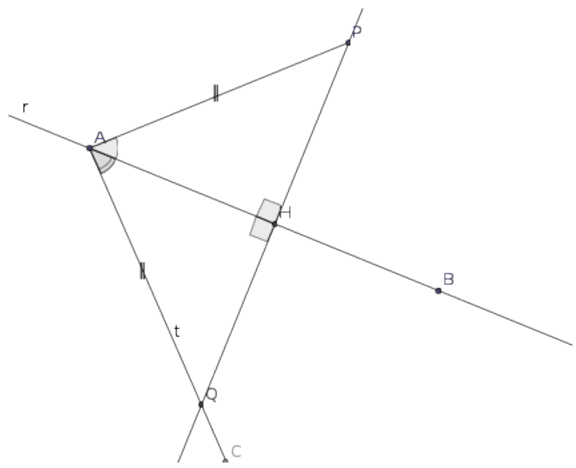
Definizione 2.1.15. Due rette che intersecandosi formano un angolo retto, perciò quattro angoli retti, vengono dette perpendicolari.

Teorema 2.1.16. *Data una retta ed un punto (appartenente o no ad essa) esiste sempre una e una sola perpendicolare condotta per quel punto alla retta data.*

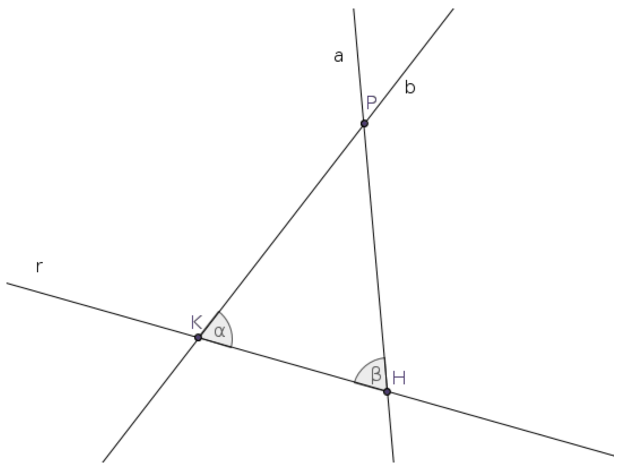
Dimostrazione. Detti rispettivamente r e P la retta ed il punto dati, distinguiamo due casi: P appartenga ad r; P non appartenga ad r.
1° caso. Se P appartiene ad r, le due semirette formate da P su r determinano due angoli piatti. Per il teorema 2.1.10 posso tracciare un'unica semiretta, la bisettrice di uno di tali angoli, che forma così due angoli retti. Prolungandola ottengo la retta cercata.



2° caso.
Esistenza.



Se P non appartiene ad r congiungiamo P con un generico punto A di r. Se la retta PA tracciata forma due angoli uguali, quindi retti, abbiamo già trovato la perpendicolare cercata prolungando adeguatamente tale semiretta. Se invece questo non succede, tracciamo la semiretta t, uscente da A, giacente dalla parte opposta di P rispetto alla r e formante con la r l'angolo $C\hat{A}B \cong P\hat{A}B$ dove B è un generico punto di r e C un generico punto di t. Detto Q il punto della t per il quale vale $AQ \cong AP$, si congiunga P con Q. La retta PQ, che interseca la retta r in un punto H, risulta perpendicolare alla r; infatti il triangolo PAQ risulta isoscele e AH, cioè la bisettrice del suo angolo al vertice risulta essere anche altezza, quindi perpendicolare alla base (proprietà del triangolo isoscele).
Unicità La perpendicolare alla r per P è unica. Supponiamo per assurdo che da P si possano condurre due perpendicolari a e b alla retta r. Dette H e K le loro intersezioni con la r, il triangolo PHK avrebbe due angoli retti (α e β). Ma la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, la precedente conclusione è quindi assurda.



□

Nel paragrafo precedente abbiamo spiegato cosa sono i postulati. Quelli della geometria euclidea sono cinque [7]:

Postulato 2.1.17. *Tra due punti è possibile tracciare una e una sola linea retta.*

Postulato 2.1.18. *Si può prolungare un segmento indefinitamente da entrambe le parti.*

Postulato 2.1.19. *È possibile costruire un cerchio con centro e raggio dato.*

Postulato 2.1.20. *Tutti gli angoli retti sono uguali.*

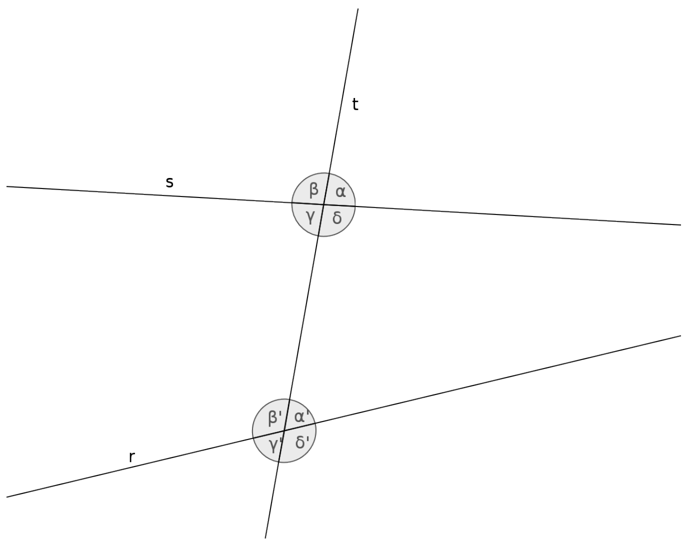
Postulato 2.1.21. *Data una retta r e un punto P non appartenente ad r, per il punto P passa una e una sola retta parallela a r.*

Quest'ultimo postulato, detto **quinto postulato di Euclide** o **postulato delle parallele**, è l'assioma più discusso nella storia della geometria. Molti matematici, infatti, non consideravano questo enunciato ammissibile senza una dimostrazione, non categorizzabile quindi come un assioma. È cominciata allora una ricerca di una dimostrazione di esso, senza però arrivare ad alcun risultato. Eliminando però tale postulato dai postulati della geometria i "conti" continuano a tornare in geometrie chiamate *non euclidee*. In alcune geometrie non euclidee, ad esempio, per un punto P non appartenente ad una retta r passano infinite parallele ad r.
Noi non entreremo nel merito di queste "differenti geometrie".

Rette tagliate da una trasversale.

Due rette di un piano che intersecano una terza retta, detta trasversale, formano con essa otto angoli che hanno, a due a due, i seguenti nomi (la situazione è spiegata dalla figura in basso):

- *angoli alterni interni:* δ e β'; γ e α';
- *angoli alterni esterni:* α e γ'; β e δ';
- *angoli corrispondenti:* α e α'; β e β'; δ e δ';
- *angoli coniugati interni:* δ e α'; γ e β';
- *angoli coniugati esterni:* α e δ'; β e γ'.



Lemma 2.1.22. *Se una coppia di angoli alterni interni, esterni o corrispondenti ha elementi congruenti allora anche le altre coppie di angoli interni, esterni o corrispondenti avranno elementi congruenti.*

Dimostrazione. Dimostriamo questo lemma solo nel caso degli angoli alterni interni.
Se per ipotesi sono uguali α' e γ allora saranno uguali anche gli altri angoli alterni interni δ e β' visto che sono adiacenti, quindi supplementari, ad angoli congruenti. □

Proposizione 2.1.23. *I seguenti enunciati sono equivalenti:*

1. *gli angoli alterni interni sono congruenti;*
2. *gli angoli alterni esterni sono congruenti;*

3. *gli angoli corrispondenti sono congruenti;*

4. *gli angoli coniugati sono supplementari.*

Dimostrazione. Dimostreremo solo che 1 $\rightarrow$ 2,3,4.
Dalla figura possiamo osservare che

$$\alpha' = \gamma' \textit{ perché opposti al vertice}$$

$$\gamma = \alpha \textit{ perché opposti al vertice}$$

Per la proprietà transitiva della congruenza anche gli angoli alterni esterni α e γ' sono uguali. Analogamente partendo da $\delta = \beta'$ e procedendo allo stesso modo avremo che $\beta = \delta'$. 2 è così dimostrato.
Per dimostrate il punto 3 è sufficiente applicare la proprietà transitiva della congruenza ai risultati precedenti.
Consideriamo adesso gli angoli δ e γ. Essi sono supplementari, ma $\delta = \beta'$, quindi per la proprietà transitiva anche γ e β' sono supplementari. Analogamente si dimostra per le altre coppie di angoli coniugati. □

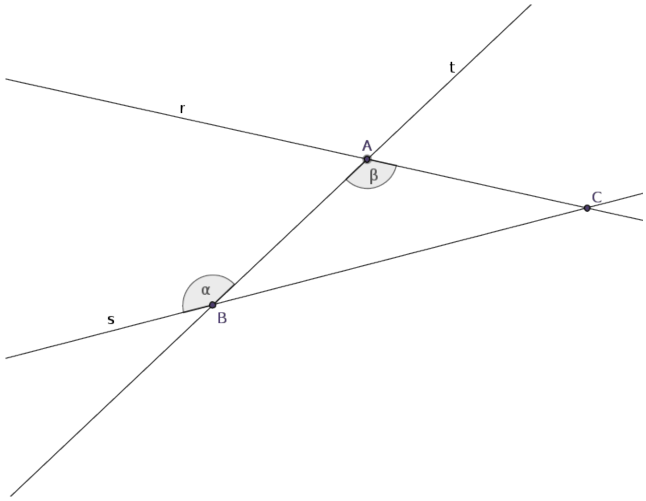
Commento. Nella proposizione precedente gli angoli coniugati interni e esterni vengono messi nello stesso caso. A rigor di logica, anche per come li avevo definiti, avrei dovuto individuare due casi differenziati; ho preferito lasciare la dimostrazione in questa forma per non appesantirla troppo.
Anche nel lavoro in classe ho forse dato meno rilievo agli angoli coniugati; questa mia disattenzione ha causato nei compiti qualche errore di troppo nei test dei malcapitati ai quali veniva chiesto di riconoscere due angoli, appunto, coniugati.

Criterio di parallelismo

Possiamo a questo punto enunciare un *criterio di parallelismo* cioè una condizione sufficiente a garantire il parallelismo tra rette.

Teorema 2.1.24. *Se due rette complanari r e s tagliate da una trasversale t formano con essa angoli alterni (interni e esterni) congruenti, corrispondenti congruenti e coniugati supplementari allora le rette sono parallele.*

Dimostrazione. La dimostrazione che proponiamo utilizza il teorema dell'angolo esterno che qui non riportiamo per semplicità; esso può comunque essere dimostrato senza far uso del postulato delle parallele.
Per la proposizione 2.1.23 basterà dimostrarlo, ad esempio, per gli angoli alterni interni. Supponiamo per assurdo che r e s si incontrino in un punto C, come è espresso dal disegno

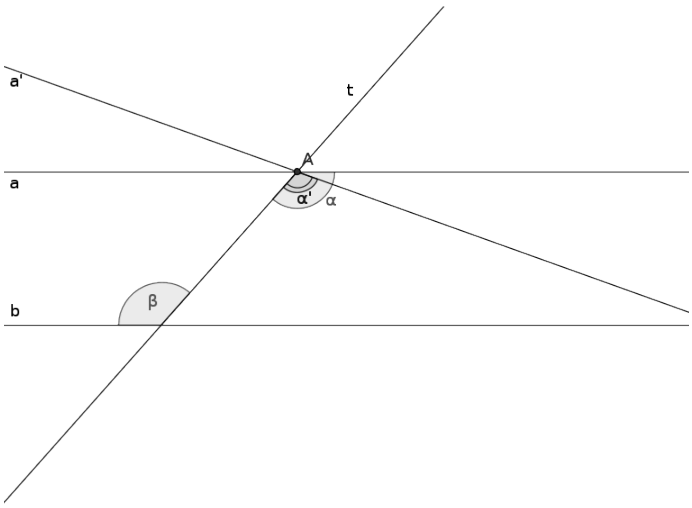


allora β risulterebbe minore di α per il teorema dell'angolo esterno. Assurdo, quindi le rette sono parallele. $\square$

Possiamo invertire il precedente teorema trovando così la condizione necessaria del parallelismo.

Teorema 2.1.25. *Se due rette a e b sono parallele allora, tagliate da una trasversale t, formano angoli alterni (interni e esterni) e corrispondenti congruenti e angoli coniugati supplementari.*

Dimostrazione. Per la proposizione 2.1.23 basterà dimostrarlo, ad esempio, per gli angoli alterni interni.
Supponiamo per assurdo che i due angoli alterni interni α e β non siano congruenti. Supponiamo, per esempio, che $\alpha > \beta$. Posso quindi tracciare una retta a' passante per A in maniera tale da formare con la trasversale t un angolo α' uguale a β.



Per 2.1.24 allora a' e b sono parallele. Abbiamo quindi due rette (a e a') passanti per uno stesso punto A e parallele ad una stessa retta (b). Assurdo perché negherebbe il quinto postulato di Euclide. □

2.1.3 La circonferenza e il cerchio

Nozioni fondamentali

Definizione 2.1.26. Dati un punto O ed un segmento r, si dice circonferenza di centro O e raggio r il luogo dei punti di un piano che hanno da O distanza uguale a r.

Definizione 2.1.27. Si dice cerchio il luogo dei punti di un piano che hanno da O distanza minore o uguale a r.

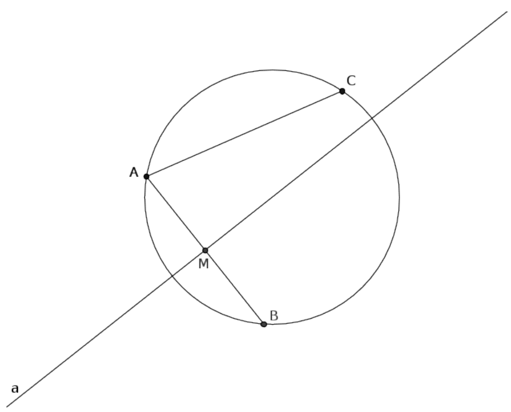
Definizione 2.1.28. I segmenti che congiungono i punti della circonferenza al centro O sono uguali ad r e si dicono **raggi della circonferenza**.

Prima di introdurre il seguente teorema diamo la seguente definizione che sarà importante per la costruzione che faremo.

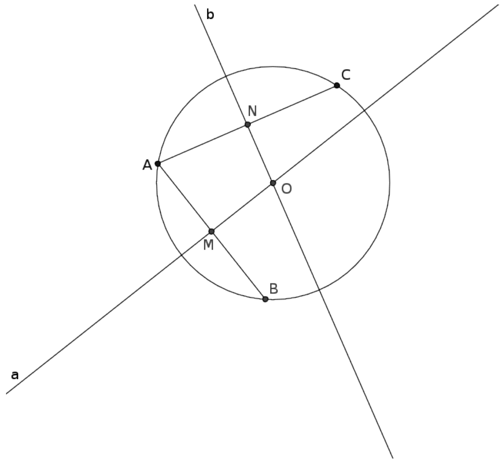
Definizione 2.1.29. L'**asse di un segmento** è il luogo dei punti di un piano equidistanti dagli estremi del segmento stesso. Possiamo anche definirlo come la perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio.

Teorema 2.1.30. *Tre punti non allineati individuano una e una sola circonferenza.*

Dimostrazione. Siano A, B, C tre punti non allineati. Congiunto A con B e con C costruiamo l'asse a di AB



e l'asse b di AC.



Questi assi, distinti e non paralleli (i punti non sono infatti allineati) si incontrano in un punto O, che sarà equidistante dai tre punti dati (il *circocentro*).
La circonferenza di centro O e di raggio OA passa dunque anche per B e C. Essendo O l'unico punto che gode della proprietà di equidistanza dai tre punti sarà il centro dell'unica circonferenza passante per A, B, C. □

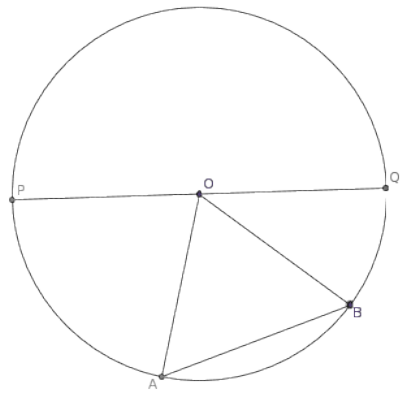
Definizione 2.1.31. Si dice **corda** il segmento che unisce due punti qualunque della circonferenza; si dice **diametro** ogni corda passante per il centro.

Definizione 2.1.32. Ogni diametro divide la circonferenza in due parti congruenti, ciascuna delle quali viene denominata **semicirconferenza**; esso divide anche il cerchio in due parti congruenti, ciascuna della quali è detta **semicerchio**.

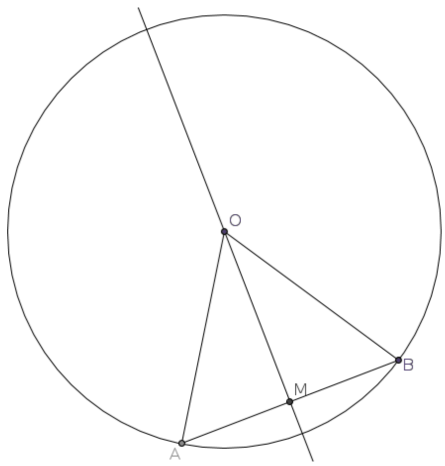
Teorema 2.1.33. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *qualunque corda non passante per il centro è minore di ogni diametro;*
2. *la perpendicolare mandata dal centro di una circonferenza a una corda divide questa in due parti congruenti;*
3. *in una stessa circonferenza (o in circonferenze congruenti) corde congruenti hanno dal centro distanze congruenti; viceversa corde aventi dal centro distanze congruenti sono congruenti.*

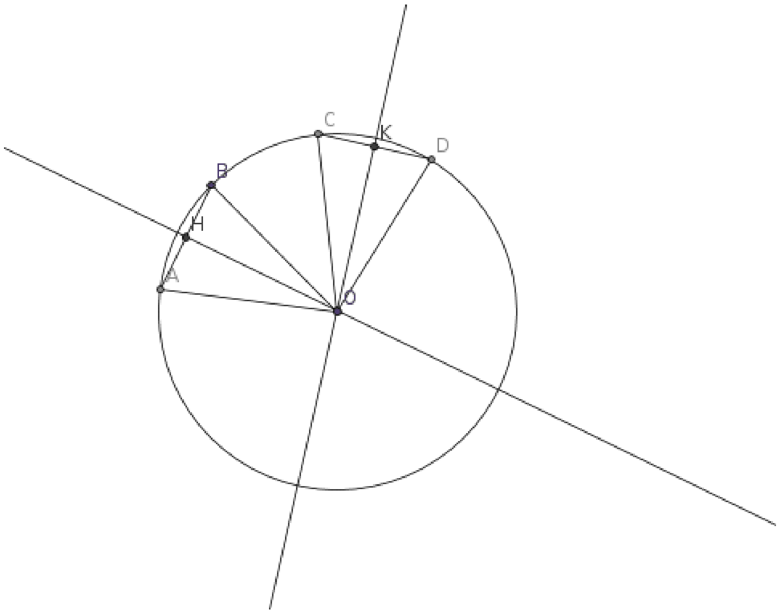
Dimostrazione. 1. Nel triangolo AOB il lato AB (corda) è minore della somma $AO+BO$ degli altri due lati; quindi AB è minore della somma di due raggi e pertanto è minore del diametro PQ.



2. Dal momento che il triangolo ABO è isoscele, la perpendicolare OM mandata dal vertice O alla base AB è anche mediana della base. Quindi $AM \cong MB$.



3. Se OH e OK sono le distanze dal centro O delle due corde congruenti AB e CD per la proprietà precedente H e K sono i punti medi di dette corde. Quindi AH e CK sono tra loro congruenti. Di conseguenza sono congruenti i due triangoli rettangoli AOH e COK e in particolare sono congruenti i due cateti OH e OK. Si procede in maniera analoga per dimostrare che se $OH \cong OK$, allora $AH \cong CK$ e quindi $AB \cong CD$.



Definizione 2.1.34. Data una circonferenza, due suoi punti generici A e B tra loro distinti la dividono in due parti ciascuna delle quali si chiama **arco di circonferenza**.

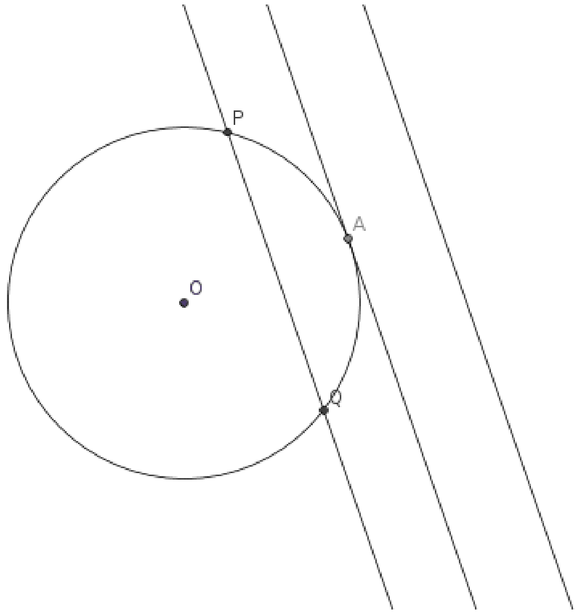
Definizione 2.1.35. Dato un cerchio, due suoi generici raggi OA e OB tra loro distinti lo dividono in due parti ognuna delle quali si chiama **settore circolare**.

□

Posizioni reciproche di circonferenze e rette.

Nella definizione seguente enunceremo quali sono le reciproche posizioni che possono assumere una retta ed una circonferenza.

Definizione 2.1.36. Se la distanza della retta dal centro è maggiore del raggio, la retta è **esterna** alla circonferenza (retta e circonferenza non hanno alcun punto in comune); se la distanza è congruente al raggio, la retta è **tangente** alla circonferenza (un punto in comune); se la distanza è minore del raggio, la retta è **secante** alla circonferenza (due punti di intersezione).

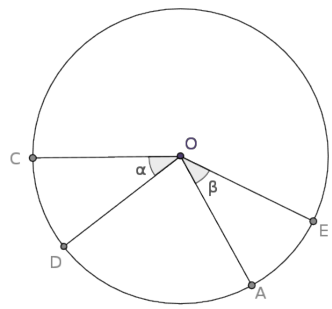


Angoli al centro e angoli alla circonferenza.

Definizione 2.1.37. Un angolo avente il vertice nel centro O di un cerchio si dice **angolo al centro**.

Teorema 2.1.38. *Nello stesso cerchio, ad angoli al centro congruenti corrispondono archi congruenti, settori congruenti e corde congruenti. Viceversa, ad archi congruenti corrispondono archi congruenti, settori congruenti e corde congruenti; a settori congruenti corrispondono angoli al centro congruenti, archi congruenti e corde congruenti.*

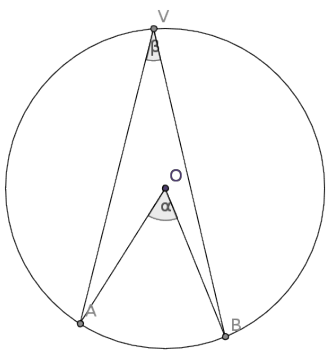
Dimostrazione. Se gli angoli α e β sono congruenti, mediante una rotazione attorno al centro O è possibile sovrapporre l'uno all'altro; resteranno quindi sovrapposti i corrispondenti archi, settori e corde.



Il viceversa è analogo. □

Definizione 2.1.39. Un angolo avente il vertice in un punto della circonferenza e i due lati o secanti alla circonferenza, o uno secante e uno tangente è detto **angolo alla circonferenza**.

Consideriamo la figura seguente.

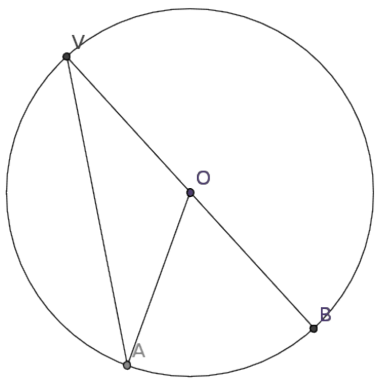


Gli angoli $A\hat{O}B$ e $A\hat{V}B$ hanno per vertice, il primo il centro O, il secondo un punto V della circonferenza non interno all'angolo AOB; i lati di entrambi gli angoli intersecano la circonferenza nei punti A e B. Diremo che gli angoli $A\hat{O}B$ e $A\hat{V}B$ **insistono sullo stesso arco di circonferenza** AB.

Teorema 2.1.40. *Ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.*

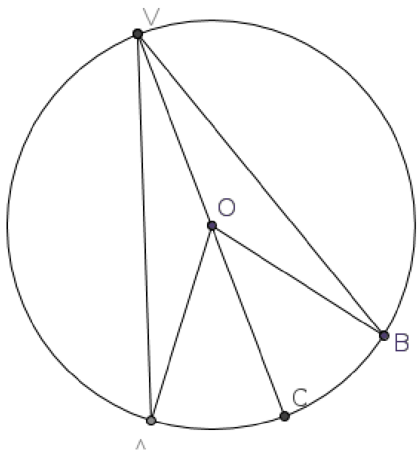
Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema dobbiamo distinguere tre casi nel caso i due lati dell'angolo alla circonferenza sono secanti e tre se uno dei due è tangente. Riporterò la dimostrazione solo nei primi tre casi.

- Nel primo caso



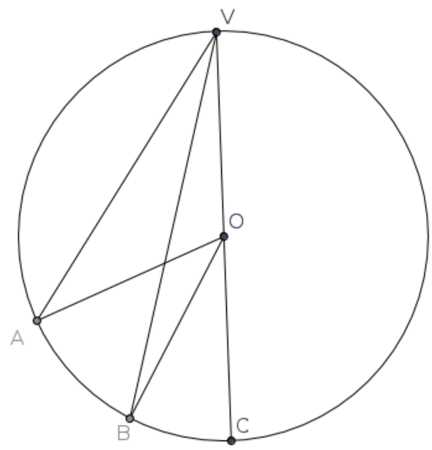
  l'angolo $A\hat{O}B \cong A\hat{V}B + V\hat{A}O = 2A\hat{V}B$. Di conseguenza $A\hat{V}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$.

- Il secondo caso è il seguente:



  Tracciando il diametro VC, per quanto detto nel caso 1 si ha che $A\hat{V}C \cong \frac{A\hat{O}C}{2}$ e $B\hat{V}C \cong \frac{B\hat{O}C}{2}$. Sommando membro a membro le due relazioni si ha la tesi.

- Anche nel terzo caso va tracciato il diametro VC



Per quanto detto nel caso 1 si ha che $A\hat{V}C \cong \frac{A\hat{O}C}{2}$ e $B\hat{V}C \cong \frac{B\hat{O}C}{2}$. Per differenza si ottiene la tesi.

□

Corollario 2.1.41.

- *In una circonferenza gli angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco, o su archi congruenti sono congruenti.*
- *Ogni angolo iscritto in una semicirconferenza è retto.*
- *Ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è retto.*

2.2 Diario di bordo

Il diario di bordo, espressione usata di solito per indicare un libro che contiene tutte le informazioni su un viaggio, in questo caso è inteso come un resoconto di ogni lezione.
Per ogni lezione, infatti, ho riportato "minuto per minuto", oltre agli argomenti introdotti, domande dei ragazzi, impressioni, difficoltà, esperimenti più o meno riusciti. Le pagine seguenti sono una vera e propria "cronaca" della sperimentazione.

2.2.1 Lezione 0- 26 Gennaio 2011

Alunni presenti:16
Ho chiamato questa prima lezione "lezione 0" perché in realtà è stato un confronto con una piccola rappresentanza della classe. I ragazzi mi avevano già visto due volte, quando avevo assistito alle lezioni tenute dalla docente. La maggior parte della classe era impegnata nel compito di recupero del primo quadrimestre. Ho sfruttato questa occasione per capire il livello medio-alto della classe confrontandomi con gli alunni che non dovevano sostenere la prova.
Gli interessati erano tre, due ragazze e un ragazzo, di provenienze diverse: due infatti avevano sostenuto i primi due anni di scuola superiore presso il Liceo Scientifico "Leonardo Da Vinci" (è quindi il primo anno che si trovavano nella III BL del "Liceo Psico-Pedagogico Galileo Galilei"), la terza invece aveva fatto parte della classe per tutto il primo ciclo (è stata quindi colei che mi ha dato le informazioni più preziose sulle competenze del resto della classe).
Inizialmente mi sono presentata e ho spiegato che stavo facendo un percorso di tirocinio sul quale poi avrei scritto la mia tesi di laurea magistrale. Ho spiegato che sono un'"insegnante del futuro" e che per me era la prima esperienza in una scuola non in veste di studente. Poi ho cominciato a descrivere a grandi linee il mio progetto e i collegamenti che avrei voluto fare con le scienze e l'astronomia.
Ho cominciato a fare delle domande sugli argomenti che sarebbero serviti per il progetto di tirocinio. Le definizioni base della geometria mi sono sembrate acquisite in alcuni casi (rette, piani, angoli), più incerte in altri (cerchio, circonferenza). Ricordo che gran parte delle conoscenze di questi ragazzi provengono dalla scuola media inferiore in quanto il professore dei primi due anni ha affrontato quasi esclusivamente argomenti di algebra.
Ho chiesto ai tre ragazzi se avevano mai sentito parlare di "angoli alterni interni, corrispondenti, etc" e i due ragazzi provenienti dallo scientifico hanno annuito (fa parte infatti del programma di prima liceo Scientifico), contrariamente alla ragazza della classe che non aveva mai sentito tali definizioni (ho capito quindi che sarebbe stato un argomento da affrontare interamen-

te).
Ho disegnato una circonferenza in un foglio e ho chiesto di indicarmi il cerchio e la circonferenza e qui, con mio stupore, hanno trovato non poche difficoltà. Non erano sicuri della differenza tra questi, pensavano addirittura che fossero la stessa cosa!! Per di più questa era la parte di ragazzi che avevano più dimestichezza con la matematica. Era chiaro quindi che l'avvertimento della docente era esatto. La sfida iniziale era quella di far metabolizzare alla classe i concetti di base della geometria.
Ho parlato poi di angolo al centro e angolo alla circonferenza e della relazione che c'è tra i due angoli di questo tipo che insistono sullo stesso arco (sapevo che forse avrebbero potuto avere difficoltà a capirmi). E poi ho affermato che "ogni triangolo iscritto in una semicirconferenza è rettangolo. Sapete dirmi perché?". Due dei tre alunni erano pensierosi, il terzo dopo aver riflettuto qualche secondo ha dato la risposta, applicando con notevole precisione e con un linguaggio adeguato il teorema che avevo solo enunciato e illustrato graficamente pochi minuti primi. Immediatamente c'è stato un "ahhh" di conferma degli altri due ragazzi che hanno capito il procedimento da usare.
Ho chiesto poi se avevano idea di che cosa volesse dire che "due triangoli sono simili" e uno ha risposto: "se sono uguali!". Ho spiegato che quello che era stato detto non era totalmente sbagliato, ma era solo un caso particolare di triangoli simili. Ho illustrato la situazione spiegando che trasformare un triangolo in uno simile è come allargare, muovendo alla stessa velocità le braccia, un triangolo formato con le dita da un elastico. La definizione è sembrata subito più chiara.
Nell'ultima parte di questo mini-confronto ho dato qualche accenno della parte fuori del programma che faremo, quella sulle applicazioni astronomiche. Ho parlato loro del Sole, di come si muove la Terra rispetto ad esso, dell'asse terrestre, chiedendo se avevano mai fatto Geografia Astronomica. La situazione si è invertita e la ragazza che aveva fatto tutto il percorso con la III BL mi ha detto che era parte del programma di prima di "Scienze della Terra", mentre i ragazzi provenienti dallo scientifico si ricordavano qualcosa dalle medie e sapevano alcuni fatti perché letti in ambiti extra-scolastici.
Ho cercato di dare un accenno dell'esperienza di Eratostene, ma era un po' troppo complicata da spiegare senza un supporto visivo quindi non credo che mi abbiano seguito molto.
Alla domanda finale "Vi interessa questo progetto?" sono sembrati tutti d'accordo che era una cosa carina e particolare da studiare a scuola.

2.2.2 Lezione 1- 9 Febbraio 2011

Alunni presenti: 15

Vista l'assenza della geometria nei programmi dei primi due anni, seguendo le indicazioni della Prof.ssa Bianchin e del Prof. Ottaviani, ho pensato di cominciare il mio percorso dagli argomenti di base della geometria. Essendo la mia prima lezione non nego un po' di timore riverenziale più mio nei loro confronti che loro nei miei confronti.

Ho deciso di affrontare la parte dei prerequisiti con lezioni frontali scrivendo alla lavagna, cercando di abituarli al linguaggio geometrico-matematico e identificando le definizioni e i teoremi. Tra l'altro la docente si è impegnata fin dall'inizio dell'anno ad educarli alla scrittura di un problema matematico, evidenziando ipotesi e tesi. Non sono risultati quindi sorpresi del linguaggio "formale" usato. Prima domanda: "Che cos'è una linea?": come previsto ci sono state risposte un po' confuse (sempre di più oggi si "tira a caso"). Qualcuno ha esordito dicendo "è un segmento!", "una retta". Poi tracciando una serie di punti a intervalli regolari ho chiesto se fosse una linea. E in coro mi hanno detto di no. Disegnando poi una linea senza staccare il gesso dalla lavagna, ho chiesto se ora avevo disegnato l'oggetto che volevamo e, sempre in coro, mi hanno risposto di sì. Ho chiesto allora quale fosse la differenza tra i due oggetti e finalmente siamo arrivati alla risposta cercata, cioè " non si deve mai staccare il gesso dalla lavagna!". A quel punto abbiamo cominciato a parlare di alcune "linee" particolari cioè le linee rette. Anche in questo caso ero sicura che il concetto fosse bene impresso nelle loro menti, ma notavo una certa incertezza nel formalizzarlo e spiegarlo in maniera comprensibile. Guidandoli siamo arrivati a capire che una linea retta è quell'oggetto che si ottiene prolungando all'infinito una linea tracciata con un righello. Fino a questo punto la classe mi è sembrata abbastanza convinta. Effettivamente erano argomenti noti e i momenti vari di imbarazzo possono essere stati causati da questa difficoltà che spesso i ragazzi hanno nel tradurre l'idea che è chiara in testa in italiano (come spiega più volte [8]).

Ho cominciato poi a dare alcune definizioni sulla posizione reciproca tra due rette, ponendo particolare attenzione nella descrizione della differenza tra rette parallele (concetto chiaro da molto tempo) e rette sghembe (molto più oscuro e nebuloso). Per spiegar loro cosa sono le rette sghembe ho cominciato dicendo che sono anch'esse due rette che non si incontrano mai ma che non sono "complanari" cioè "non stanno sullo stesso piano". L'esempio che mi è venuto in mente al momento è il seguente: ho detto loro di considerare la cattedra; due lati maggiori del piano superiore come sono? Paralleli. Se invece consideriamo ad esempio la diagonale del piano superiore (quello dove viene appoggiato il registro di classe) e il lato maggiore del rettangolo immaginario che abbia per vertice le "zampe della cattedra" e prolunghiamo questi segmenti all'infinito abbiamo costruito due rette che non si incontrano mai, come quelle di prima, ma che non stanno sullo stesso piano e che

quindi sono sghembe.
Dopo di questo sono passata al ripasso degli angoli. Anche qui alcuni problemi di formalizzazione, ma mi è sembrato che più o meno tutti avessero le idee chiare sul concetto di angolo. Un po' di confusione invece per quanto riguarda le varie definizioni di angoli consecutivi, adiacenti, complementari, supplementari, esplementari. Ho quindi disegnato le varie possibilità della posizione reciproca tra due angoli. Ho chiesto poi se sapessero che cosa fossero due angoli opposti al vertice. La risposta non è stata univoca. Quindi ho disegnato due rette incidenti e indicando gli angoli formatisi con le lettere greche e ho spiegato che quelli sono angoli opposti al vertice a due a due (indicando chi è opposto a chi nel disegno). A quel punto chiedendo "due angoli opposto al vertice come saranno?" quasi tutta la classe ha risposto "Uguali!", ma alla mia domanda "Perché?" c'è stato un momento iniziale di imbarazzo e qualche voce che diceva "beh si vede!". Alla richiesta di una risposta più precisa uno dei ragazzi ha cominciato a parlare di angoli supplementari e, capendo che era sulla strada della risoluzione, l'ho invitato a scrivere alla lavagna la dimostrazione, cosa che poi ha fatto in maniera esatta.
L'ultima parte della lezione è stata poi dedicata ai teoremi sulle rette parallele e sulle rette perpendicolari; ho enunciato il teorema relativo alle rette perpendicolari 2.1.16. E qui ho fatto la prima dimostrazione "vera" di un teorema. Tale teorema non è tra i più semplici, infatti nella prima parte vanno applicate le conoscenze sugli angoli opposti al vertice, nella seconda parte invece c'era una costruzione geometrica da fare e poi tramite l'uguaglianza di due triangoli e le proprietà del triangolo isoscele si arriva alla conclusione.
Quando avevo preparato la lezione, pensavo che probabilmente non sarebbero state cose banali, ma credevo che con un po' di tempo sarei riuscita a far capire pressoché a tutti la dimostrazione. La realtà è stata ben diversa, in quanto ho notato che hanno alcuni problemi nel:

- capire le costruzioni geometriche;
- visualizzare le differenti figure geometriche all'interno del disegno;
- capire come applicare gli strumenti che pur conoscono (come ad esempio i criteri di congruenza fra i triangoli).

Sicuramente il fattore stanchezza e noia è stato rilevante in quanto gli argomenti introdotti sono stati molti e la lezione forse un po' troppo veloce e frontale.
Durante la spiegazione infatti ho visto facce alquanto sbalordite che non riuscivano a capire punto per punto che cosa stessi facendo. La lezione è terminata con il disegno di due rette (non parallele) tagliate da una trasversale e con la definizione degli angoli alterni interni, alterni esterni, corrispondenti e coniugati.

A quel punto, visto che la lezione era giunta al termine e il livello di attenzione era calato visibilmente (anche dopo la dimostrazione del teorema) ho terminato la spiegazione e ho lasciato un esercizio da svolgere a casa (la dimostrazione della proposizione 2.1.23).
Impressioni: subito dopo la lezione mi sono confrontata con la Prof.ssa Bianchin che mi ha illuminato su un fatto. La lezione per i ragazzi deve essere più pratica. Dopo la prima mezz'ora il livello di attenzione cala notevolmente, quindi è bene tenerli attenti con esercizi che possano renderli più partecipi.
Un'altra cosa della quale mi sono resa conto è che non sempre la dimostrazione chiarifica le idee. Per noi matematici l'enunciato di una proprietà o di un teorema è solo una parte del teorema che non può essere scissa dalla dimostrazione, altrimenti non ci fidiamo della veridicità.
I ragazzi (anche quelli della III BL), invece, si fidano "anche troppo facilmente" ([8]) di quello che viene detto dal Professore in genere. I dubbi e gli interrogativi vengono (se vengono) quando applicando quello che sanno negli esercizi e essendo sicuri che il loro procedimento (standard) sia giusto, ottengono un risultato sbagliato.

2.2.3 Lezione 2- 14 Febbraio 2011

Alunni presenti:13
Fatto tesoro dei risultati della prima lezione durante la seconda lezione sono partita con l'intenzione di introdurre meno concetti teorici e fare più esercizi.
La mia lezione è cominciata chiedendo agli studenti chi di loro fosse riuscito a risolvere l'esercizio che avevo dato loro la lezione precedente. Ho visto tanti occhi bassi (non ho indagato su chi avesse fatto l'esercizio e chi no). Solo un ragazzo ha alzato la mano dicendo "io non c'ero la volta scorsa". Uno studente, però, si è alzato ed ha dimostrato alla lavagna un caso a scelta dell'esercizio, concludendo esattamente i vari casi. Se vogliamo trovare la pecca nell'esecuzione dell'esercizio è stato il disegno; infatti il ragazzo ha riportato il disegno di due rette qualunque tagliate da una trasversale e non di due rette parallele.
L'ultima cosa che mi era rimasta da dire della lezione precedente (e questa volta ho deciso di farlo senza dimostrazione) era il criterio di parallelismo tra rette. Ho enunciato quindi il teorema cercando di rendere chiara la situazione tramite la figura (anche se non sono sicura di esserci realmente riuscita).
Dopo questo ho dato in consegna alla classe un esercizio da svolgere al proprio posto. La docente mi aveva già avvisato che i ragazzi della classe sono stati abituati a lavorare in gruppo e che malvolentieri vengono alla lavagna (non in forma di interrogazione) a risolvere gli esercizi che vengono loro affidati.
Ho dato quindi alla classe il seguente compito.

Esercizio Si prolunghi la mediana AM di un triangolo ABC di un segmento $MD = AM$. Dimostrare che $BD \parallel AC$.
Ho lasciato poi del tempo per risolverlo mentre giravo tra i banchi a guardare il procedimento che veniva svolto. Ho notato la mancanza di indipendenza di una discreta parte della classe. Molto spesso cercano conferma dal vicino di banco, hanno paura di chiedere una qualsiasi cosa, perché sono pressoché sempre convinti di sbagliare. Ho notato, inoltre, la necessità di essere guidati nella produzione della figura che sarà poi la guida del disegno. Effettivamente nell'esercizio che è stato consegnato loro erano presenti una discreta serie di contenuti che richiedono comunque una certa conoscenza, ad esempio la mediana. Vedendo che molti ragazzi erano in difficoltà sono andata alla lavagna chiedendo che cosa fosse la mediana di un triangolo rispetto un dato lato. Come la lezione precedente le prime risposte sono state confuse: " è la metà del lato" oppure "è la perpendicolare". Avendo definito la mediana rispetto al lato come quel segmento che unisce il punto medio di quel lato con il vertice opposto del triangolo, la totalità (almeno apparente) dei ragazzi si è convinta e hanno ricominciato a risolvere l'esercizio. Girando ancora una volta tra i banchi mi sono resa conto che molti avevano disegnato non dei triangoli qualunque, ma isosceli o equilateri; la mediana risultava quindi coincidere con l'altezza, ecco perché la risposta "la retta perpendicolare". Avendo appurato questa "misconcezione" ([8]) del triangolo sono andata a vedere nei miei appunti e con mio grande stupore nella parte in cui avevo scritto gli appunti della lezione, anche io avevo disegnato un triangolo isoscele (nonostante poi non avessi usato questa ipotesi errata nella risoluzione dell'esercizio). Insomma, anche io in questa situazione sono stata vittima di una misconcezione.
Quando ho capito che almeno la metà della classe era riuscita a disegnare la figura e che qualcuno era riuscito a risolvere l'esercizio, ho chiesto se qualcuno volesse venire alla lavagna, ricevendo una risposta negativa, e quindi ho risolto io l'esercizio alla lavagna. Devo dire che i ragazzi avevano i seguenti dubbi sulla risoluzione:

- cosa significa prolungare un segmento di un segmento di lunghezza assegnata;
- come si fa a far vedere che due segmenti sono paralleli.

Effettivamente almeno il secondo dubbio era lecito in quanto avevo introdotto il criterio di parallelismo solamente all'inizio dell'ora; era quindi il primo esercizio dove entrava in gioco questo teorema. Ho notato inoltre che ancora non avevano una certa confidenza con i criteri di congruenza fra i triangoli e soprattutto sulle conseguenze (se due triangoli sono uguali, allora tutti gli angoli sono uguali e tutti i lati sono uguali).
L'ultimo esercizio che è stato fatto è il seguente:
Esercizio Date due rette parallele tagliate da una trasversale, si considerino

due angoli corrispondenti. Si consideri poi la bisettrice di essi. Dimostrare che le due bisettrici sono anch'esse parallele.
Nello svolgimento di questo esercizio ho notato una certa difficoltà a capire quali fossero gli angoli corrispondenti delle bisettrici rispetto alla trasversale. La difficoltà derivava dal fatto che le due rette non erano poste orizzontalmente rispetto al piano della lavagna ma erano "oblique". Sono stata costretta a ruotare il grafico e solo allora si sono accorti che i due angoli corrispondenti erano uguali. La spiegazione di questo fatto, a mio parere, è che sono stati abituati a vedere sempre gli elementi matematici dal punto di vista più comodo. Nella scuola di oggi si cerca fin dalle elementari di cominciare dai casi più generali per non creare misconcezioni, in realtà nel caso specifico mi sembra che ci siano diverse convinzioni errate nei ragazzi. Devo dire che in generale oggi l'attenzione non era massima. Dopo la lezione ho chiesto alla Prof.ssa se poteva esserci un motivo e secondo lei poteva essere il fatto che era il giorno di San Valentino. Non si è mai abbastanza giovani!

2.2.4 Lezione 3. 21 Febbraio 2011

Alunni presenti: 15
La lezione numero 3 è stata dedicata alla circonferenza e al cerchio. E in questa occasioni si è verificato quello che avevo già sperimentato nella Lezione 0. C'è effettivamente una discreta confusione tra cosa sia il cerchio e cosa la circonferenza. Quando ho cominciato la lezione chiedendo quale fosse la definizione di circonferenza qualcuno ha risposto: "è un cerchio". Poi ho cercato di andare più a fondo e sono cominciate a venire fuori definizioni simpatiche. Siamo arrivati alla conclusione che c'era un raggio. Poi che di raggio non ce n'era uno solo, ma infiniti. E alla mia domanda "Come sono questi raggi fra loro?" Tutti hanno risposto: "Uguali". E così ho dato la definizione di circonferenza, specificando che la circonferenza è solo il bordo del disegno. Poi sono passata al cerchio e qualcuno è intervenuto dicendo: "Ah, ma allora nel cerchio ci sono anche i punti dentro!". A quel punto un altro intervento: "Quindi la circonferenza è il perimetro del cerchio!". Esatto! Quest'intervento mi ha fatto capire che i concetti di perimetro e area sono perfettamente metabolizzati dai ragazzi. Anche in base alle mie reminiscenze delle scuole elementari e medie, molto tempo viene trascorso a effettuare calcoli di aree e perimetri. Molto meno tempo è dedicato all'osservazione e al ragionamento sulla figura.
A quel punto ho affermato che per tre punti passa una e una sola circonferenza e la Prof.ssa mi ha detto che sarebbe stato opportuno fare la costruzione per farlo vedere (2.1.30). Nessuno sembra aver avuto problemi a capirla anche se effettivamente la costruzione con gli assi non è completamente banale. Deduco che se avessi indagato un po' di più sull'effettiva comprensione della costruzione ci sarebbero stati diversi ragazzi con abbastanza dubbi.

A quel punto ho dato la definizione di corda e ho chiesto se sapessero quale fosse il diametro e qualcuno ha risposto “Il doppio del raggio”. Ed io “Sì ma rispetto alla definizione” che abbiamo dato di corda e loro “quella più lunga”. Alla fine dopo un po’ di domande e risposte siamo arrivati a capire che il diametro è quella corda che passa per il centro della circonferenza. Ho deciso di non soffermarmi molto sulle proprietà delle corde (perpendicolari per il centro etc.), perché non sarebbero state molto importanti ai fini del nostro lavoro di sperimentazione e perché sono proprietà non banali e che necessiterebbero quindi di una dimostrazione. Ho preferito concentrarmi sulle definizioni di arco, settori circolari e nessuno sembrava particolarmente dubbioso sulla nomenclatura. Un ragazzo guardando il disegno della corda che avevo precedentemente fatto mi ha chiesto se la parte di cerchio che stava tra la corda e l’arco di circonferenza era un settore circolare e così mi sono resa conto di aver dimenticato di definire il segmento circolare, evidenziando la differenza tra esso e il settore.
A quel punto sono passata alla posizione reciproca tra retta e circonferenza, angoli al centro e angoli alla circonferenza. Sul concetto di angolo alla circonferenza c’è stato un dibattito carino; prima di aver dato la definizione di angolo alla circonferenza l’ho disegnato su una circonferenza e, erroneamente, ho detto che la proprietà è che il vertice dell’angolo deve stare sulla circonferenza. A quel punto riguardando il disegno in cui avevo spiegato cosa fosse la retta tangente, qualcuno mi ha detto: ma allora anche quell’angolo è un angolo alla circonferenza. Lì mi sono accorta di aver lasciato delle ipotesi importanti. A quel punto ho specificato che uno dei lati dell’angolo deve essere secante alla circonferenza e l’altro secante o tangente. Vedendo delle facce molto perplesse ho disegnato entrambi i casi, anche se non riuscivano a vedere l’angolo con un lato tangente alla circonferenza come angolo plausibile. Ho detto poi il legame tra i due tipi di angoli e ho fatto osservare che ogni triangolo inscritto (non mi sembra che abbiano problemi con questo termine) in una semicirconferenza è rettangolo. Ho detto loro quindi: “Se non sapete come fare e volete disegnare un angolo retto e avete un compasso e una riga, questa proprietà vi dà la soluzione.” A questa affermazione è seguita la risposta seguente “ Ma se abbiamo la riga allora cosa ci vuole a disegnare un angolo retto?” E io e come fai? “ Beh si vede” E gli ho detto,“Se non hai il foglio quadrettato non puoi essere sicura che lo sia”, ma non credo di essere stata capita. In realtà, ripensandoci, disegnare un triangolo rettangolo è tutto sommato facile se si utilizza lo spigolo della riga. Non so, però, se la ragazza in questione avesse fatto tale ragionamento.
Ho lasciato i seguenti esercizi per casa:
Esercizio 1: Sia γ una circonferenza di diametro AB. Condotta da B una semiretta che incontra la circonferenza nel punto E, traccia da E il diametro EF. Dimostra poi che gli archi AE e FB sono congruenti.
Esercizio 2: Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Prolungato il lato BC dalla parte di C di un segmento $CE \cong BC$, dimostra che la circonferen-

za di centro C e raggio uguale a EC passa per i vertici A e B.
Esercizio 3: Data una circonferenza di centro O siano A e B due suoi punti non allineati con O. Presi sulle semirette OA e OB due punti P e Q tali che $OP \cong OQ$, dimostra che le rette AB e PQ sono tra loro parallele.

Capitolo 3

Seconda parte della sperimentazione: teorema di Talete e similitudine fra triangoli

Questo capitolo è strutturato allo stesso modo del precedente. Il primo paragrafo, il materiale presentato, contiene gli argomenti teorici introdotti in classe; il secondo, il diario di bordo, è la consueta cronaca della sperimentazione.

3.1 Materiale presentato

Come nel capitolo precedente, il paragrafo dedicato al materiale presentato è pensato per la lettura degli alunni di una scuola secondaria superiore. Il linguaggio sarà quindi semplice e comprensibile anche da un "pubblico non esperto".
Gli argomenti introdotti in questa sezione sono la corrispondenza di Talete, le proporzioni tra grandezze, la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio, il Teorema di Talete e la similitudine tra triangoli. È qui che si pongono le basi per l'introduzione degli argomenti del capitolo successivo.

3.1.1 Corrispondenza di Talete

I prossimi contenuti saranno di fondamentale importanza per l'introduzione del Teorema di Talete. Come forma ho usato quella del libro [4].

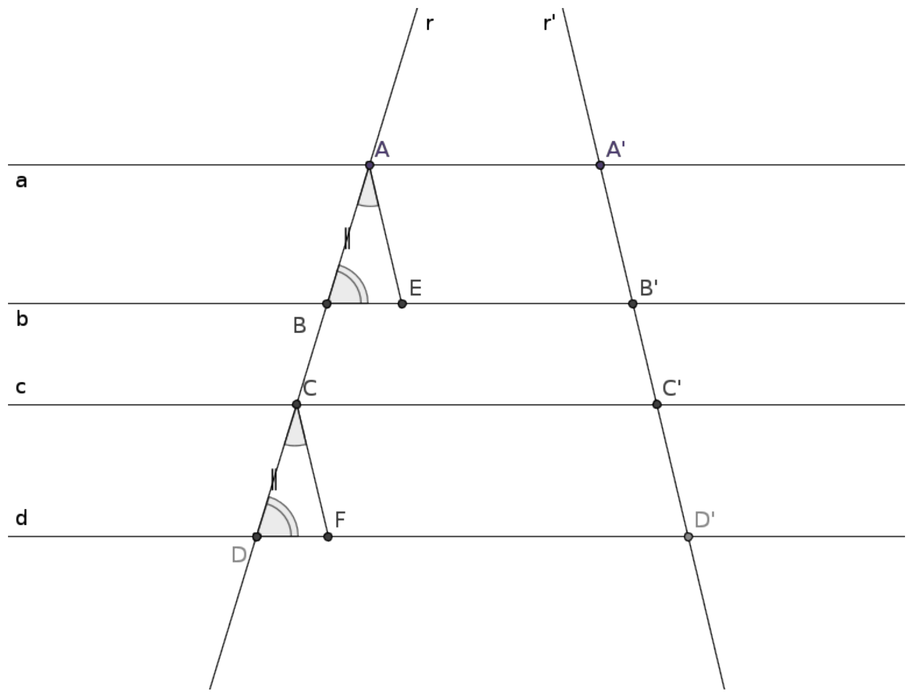
Definizione 3.1.1. L'insieme delle rette di un piano parallele si chiama fascio di rette parallele o fascio improprio di rette.

Definizione 3.1.2. Una retta che taglia una retta di un fascio di rette parallele le taglia tutte e si chiama **trasversale** del fascio.

Definizione 3.1.3. Se un fascio di rette è tagliato da due trasversali si dicono corrispondenti i punti delle due trasversali che sono tagliati dalla stessa retta del fascio.

Teorema 3.1.4 (Corrispondenza di Talete)**.** *Se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti dell'una corrispondono segmenti congruenti dell'altra.*

Dimostrazione. Se le due trasversali r e r' sono parallele fra loro quelli che si formano sono due parallelogrammi, la tesi è quindi banale.
Altrimenti si conducano le parallele ad r' dai punti A e C che incontreranno rispettivamente le rette b e d nei nei punti E e F.

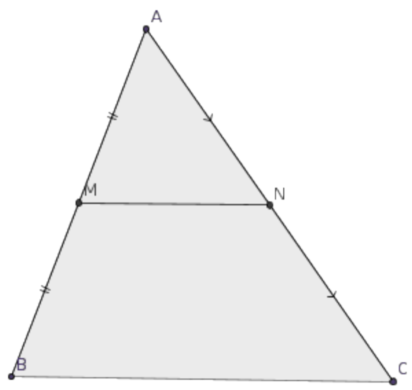


AE e CF sono paralleli alla stessa retta r' quindi sono paralleli tra loro. Quindi per il teorema 2.1.25 $D\hat{C}F \cong B\hat{A}E$ perché angoli corrispondenti di rette parallele. Allo stesso modo $A\hat{B}E \cong C\hat{D}F$. Inoltre, per ipotesi $AB \cong CD$, quindi per il secondo criterio di congruenza dei triangoli i triangoli ABE e CDF sono uguali. Quindi $AE \cong CF$. Ma $AE \cong A'B'$ e $CF \cong C'D'$ perché lati opposti di un parallelogramma. Quindi $A'B' \cong C'D'$. □

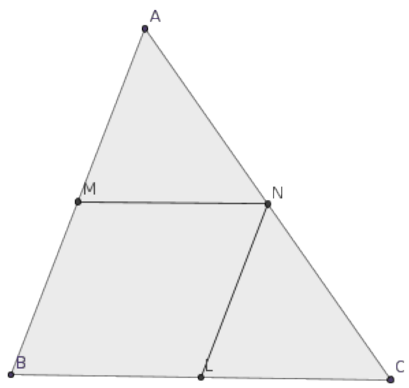
Corollario 3.1.5. *Se per il punto medio di un lato qualunque di un triangolo qualunque si traccia la parallela alla base (o ad un altro lato) questa dimezza il lato rimanente.*

Teorema 3.1.6. *In un triangolo qualunque il segmento congiungente i punti medi dei due lati è parallelo al terzo e congruente alla sua metà per 3.1.5.*

Dimostrazione. Da M, punto medio di AB, traccio la parallela alla base BC. Essa intersecherà AC nel suo punto medio N per 3.1.5.



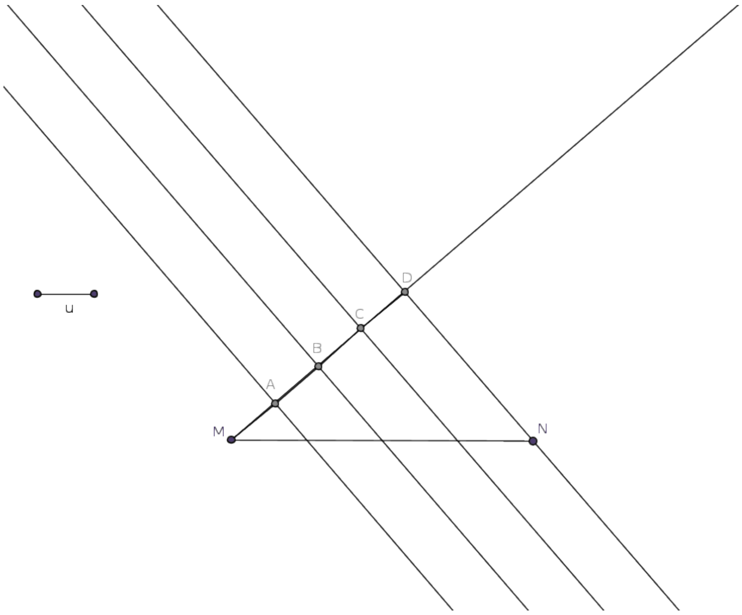
Se da N conduco la retta parallela ad AB avrò che L sarà il punto medio di BC. MN e BL saranno uguali perché lati opposti di un parallelogramma.



Quindi $MN \cong BL \cong \frac{BC}{2}$.

□

Applicazione: dividere un segmento in n parti uguali. Sia MN un segmento da dividere in n parti uguali. Supponiamo di avere un segmento, che chiameremo u e sarà la nostra unità. Da M conduciamo una semiretta arbitraria e sopra di essa, a partire da M si riporti il segmento u consecutivamente n volte. Per la nostra spiegazione da questo momento considereremo il caso $n = 4$.



I segmenti che si formeranno sulla semiretta tracciata saranno MA, AB, BC e CD. Si unisca quindi D con il punto N. Per i punti A, B, C si conducano le parallele a ND. Esse intersecheranno il segmento MN in quattro punti che lo divideranno in quattro parti uguali per 3.1.4.

3.1.2 Proporzioni fra grandezze

Definizione 3.1.7. Supponiamo di avere quattro numeri reali a, b, c, d con $b, d \neq 0$. Essi si dicono **in proporzione** se i rapporti $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono uguali cioè se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ \textit{che si può scrivere come} } a : b = c : d.$$

a e d vengono chiamati **estremi** della proporzione, mentre b e c sono i **medi**.

Definizione 3.1.8. Un insieme di enti della stessa specie costituisce una **classe di grandezze** quando fra gli enti stessi si possono porre i concetti di confronto e di somma ed esiste perciò:

1. un criterio mediante il quale, dati due enti della medesima classe, si possa stabilire se sono uguali, oppure se uno è maggiore e uno è minore dell'altro;

2. un secondo criterio in cui, dati due elementi dell'insieme, possiamo trovare un altro elemento dell'insieme che possa chiamarsi **somma** dei primi due.

Le grandezze di una stessa specie si dicono **omogenee**. Per esempio sono insiemi di grandezze omogenee:

- l'insieme delle lunghezze dei segmenti;
- l'insieme delle ampiezze degli angoli;
- l'insieme delle aree delle superfici piane.

Il concetto di proporzione può quindi essere esteso a classi di grandezze omogenee.

Definizione 3.1.9. Quattro grandezze A, B, C, D, omogenee fra loro le prime due e omogenee fra loro le ultime due si dicono in proporzione se il rapporto tra A e B, rispetto alla propria unità di misura, è uguale al rapporto tra C e D, ancora rispetto alla loro unità di misura. Si scrive:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ \textit{oppure} } A : B = C : D$$

Definizione 3.1.10. Una proporzione si dice **continua** se i medi sono uguali, quindi se è del tipo

$$A : B = B : C$$

B è detto **medio proporzionale** fra A e C.

Enunciamo quella che è chiamata **proprietà fondamentale delle proporzioni**.

Proposizione 3.1.11. *Quattro numeri in un dato ordine sono in proporzione se e solo se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.*

Definizione 3.1.12. Se due grandezze sono **direttamente proporzionali** allora il rapporto tra le misure delle grandezze che si corrispondono è costante. Due grandezze si dicono invece **inversamente proporzionali** se il prodotto tra le misure delle grandezze che si corrispondono è costante.

Il seguente teorema è detto **criterio generale di proporzionalità** e sarà molto importante per la dimostrazione del Teorema di Talete.

Teorema 3.1.13. *Condizione necessaria e sufficiente affinché le grandezze di due insiemi in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che:*

1. *a grandezze uguali dell'uno corrispondano grandezze uguali dell'altro;*
2. *alla somma di due o più grandezze qualunque del primo insieme corrisponda la somma delle grandezze corrispondenti del secondo insieme.*

Una conseguenza immediata di questo criterio è il fatto che se due insiemi di grandezze della stessa specie sono direttamente proporzionali la somma di quante si vogliano grandezze del primo insieme sta alla somma delle corrispondenti grandezze del secondo come ogni grandezza del primo sta alla corrispondente del secondo.

Osservazione critica su 3.1.13

Il teorema 3.1.13 dice che dati due insiemi A e A' di grandezze e data una funzione biettiva $f : A \to A'$ lineare, allora le due classi di grandezze sono direttamente proporzionali.
In realtà questo non è condizione sufficiente perché si verifichi: infatti, se prendo $A = A' = \mathbb{R}$ la linearità di f non basta se non è accompagnata dalla continuità.
Vediamo un controesempio: $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ di dimensione infinita. Restringiamoci al sottospazio $\mathbb{Q}(\pi)$ di $\mathbb{R}$, di dimensione 2 su $\mathbb{Q}$ e con la seguente base $(1, \pi)$. Definiamo su $Q(\pi)$ la seguente funzione:

$$g : \mathbb{Q}(\pi) \to \mathbb{Q}(\pi)$$

$$a + b\pi \to a - b\pi$$

g è una funzione biettiva e lineare; per 3.1.13 questo basterebbe per determinare che le grandezze in corrispondenza siano direttamente proporzionali.
Quindi dato $x = a + b\pi$, con $a, b \in \mathbb{Q}$ e $y = 1$, elementi di $\mathbb{Q}(\pi)$ avremo che:

$$f(x) : f(y) = x : y$$

$$(a - b\pi) : 1 = (a + b\pi) : 1$$

$$a - b\pi = a + b\pi$$

vero solo se $b = 0$, quindi se $x = a \in \mathbb{Q}$.
Questo ci dice che non mi basta la linearità della funzione biunivoca tra i due insiemi, ma anche la continuità (nel caso stiamo parlando di reali naturalmente) è richiesta.
La funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dovrà essere del tipo $g(x) = kx$ dove $k = g(1)$. Infatti

$$g(x) : g(1) = x : 1$$

$$g(x) = g(1)x$$

Per i miei scopi con la classe basterà comunque la formulazione 3.1.13.

3.1.3 Lunghezza della circonferenza e area del cerchio

Circonferenza

Misurare la lunghezza di una linea non è cosa banale. Dobbiamo effettuare un processo detto di **rettificazione**. Intuitivamente quello che bisogna fare è distendere sopra a tale linea un filo flessibile e inestensibile. Successivamente stacchiamo il filo, gli facciamo assumere l'aspetto di un segmento e ne misuriamo la lunghezza. Questa lunghezza sarà la **lunghezza della linea**.
Possiamo procedere in questo modo anche per la circonferenza, ma possiamo trovare una formula sicuramente più comoda per la facilità nell'applicarla.
Grazie alla lunghezza del raggio possiamo infatti arrivare direttamente alla misura della lunghezza della circonferenza grazie ad un'osservazione sperimentale, anche se esiste anche una dimostrazione teorica [1]; se rettifichiamo con il procedimento espresso sopra più circonferenze possiamo osservare che il rapporto tra lunghezza di esse (c_1,c_2,c_3...) e rispettivi diametri rimane costante (d_1,d_2,d_3...), cioè:

$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \frac{c_3}{d_3} = \pi$$

dove π è una famosa costante, non dipendente quindi dalle circonferenze scelte.
Abbiamo quindi che, poiché il diametro è il doppio del raggio, data una generica circonferenza di raggio r, indicando con c la sua lunghezza varrà che $\frac{c}{2r} = \pi$ da cui si ricava che:

$$c = 2\pi r$$

[1] Non ho accennato al tipo di dimostrazione teorica, perché sia la dimostrazione per via analitica, sia quella usante i poligoni richiedono la conoscenza del concetto di limite, che naturalmente i ragazzi non conoscono.

Area del cerchio

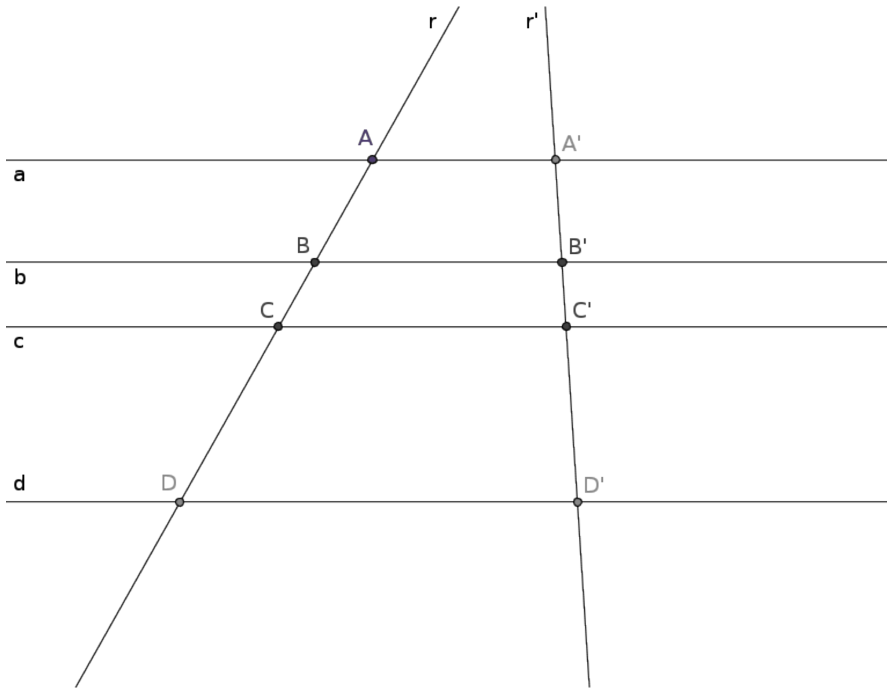
La costante π trovata prima ha un ruolo di primo piano anche nel calcolo dell'area di un cerchio. Dato un cerchio, conoscendo la lunghezza del suo raggio, possiamo ricavarci la misura dell'area. Essa è $A = \pi r^2$ [2].

3.1.4 Teorema di Talete

Il seguente teorema è il celeberrimo **Teorema di Talete**.

Teorema 3.1.14. *Un fascio di rette parallele determina sopra due trasversali due insiemi di segmenti direttamente proporzionali.*

Dimostrazione. Abbiamo già definito nella sezione 3.1.1 cosa si intende per punti e segmenti corrispondenti su rette parallele tagliate da due trasversali. Consideriamo la classe delle lunghezze dei segmenti sulla trasversale r e la classe delle lunghezze dei segmenti sulla trasversale r' e verifichiamo che sono soddisfatte le condizioni di 3.1.13.



1. A segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sulla seconda trasversale per 3.1.4.

2. Alla somma di due segmenti di r corrisponde la somma dei segmenti corrispondenti di r'.

$$AB + BC = AC \text{ e } A'B' + B'C' = A'C'$$

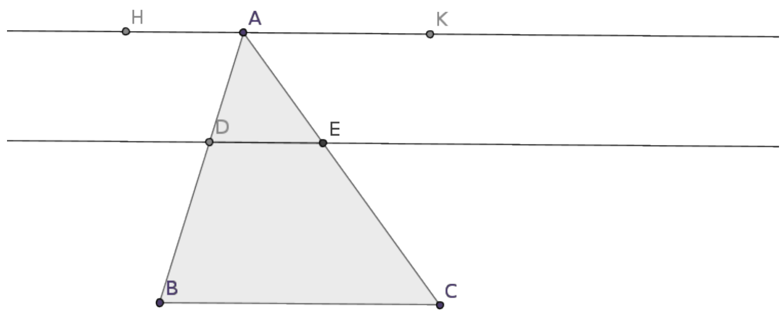
[2] Anche in questo caso non ho accennato alla dimostrazione per la chiara difficoltà che avrebbero avuto i ragazzi a capire strumenti che non conoscono.

dove $(AB; A'B'), (BC; B'C'), (AC; A'C')$ sono coppie di segmenti corrispondenti secondo la definizione 3.1.3.

□

Corollario 3.1.15. *La parallela a un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.*

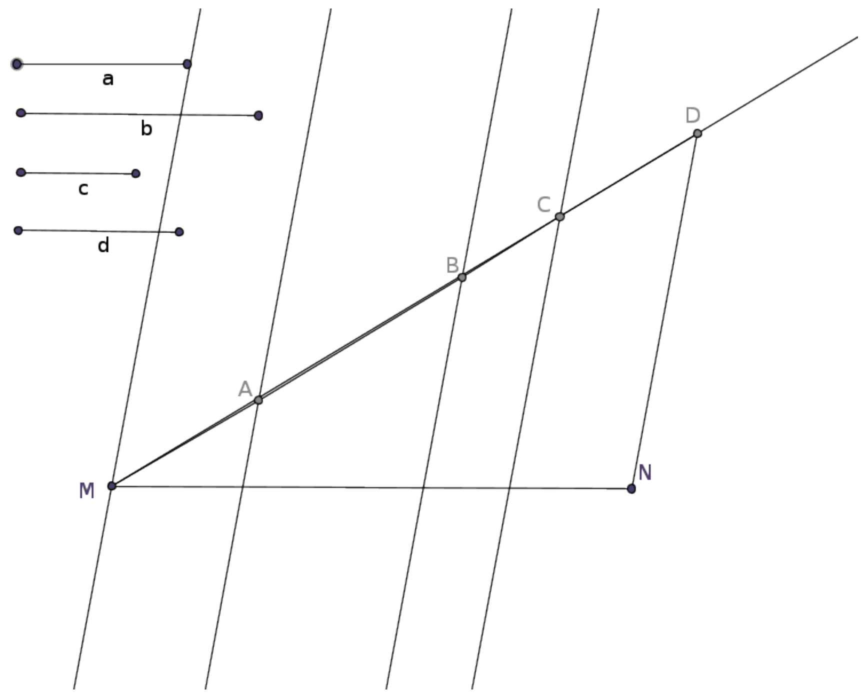
Dimostrazione. Sia dato un triangolo ABC e siano D ed E i punti in cui i lati AB, AC sono tagliati da una parallela a BC.



Si conduca per il vertice A la parallela HK allo stesso lato BC. Dal teorema di Talete applicato alle tre parallele BC,DE,HK tagliate dalle due trasversali AB, AC deriva che i segmenti AD, DB, AB sono rispettivamente proporzionali a AE, EC, AC. □

Applicazione: dividere un segmento in parti direttamente proporzionali a più segmenti dati.

Sia MN il segmento da dividere in parti direttamente proporzionali, per esempio, ai segmenti dati a, b, c, d. Dal punto M si conduca una semiretta arbitraria e sopra di essa, a partire da M, si riportino i segmenti consecutivi MA, AB, BC, CD rispettivamente congruenti ad a, b, c, d. Si unisca l'ultimo estremo D con N e per A, B, C si conducano le parallele a DN. Queste incontreranno il segmento MN in tre punti che formeranno i quattro segmenti proporzionali ai segmenti di partenza per 3.2.4.

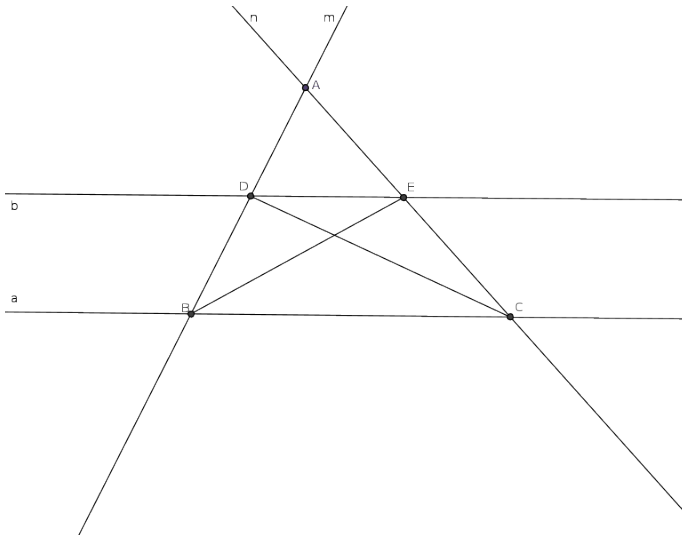


Dimostrazione di Euclide del Teorema di Talete.

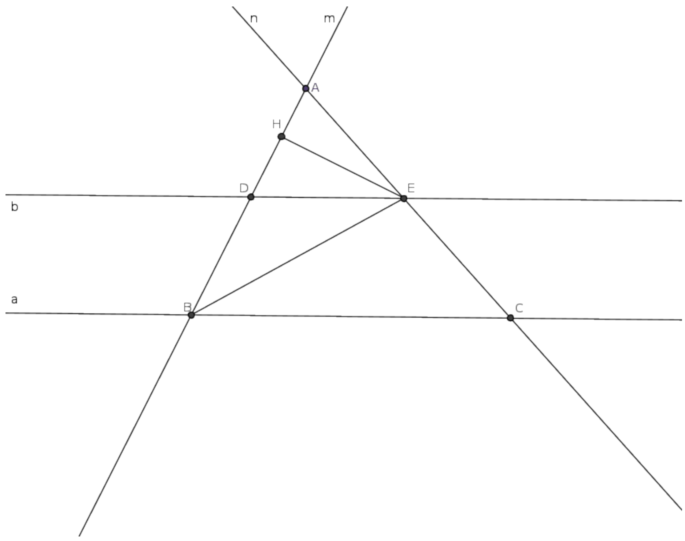
Il procedimento che abbiamo dato per dimostrare il teorema di Talete è quello di passare attraverso il criterio di proporzionalità, con le dovute attenzioni del caso. Euclide nel secondo libro dei suoi "Elementi" ne dà una dimostrazione geometrica in cui sfrutta le proprietà dell'area. Essa necessita di una buona abilità con le figure piane e di una buona visione del disegno. Rispetto alla precedente forse è più di immediata comprensione; nonostante ciò la maggior parte dei libri di testo per le scuole superiori riportano l'altra.

Teorema 3.1.16. *Un fascio di rette parallele determina sopra due trasversali due insiemi di segmenti direttamente proporzionali.*

Dimostrazione. Siano a e b due rette parallele e A un punto esterno posto come nella figura seguente. Da A si traccino due rette m e n che intersecano le rette a e b rispettivamente nei punti D, E e B, C. Si uniscano B con E e C con D.



Consideriamo i triangoli BDE e DEC. Essi avranno la stessa area poiché la base DE è in comune e l'altezza in entrambi i casi è la distanza tra le parallele a e b.
Consideriamo ora i triangoli BDE e ADE. Essi hanno in comune l'altezza pari alla distanza del punto E dalla retta m (segmento EH).



Quindi:

$$area(BDE) = \frac{BD * EH}{2} \text{ e } area(ADE) = \frac{AD * EH}{2}$$

Isolando in entrambe le eguaglianze il termine $\frac{EH}{2}$ possiamo impostare la seguente proporzione:

$$area(BDE) : area(ADE) = BD : AD$$

Ora, se ripetiamo tale procedimento per i triangoli CDE e ADE possiamo impostare la proporzione seguente:

$$\mathit{area}(CDE) : \mathit{area}(ADE) = CE : AE$$

Ma, per come osservato precedentemente, i due triangoli BDE e CDE hanno la stessa area, quindi i primi membri delle due proporzioni sono uguali. Possiamo quindi scrivere:

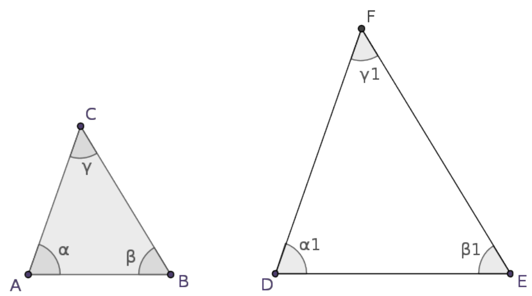
$$BD : AD = CE : AE$$

□

3.1.5 Similitudine fra triangoli.

Definizione 3.1.17. Due triangoli si dicono **simili** se hanno ordinatamente i tre angoli congruenti e i tre lati in proporzione.

In due triangoli simili i vertici degli angoli congruenti si dicono **corrispondenti**, così come corrispondenti sono i lati opposti agli angoli congruenti.

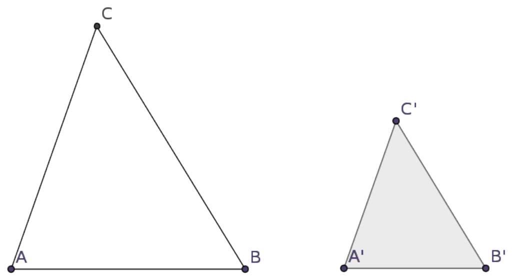


Al rapporto di due lati corrispondenti si dà il nome di **rapporto di similitudine**. Quando si vuole dimostrare che due triangoli sono simili, non bisogna verificare tutte le condizioni, perché alcune ne implicano altre. I seguenti criteri, ci mostrano delle condizioni sufficienti a dimostrare che due triangoli sono simili.

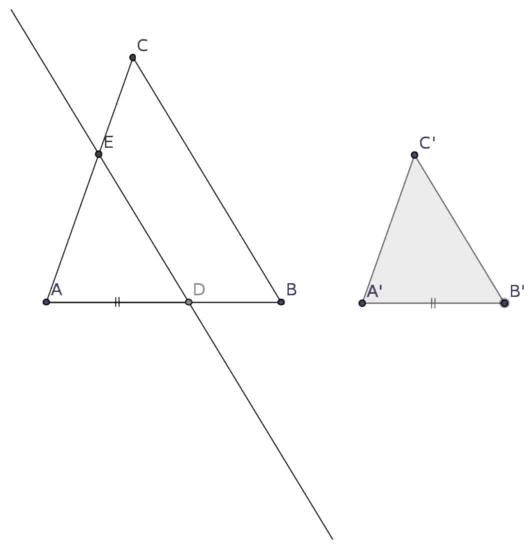
Teorema 3.1.18 (1° criterio di similitudine)**.** *Se due triangoli hanno due angoli ordinatamente congruenti sono simili.*

Siano ABC, $A'B'C'$ due triangoli aventi gli angoli $B\hat{A}C$ uguale a $B'\hat{A}'C'$ e $A\hat{B}C$ uguale a $A'\hat{B}'C'$ (perciò anche $A\hat{C}B$ congruente a $A'\hat{C}'B'$); per dimostrare che i due triangoli sono simili, ricordando la definizione di triangoli simili, occorrerà dimostrare che:

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C' \tag{3.1}$$



Se fosse $AB \cong A'B'$, i due triangoli avendo due angoli e il lato tra essi compreso rispettivamente congruenti, sarebbero congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli, quindi anche simili.
Escluso tale caso, se ad esempio $AB > A'B'$. Si segni, come nella figura successiva, su AB il punto D tale che risulti $AD \cong A'B'$ e si conduca da esso la retta parallela al lato BC che intercetta il lato AC nel punto E.



Per il corollario del teorema di Talete 3.1.15 si avrà:

$$AB : AD = AC : AE \tag{3.2}$$

Ma è facile vedere che i triangoli ADE e $A'B'C'$ sono uguali per il secondo criterio di congruenza dei triangoli. In particolare avremo che $AE \cong A'C'$, perché elementi corrispondenti di triangoli congruenti (analogamente $AD \cong A'B'$). Sostituendo quindi nella proporzione precedente ai segmenti AD e AE i segmenti $A'B'$ e $A'C'$ otteniamo la prima proporzione della catena (3.2).
Procedendo in maniera analoga possiamo dimostrare anche la seconda proporzione della catena.

Corollario 3.1.19. *Una retta, parallela a un lato di un triangolo, stacca sul triangolo un triangolo simile al dato.*

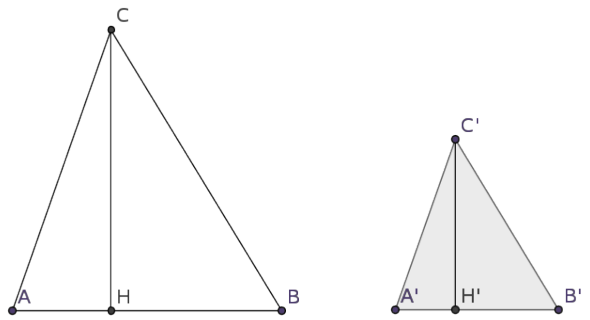
Dimostrazione. Gli angoli dei due triangoli sono ordinatamente uguali per le proprietà 2.1.25. Quindi applicando il criterio 3.1.18 si ha la tesi. □

Osservazione importante:
Come impostare la proporzione tra i lati di due triangoli che si sono riconosciuti simili secondo il criterio 3.1.18?
Scritto come antecedente un lato qualsiasi del primo triangolo bisogna individuare l'angolo opposto a tale lato; si passa al secondo triangolo individuando l'angolo uguale a quello individuato prima e si scrive come termine conseguente nella proporzione il lato opposto ad esso. Per il secondo rapporto si procede allo stesso modo.
Il secondo e terzo criterio di similitudine per i triangoli li enuncerò senza riportare le dimostrazioni, che sono comunque molto simili alla precedente:

Teorema 3.1.20 (2° criterio di similitudine)**.** *Due triangoli sono simili se hanno un angolo rispettivamente congruente compreso tra due lati proporzionali.*

Teorema 3.1.21 (3° criterio di similitudine)**.** *Due triangoli sono simili se hanno i tre lati rispettivamente proporzionali.*

Corollario 3.1.22. *Se due triangoli sono simili le altezze relative ai lati omologhi stanno tra loro come i lati stessi.*

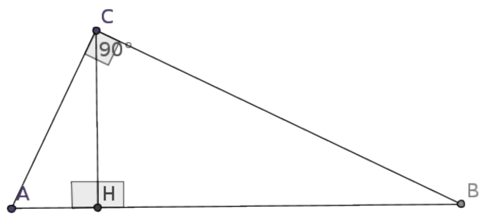


Dimostrazione. Considerando i triangoli AHC e $A'H'C'$, essi sono entrambi rettangoli rispettivamente in H e H'. Poiché i triangoli di partenza sono simili avremo che anche gli angoli in A e A' saranno uguali. Quindi per 3.1.18 avremo che AHC e $A'H'C'$ sono simili. Possiamo quindi impostare la proporzione: $AC : A'C' = CH : C'H'$.
Ma per ipotesi posso anche scrivere che $AC : A'C' = AB : A'B'$. Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza avrò la tesi. $\square$

Dal seguente corollario possiamo dimostrare entrambi i teoremi di Euclide.

Corollario 3.1.23. *Ogni triangolo rettangolo è diviso dall'altezza relativa all'ipotenusa in due triangoli simili al triangolo dato e simili fra loro.*

Dimostrazione. CH è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo ABC rettangolo in C.



I triangoli ACH e CBH sono entrambi simili al triangolo ABC per 3.1.18. Infatti sono uguali i rispettivi angoli retti e in comune uno dei due angoli acuti. Sono quindi anche simili tra loro. □

Possiamo quindi impostare le seguenti proporzioni:

1. $AB : AC = AC : AH$ dal quale si deduce che

   Teorema 3.1.24 (1° teorema di Euclide)**.** *In ogni triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.*

2. $AH : CH = CH : BH$ da cui si deduce che

   Teorema 3.1.25 (2° teorema di Euclide)**.** *In ogni triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tre le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.*

3.2 Diario di bordo

Il diario di bordo è strutturato come nel capitolo precedente. Il 28 Marzo 2011 è stato fatto un test di verifica finale. In questa parte ho riportato il testo. Ho consegnato tre file differenti, credendole della stessa difficoltà: in realtà gli errori sono stati differenziati. Insieme con il Prof. Ottaviani abbiamo quindi deciso di riportarle tutte e tre nella tesi.

3.2.1 Lezione 4. 28 Febbraio 2011

Alunni presenti: 14 In questa lezione, viste le difficoltà precedenti, mi sono accertata che non ci fossero stati problemi con gli esercizi per casa. I ragazzi sostenevano di essere abbastanza sicuri della risoluzione. Per sicurezza ho svolto l'esercizio 2, ma sembravano abbastanza convinti della risoluzione. Ho cominciato quindi l'argomento del giorno, cioè la corrispondenza di Talete insieme ad una piccola introduzione sulle proporzioni. La corrispondenza di Talete, in effetti, non è così semplice da capire, non tanto la definizione quanto la costruzione associata alla dimostrazione. Avevo pensato comunque di farla perché mi sembrava istruttiva e perché utilizzando la congruenza fra i triangoli poteva essere capita facilmente. In realtà le mie previsioni sono state sbagliate. Infatti durante il procedimento la maggioranza della classe sembrava dubbiosa (essendo poi all'inizio dell'ora non poteva essere colpa dell'attenzione). Anche questa volta molte difficoltà erano dovute alla visualizzazione del disegno, all'identificazione degli angoli corrispondenti, alterni interni e alterni esterni di due parallele rispetto ad una trasversale. Le domande però che sono venute fuori erano domande che davano segno di essere quantomeno sulla via della comprensione. Nella dimostrazione la comparsa di un parallelogramma ha creato una serie di malumori in quanto non riuscivano a capire perché i due lati opposti fossero uguali. Insomma alla fine della dimostrazione hanno tirato un respiro di sollievo. Il passo successivo è stata l'applicazione al triangolo cioè 3.1.5. A questo punto ho fatto vedere che, dato un segmento unità, possiamo dividere un segmento qualsiasi in un numero qualunque di parti congruenti. Inizialmente ho avvertito un certo disagio, perché i ragazzi non capivano la problematica. Se abbiamo un segmento unità qual è il problema? Basta riportare il segmento unità sul segmento da dividere! A quel punto ho detto loro che non era detto che all'ultimo passo il vertice del segmento unità coincidesse con il vertice del segmento. Insistendo un po' su questo fatto, ho mostrato il metodo che utilizza la corrispondenza di Talete.

Nell'ultima parte della lezione ho introdotto le proporzioni. La docente, in una lezione precedente, aveva già accennato all'argomento, sono stata quindi notevolmente avvantaggiata e agevolata dal fatto che avessero già visto la cosa.

Ho cominciato dando in consegna i seguenti esercizi:

Esercizio 1: la ricetta di un dolce per quattro persone presenta le seguenti dosi per gli ingredienti seguenti:

- 100 gr di zucchero;
- 100 gr di burro;
- 150 gr di cioccolata;
- 4 uova.

Fortunatamente gli invitati sono aumentati! Come saranno le dosi di questo dolce per 6 persone?
Esercizio 2: un rettangolo con le dimensioni di cm.6 e cm.8 rappresenta la pianta di un cortile in scala 1/500. Calcola il perimetro e l'area.
Esercizio 3: una bottiglia di 0,75 litri di latte costa 80 centesimi, quanto ne costerà una da due litri?
A quel punto ho guardato come procedevano con il lavoro individuale. Alcuni avevano abbastanza chiaro il concetto di proporzione e procedevano subito alla scrittura, altri semplicemente effettuavano un semplice ragionamento matematico. Ad esempio nel caso della ricetta dicevano "100 grammi saranno per 4 persone quindi 50 per 2, per 6 persone basterà moltiplicare 50 per 3". Sono stata molto contenta nel vedere che ragionavano come se dovessero effettuare un conto nella vita quotidiana, infatti spesso i ragazzi non si sentono in diritto di fare un conto non strettamente matematico durante le lezioni scolastiche. In alcuni però ho visto sempre la necessità di essere guidati. Magari cominciavano un ragionamento uguale a quello descritto, però poi quando i numeri non erano così convincenti desistevano. Mi spiego meglio: nel caso dell'esercizio della ricetta inizialmente con i 100 gr non avevano avuto problemi, invece con i 150 gr ho visto un errore persistente che potrebbe avere due possibili interpretazioni:

1. ripetendo il ragionamento avrei avuto $150gr : 2 = 75gr$ e $75 * 3 = 225gr$. Ma il numero evidentemente non era di loro gradimento quindi al posto di 225 gr hanno scritto 200gr;
2. nei primi due ingredienti per trovare la quantità corrispondente bastava aggiungere 50 gr, nel terzo caso quindi hanno proceduto allo stesso modo.

Alla correzione dell'errore però se ne sono resi conto e hanno ripetuto il calcolo anche per il terzo ingrediente.
Nel caso del secondo esercizio. Alcuni si calcolavano prima il perimetro della piantina e poi moltiplicavano per 500 (ottenendo quindi la risposta esatta), solo che facevano lo stesso per l'area, incorrendo in errore. Vedendo questo ho suggerito prima di calcolare i lati del giardino in funzione di quelli della piantina e solo dopo calcolare perimetro e area. Con questo suggerimento

tutti sono stati in grado di farlo. Nel caso della bottiglia in pochi hanno impostato la proporzione. Hanno quasi tutti pensato che 0,75 litri erano 3/4 di un litro, quindi 2 litri 6/4 di 0,75 e la stessa cosa sarebbe valsa per il costo.
A questo punto ho chiesto alla classe quale fosse la cosa in comune tra i vari esercizi e molti mi hanno risposto dicendo che c'era da dividere e moltiplicare. E ho spiegato che c'erano delle quantità i cui rapporti rimanevano invariati. Prima li ho scritti come uguaglianza di rapporti e poi tutti in una stessa riga sottoforma di proporzione.
Esercizio per casa: Piegando un foglio di carta rettangolare è possibile dividere in due parti rettangolari uguali fra loro e simili al foglio originario? Calcola, se possibile, il rapporto fra i lati del foglio di carta.

3.2.2 Lezione 5: 14 Marzo 2011

Alunni presenti: 15
Questa lezione è cominciata riprendendo il discorso delle proporzioni da dove avevamo terminato la volta precedente. Ho riportato alla classe i seguenti esempi:

- il prezzo che paghiamo per l'acquisto di una determinata merce è in relazione con il peso della merce stessa;
- il perimetro del quadrato è in relazione con la lunghezza del suo lato;
- il tempo impiegato per percorrere un certo numero di chilometri dipende dalla velocità (supposta come costante).

Allora ho posto la seguente domanda. " Nel primo caso se raddoppia il peso cosa succede al costo della merce?". Effettivamente tutti sono stati concordi nel dire che raddoppiava.
Già il secondo caso è stato più difficoltoso da comprendere. Quando ho chiesto quanto misurava il perimetro del quadrato molti non hanno risposto di getto. Ma qualcuno (fortunatamente) ha risposto "quattro volte il lato". "Bene, quindi se il perimetro di un quadrato di lato l misura $4l$ quanto misurerà il perimetro di un quadrato che ha il lato doppio?" e molti hanno risposto correttamente, poi ho fatto vedere che se sostituivamo l con $2l$ ottenevamo il doppio di $4l$ cioè $8l$.
Nel terzo caso invece, anche se non hanno conoscenze fisiche, ma fortunatamente sono esseri umani che vivono in questo mondo, tutti sono stati concordi nel dirmi che se la velocità raddoppiava il tempo impiegato veniva dimezzato.
A quel punto ho definito cosa sono due grandezze direttamente proporzionali e due grandezze inversamente proporzionali (definizione 3.1.12), verificando che le definizione che avevo dato fossero coerenti con i risultati degli esercizi effettuati. Ho infatti mostrato che il rapporto tra pezzo pagato e peso della

merce rimane costante e che il prodotto tra tempo e velocità rimane lo stesso.
A quel punto visto che erano rimaste in sospeso la misura e l'area della circonferenza ho spiegato che la misura della circonferenza è $2\pi r$ perché la circonferenza e il diametro sono direttamente proporzionali e la costante di proporzionalità è π; l'area invece misura πr^2 ed è quindi proporzionale al raggio al quadrato.
Ho detto loro che questo è un fatto sperimentale, ma che si può dimostrare anche formalmente.
Poi uno studente è venuto a svolgere alla lavagna i seguenti esercizi:
Esercizio 1: Un'automobile percorre $30km$ consumando $2l$ di benzina, $75km$ consumando $5l$ di benzina, $90km$ consumando $6l$ di benzina e $120km$ consumando $8l$ di benzina. Si verifichi che le distanze percorse sono proporzionali alla benzina consumata.
Esercizio 2: Investendo un capitale di 1000€per anno si ottiene un interesse di 45€. Investendo un capitale di 2.500€si ottiene un interesse di $112,5$€. Un capitale di 5.400€, investito sempre per un anno frutta un interesse di 243€. Si verifichi che gli interessi ottenuti sono proporzionali ai capitali impiegati.
Le problematiche che ha trovato il ragazzo a verificare i rapporti sono state solo relative alla giusta scrittura delle unità di misura. A questo punto ho enunciato il Teorema di Talete(3.2.4) anche se non l'ho dimostrato vista la difficoltà della classe nella comprensione della corrispondenza di Talete. Ho spiegato loro come impostare le proporzioni (cioè che bisognava guardare per ogni segmento il suo corrispondente, già definito per la corrispondenza di Talete). Poi ho fatto vedere la proprietà delle parallele alla base per un punto di un lato del triangolo generico e come dividere un segmento in parti proporzionali. Successivamente ho svolto il seguente esercizio per poter applicare il Teorema di Talete.
Esercizio su Talete: da un punto D della base AC di un triangolo ABC tracciamo la parallela al lato AB, che intercetterà il terzo lato del triangolo in E. Sapendo che AD misura $6cm$, AC $18cm$ ed EC $15cm$, trova la lunghezza del segmento BE.
Inoltre ho lasciato il seguente esercizio per il lavoro a casa:
Esercizio: Tre rette parallele determinano su una trasversale due segmenti consecutivi che misurano $7a$ e $8a$. Al segmento somma corrisponde su un'altra trasversale un segmento che misura $105a$. Determina le misure dei segmenti sulla seconda trasversale.
Mi sono raccomandata di scrivermi questo esercizio in un foglio che poi avrei ritirato.

3.2.3 Lezione 6: 21 Marzo 2011

Alunni presenti: 15 In questa lezione ho introdotto il concetto di similitudine.
La prima domanda che mi è venuto spontaneo di porre è stata: "Cosa vuol dire che due triangoli sono simili?". La prima risposta è stata come era facilmente prevedibile: "Sono simili quando sono congruenti". Ho risposto che l'affermazione non era giusta che però potevamo affermare che se "Due triangoli sono congruenti allora sono simili". Non so se abbiano afferrato la differenza.
A quel punto ho dato la definizione di triangoli simili nella forma più completa (due triangoli sono simili se hanno ordinatamente i tre angoli congruenti e i tre lati in proporzione) illustrando anche il metodo intuitivo che avevo già utilizzato nella Lezione 0. Ho definito che cosa fossero i vertici corrispondenti di due triangoli simili e i lati omologhi (intesi come lati opposti a angoli congruenti).
Ho spiegato che la definizione ci chiede tante proprietà, ma che non tutte sono necessarie per dimostrare che due triangoli sono simili.
Ho poi elencato i criteri di similitudine;
Primo criterio di similitudine due triangoli sono simili se hanno due angoli rispettivamente congruenti.
Ho chiesto "Se in due triangoli due angoli sono rispettivamente congruenti cosa vuol dire? Come sarà anche il terzo angolo?". Parte della classe ha risposto correttamente "uguale!". Quando poi ho chiesto perché quasi nessuno era più tanto convinto di rispondere: altra prova della non autonomia nel ragionamento matematico di questi ragazzi e della poca dimestichezza con concetti di base come la somma degli angoli interni di un triangolo. Allora ho chiesto quanto fosse la somma degli angoli interni di un triangolo: "180°" (ho fatto finta di non sentire le due vocine che hanno urlato "90°"). Allora ho mostrato alla lavagna che se chiamiamo gli angoli rispettivamente congruenti nei due triangoli α_1 e α_2, β_1 e β_2 e vogliamo calcolare il terzo angolo di ogni triangolo, esso quanto misurerà? Ricevuta la risposta esatta, ho fatto notare che tutti gli addendi di ciascuna espressione sono uguali, quindi necessariamente anche gli altri due angoli sono uguali.
La vera notizia per quanto riguarda il primo criterio di similitudine è che il fatto che gli angoli di due triangoli siano uguali implica che anche i lati sono in proporzione. Ho omesso la dimostrazione perché mi sembrava complicata.
A quel punto ho dato le dritte su come impostare la proporzione tra due triangoli che abbiamo dimostrato simili per il primo criterio di similitudine.
Ho enunciato gli altri due criteri di similitudine chiedendo se trovassero analogia con i criteri di congruenza per i triangoli che avevano studiato precedentemente.
Secondo criterio di similitudine. Se due triangoli hanno due lati in proporzione e l'angolo tra questi compreso congruente, sono simili.

Terzo criterio di similitudine. Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente proporzionali sono simili.
Nessuna risposta convinta. Ho chiesto allora quali fossero i criteri di congruenza per i triangoli: una ragazza ha enunciato il primo correttamente. Allora ho chiesto se vedevano delle analogie con uno dei tre criteri di similitudine. La risposta tardava e quindi ho fatto notare che anche nel secondo criterio di similitudine si prendevano in considerazione due lati e un angolo. Poi ho chiesto quale fosse il terzo criterio di congruenza dei triangoli: sempre la stessa ragazza l'ha enunciato correttamente e ho fatto presente che anche in questo caso venivano presi in considerazione i tre lati come nel terzo criterio di similitudine.
A quel punto visto che questa era l'ultima lezione prima del compito intermedio, ho consegnato loro un foglio con degli esercizi da svolgere in preparazione al compito e ho consegnato anche degli esercizi sulla similitudine.
Come esempio dell'applicazione del 1° criterio di similitudine (l'unico che poi effettivamente ci servirà) ho svolto alla lavagna la dimostrazione di 3.1.23.
Nel frattempo giravo tra i banchi e aiutavo a svolgere gli esercizi.
Ho poi ritirato l'esercizio sul teorema di Talete che avevo consegnato la volta prima.

3.2.4 Lezione 7: test di metà lavoro 28 Marzo 2011

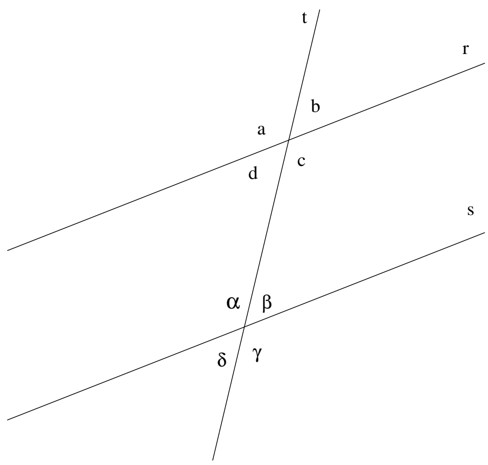
Alunni presenti:12. Gli altri 3 hanno svolto il test il 30 Marzo

Test fila 1

Test del 28.03.2011. Risolvi i seguenti esercizi motivando le risposte

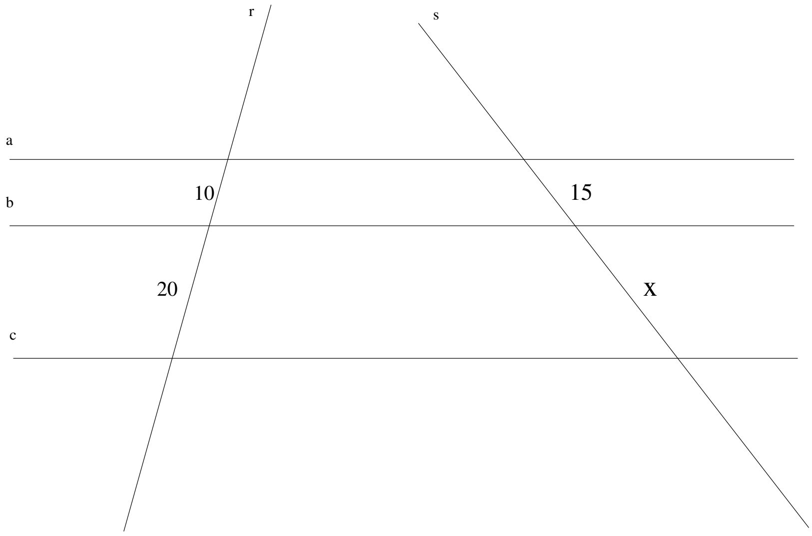
Esercizio 1
Osserva la figura seguente. Qual è l'angolo alterno interno rispetto a c?

1. b
2. γ
3. α
4. δ



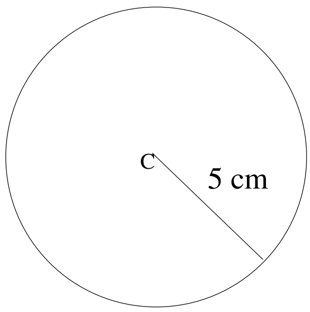
Esercizio 2
Osserva la figura seguente. Quanto vale X?

1. 20
2. 30
3. 40
4. non é determinabile.



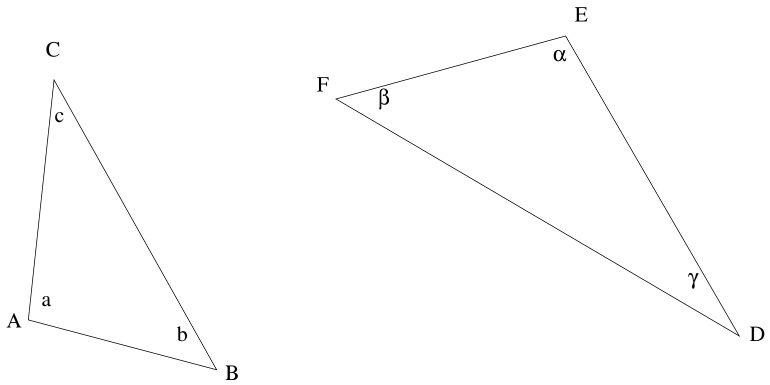
Esercizio 3
Osserva la figura seguente. Quanto misura la circonferenza?

1. $5\pi\ cm$
2. $10\pi\ cm$
3. $25\pi\ cm^2$
4. mancano dei dati per calcolare tale lunghezza.



Esercizio 4
I due triangoli ABC e DEF sono simili, perché valgono le uguaglianze $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$. Completa le proporzioni seguenti:

$$AB : BC = ... : ...$$
$$AB : EF = ... : ...$$



Esercizio 5
Il triangolo ABC è rettangolo in A e sia r la retta condotta per A parallelamente all'ipotenusa BC. Siano D ed E le proiezioni ortogonali su r, rispettivamente, dei vertici B e C. Dimostrare (utilizzando uno dei criteri di similitudine) che i triangoli ABD, ACE, ABC sono simili. *Cominciare disegnando la figura e scrivendo l'ipotesi e la tesi.*

Test fila 2

Test del 28.03.2011. Risolvi i seguenti esercizi motivando le risposte

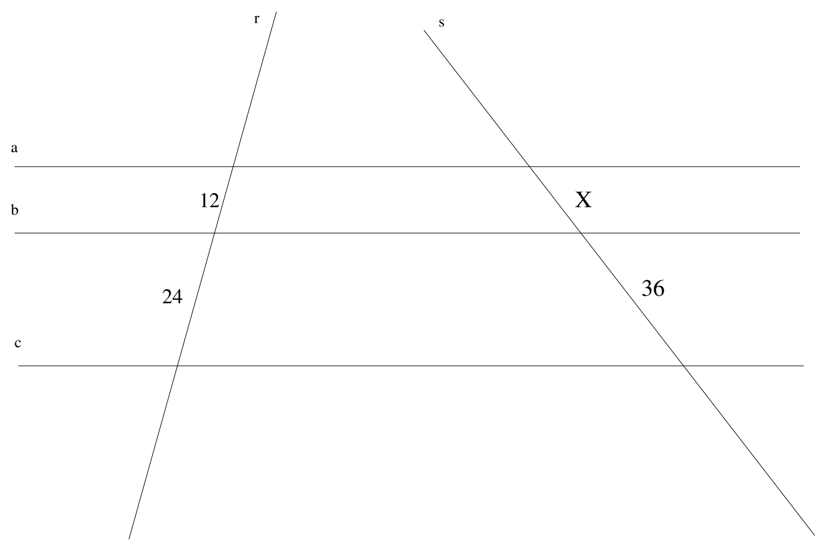
Esercizio 1
Osserva la figura seguente. Quanto vale X?

1. 20

2. 18

3. 15

4. non é determinabile.



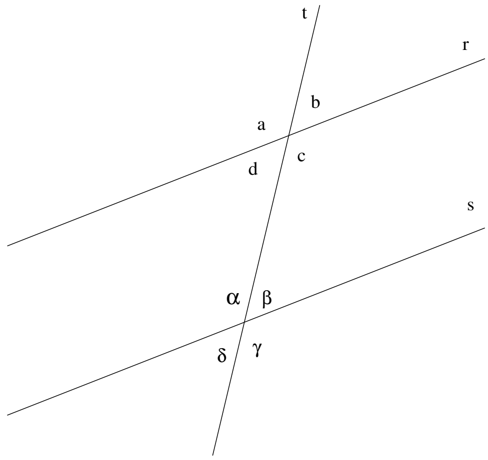
Esercizio 2
Osserva la figura seguente. Qual è l'angolo corrispondente rispetto a c?

1. b

2. γ

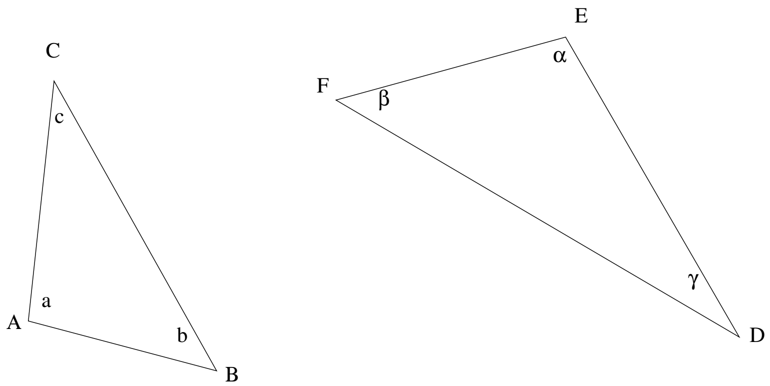
3. α

4. δ



Esercizio 3
I due triangoli ABC e DEF sono simili, perché valgono le uguaglianze $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$. Completa le proporzioni seguenti:

$$AC : BC = ... : ...$$
$$AC : ED = ... : ...$$



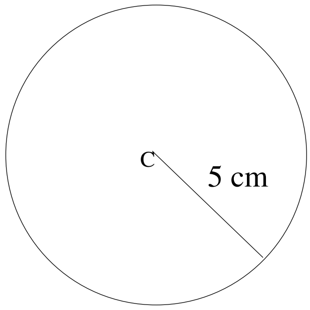
Esercizio 4
Osserva la figura seguente. Quanto misura l'area del cerchio?

1. $5\pi\ cm$

2. $10\pi\ cm^2$

3. $25\pi\ cm^2$

4. mancano dei dati per calcolarla.



Esercizio 5

Il triangolo ABC è rettangolo in A e sia r la retta condotta per A parallelamente all'ipotenusa BC. Siano D ed E le proiezioni ortogonali su r, rispettivamente, dei vertici B e C. Dimostrare (utilizzando uno dei criteri di similitudine) che i triangoli ABD, ACE, ABC sono simili. *Cominciare disegnando la figura e scrivendo l'ipotesi e la tesi.*

Test fila 3

Test del 28.03.2011. Risolvi i seguenti esercizi motivando le risposte

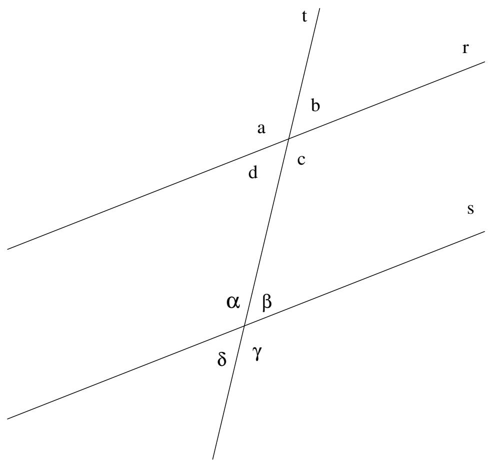
Esercizio 1
Osserva la figura seguente. Qual è l'angolo coniugato rispetto a c?

1. b

2. β

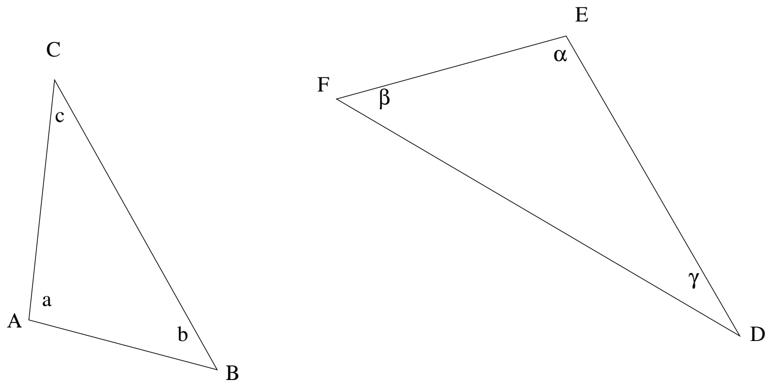
3. α

4. δ



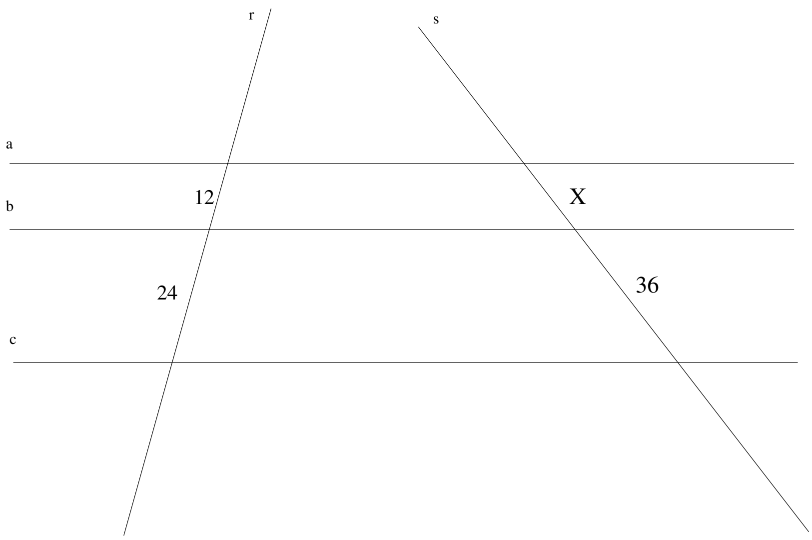
Esercizio 2
I due triangoli ABC e DEF sono simili, perché valgono le uguaglianze $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$. Completa le proporzioni seguenti:

$$BC : AB = ... : ...$$
$$BC : DF = ... : ...$$



Esercizio 3
Osserva la figura seguente. Quanto vale X?

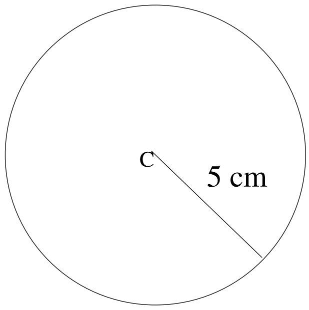
1. 20
2. 18
3. 15
4. non é determinabile.



Esercizio 4
Osserva la figura seguente. Quanto misura la circonferenza?

1. 5π cm

2. 10π cm
3. 25π cm^2
4. mancano dei dati per calcolare tale lunghezza.



Esercizio 5

Il triangolo ABC è rettangolo in A e sia r la retta condotta per A parallelamente all'ipotenusa BC. Siano D ed E le proiezioni ortogonali su r, rispettivamente, dei vertici B e C. Dimostrare (utilizzando uno dei criteri di similitudine) che i triangoli ABD, ACE, ABC sono simili. *Cominciare disegnando la figura e scrivendo l'ipotesi e la tesi.*

Capitolo 4

Terza parte della sperimentazione: “esperienze pratiche”

Questo capitolo è una guida allo svolgimento delle tre “esperienze pratiche” spiegate nel paragrafo 1.3.
Il **materiale presentato** è diviso in tre sottoparagrafi:

- nel sottoparagrafo dal titolo “*Il pianeta Terra*” si riportano le diapositive di Beamer utilizzate per la spiegazione dei prerequisiti astronomici nella lezione del 9 Aprile 2011.
- Nel sottoparagrafo dal titolo “*Misura indiretta dell'altezza di un oggetto*” si riportano le dispense consegnate ai ragazzi riguardanti l'esperienza di misurazione indiretta di un oggetto. Con i ragazzi abbiamo misurato l'altezza della palestra della scuola in data 11 Aprile 2011.
- Nel sottoparagrafo dal titolo “*Misura del meridiano e del raggio terrestre*” si riportano le dispense consegnate ai ragazzi riguardanti l'esperienza di Eratostene svolta nella lezione del 2 Maggio 2011.
- Nel sottoparagrafo dal titolo “*Il teorema del pappagallo*” ho fotocopiato le pagine di [2] utilizzate per la lezione del 9 Maggio 2011.

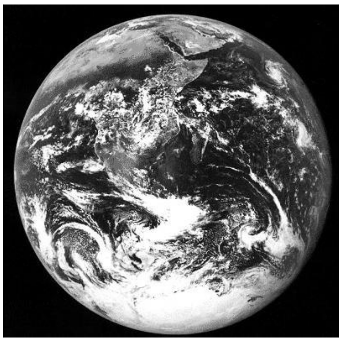
Nel secondo paragrafo, **il Diario di bordo**, viene spiegato come sono state affrontate le differenti “esperienze pratiche”: pregi, difetti, problematiche e domande daranno una chiave di lettura molto significativa a questo lavoro.

4.1 Materiale presentato

4.1.1 Il pianeta Terra

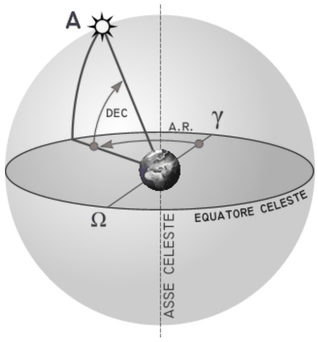
ISIS GALIELO GALILEI
Laboratorio di geometria classe IIIBL
Il pianeta Terra

La Terra ha la forma di una **sfera** quasi perfetta (naturalmente non tenendo conto delle alterazioni date, ad esempio, dalle montagne). Oggi questo risulta evidente grazie alle immagini delle sonde spaziali.



In realtà la Terra é più schiacciata ai poli e più rigonfia in corrispondenza dell'Equatore. Il solido terrestre si chiama **geoide**, ma, per quello che faremo, possiamo sempre considerare la Terra come una sfera.

I popoli delle più antiche civiltà (come sapete bene!) pensavano che la Terra fosse piana e poco estesa. Fu il matematico greco Pitagora a ipotizzare che la Terra fosse rotonda (più di 2000 anni prima di Galileo). Allora ci si basava sulle **prove indirette**. Ad esempio la posizione della *Stella Polare*.

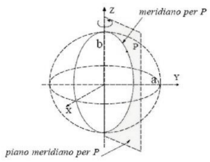


Per localizzare un punto sulla sfera terrestre possiamo fissare un sistema di riferimento che consenta di individuarlo univocamente.
Il reticolato geografico è il sistema di riferimento rispetto al quale viene individuata la posizione di un oggetto sulla Terra. Che cos'è? È una rete immaginaria che avvolge la superificie terrestre.

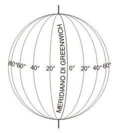
Le linee che formano il reticolato geografico si chiamano **Meridiani** e **Paralleli**.

I meridiani-prima parte

Immaginiamo di tagliare il globo terrestre con un piano che passi per il suo asse di rotazione. Dall'intersezione di questo piano con la sfera, otteniamo (approssimando) una circonferenza. Tale circonferenza é detta meridiano.



Per ciascun meridiano, le due semicirconferenze comprese tra un polo celeste e l'altro vengono chiamate **Meridiani geografici**.

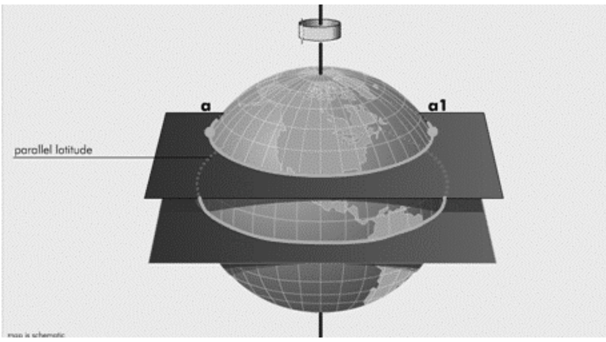


I meridiani-seconda parte

I piani contenenti gli assi terrestri con i quali possiamo immaginare di tagliare la Terra sono infiniti.
Generalmente si considerano **180 piani**, quindi **360 meridiani geografici**, a distanza di un grado l'uno dall'altro. Il meridiano geografico fondamentale (da ora in poi abbandoneremo l'aggettivo "geografico") é il **Meridiano di Greenwich**, detto anche **Meridiano Zero**.
Attenzione: tutti i meridiani hanno la stessa lunghezza che è circa 20.000 km.

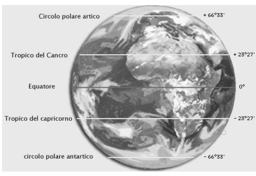
I paralleli-prima parte

Immaginiamo ora di tagliare la sfera terrestre con un piano perpendicolare al suo asse di rotazione. Dall'intersezione di questo piano con la superficie terrestre otteniamo ancora una circonferenza. Questa circonferenza é chiamata **parallelo**.



I paralleli-seconda parte

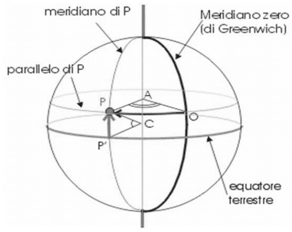
A seconda della distanza del piano di intersezione dal centro della Terra, la circonferenza individuata sarà più o meno grande e tutte le circonferenze saranno tra loro parallele. Quando il piano passa esattamente dal centro della Terra, sulla superficie terrestre si ottiene la circonferenza più lunga: **l'Equatore**. Esso divide la Terra in due **Emisferi**: l'**Emisfero boreale** e l'**Emisfero australe**.



Anche i paralleli sono infiniti, ma si è deciso di prendere in considerazione solo 180 circonferenze a distanza di un grado l'una dall'altra. **Attenzione**: i due "paralleli estremi" che si trovano a Nord e a Sud dell'Equatore sono punti: il **Polo sud** e il **Polo nord**.

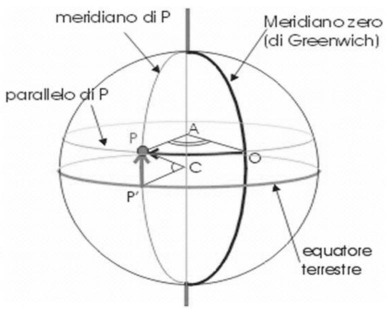
La longitudine

Dato un punto P sulla superficie terrestre, possiamo determinarne la **longitudine** e la **latitudine**.



La **longitudine** è l'ampiezza dell'angolo compreso tra il piano che contiene il meridiano che passa per P e il piano che contiene il meridiano di Greenwich. La misura va fatta sull'arco del parallelo che passa per il punto considerato. Bisogna poi specificare se il punto P si trova a Est o a Ovest del meridiano iniziale.

La latitudine



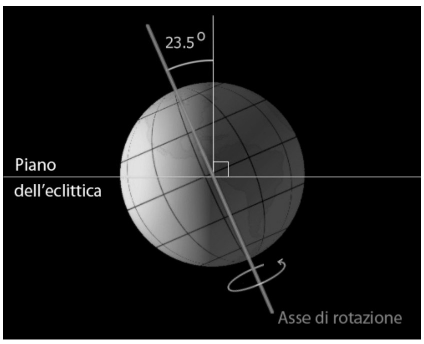
La **latitudine** del punto P è data dall'angolo (con vertice nel centro della Terra) corrispondente all'arco di meridiano che congiunge il punto P con l'Equatore. La latitudine può essere Nord o Sud, a seconda che il punto si trovi nell'emisfero boreale o in quello australe.

Visto che, sia la longitudine che la latitudine sono angoli, ogni punto della Terra si può trovare nel reticolato grazie alla misura di due angoli (in gradi e frazioni di gradi, cioé primi, secondi etc) e alle precisazioni (Est o Ovest) o (Nord o Sud).
Nel caso di **Firenze**:

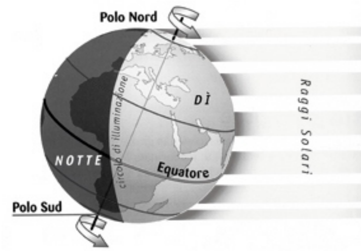
- Latitudine $43^\circ\ 46'\ 17''$ N
- Longitudine $11^\circ\ 15'\ 15''$ E

La rotazione terrestre

Uno dei moti che la Terra compie è la **rotazione**. Il nostro pianeta gira su se stesso attorno ad un asse passante per i poli che si chiama **asse terrestre**. La rotazione avviene da Ovest ad Est.
La Terra impiega 23 ore, 56 minuti e 4 secondi a compiere un giro completo attorno a se stessa.
Cosa succederebbe se la Terra non girasse attorno a se stessa?

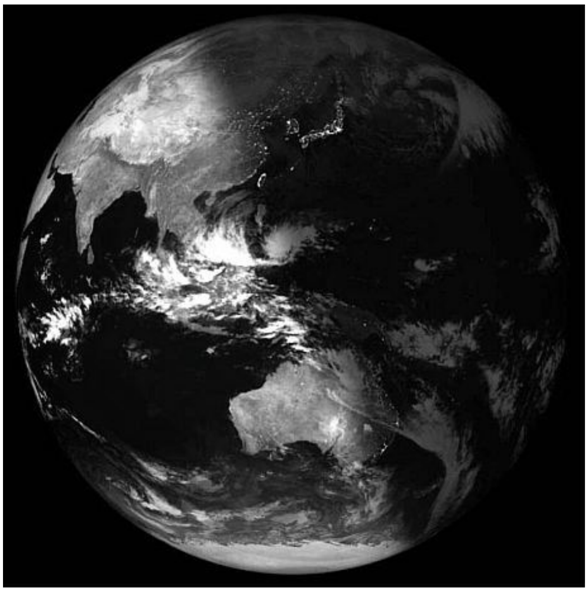


A causa della grande distanza del Sole dal nostro pianeta, i raggi solari giungono sulla superificie terrestre quasi paralleli fra loro. Illuminano così solo la parte di globo che è rivolta verso il Sole.



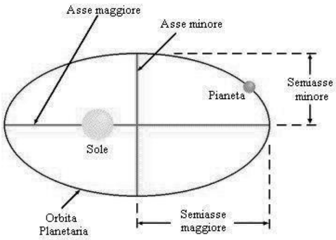
Grazie alla rotazione quindi, ogni giorno, tutti i punti della Terra sono caratterizzati da periodi di dì e di notte. Se la Terra fosse immobile (se non compiesse cioè alcun moto), una metà sarebbe sempre nell'oscurità e avrebbe una temperatura glaciale.

Un'immagine della Terra illuminata:



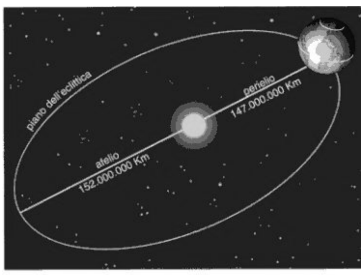
Il moto di rivoluzione

La Terra compie attorno al Sole un moto chiamato **moto di rivoluzione**. Un giro completo della Terra attorno al Sole ha la durata di un anno. L'orbita della Terra non è una circonferenza, bensì un'ellisse, in cui il Sole occupa uno dei due fuochi.



A causa di ciò, la distanza della Terra dal Sole varia durante l'anno.

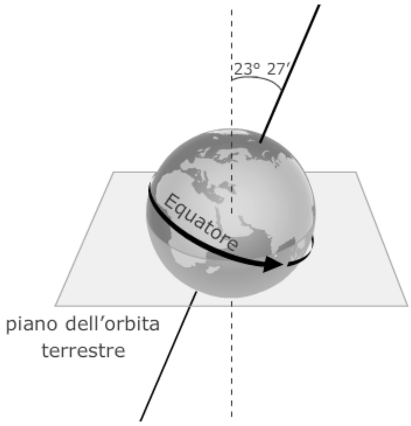
- il punto dell'orbita in cui la Terra è più vicina al Sole si chiama **perielio**;
- il punto dell'orbita in cui la Terra è più lontana dal Sole si chiama **afelio**;



Nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole la Terra percorre un'orbita ellittica, secondo la prima legge di Keplero. L'orbita giace sul piano dell'eclittica, sul quale il Sole compie il suo apparente moto annuale.

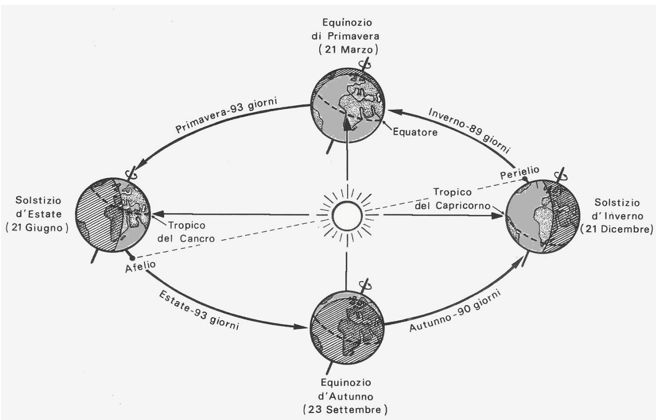
Inclinazione dell'asse terrestre

Rispetto alla retta perpendicolare al piano dell'orbita, la Terra è inclinata di 23° 27'. Quest'angolo rimane costante durante l'intero tragitto annuo che la Terra compie attorno al Sole.



La forma e le dimensioni della Terra
Le coordinate geografiche
Il moto di rotazione terrestre e l'alternarsi del dì e della notte.
Il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole.

In ciascun punto della Terra, la durata variabile del dì e della notte dipende dall'inclinazione dell'asse terrestre sul piano dell'orbita e dal fatto che l'asse si mantiene sempre parallelo a se stesso.



Classe III BL   Ripasso nozioni astronomiche

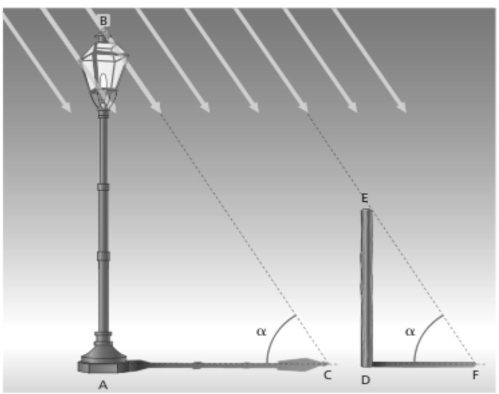
I Solstizi e gli Equinozi

La durata massima del dì nell'emisfero boreale è nel giorno del **Solstizio d'Estate** (il 21 Giugno).
La sua durata minima è nel **Solstizio di inverno** (il 22 Dicembre).
Nell'emisfero australe avviene esattamente il contrario.
Invece gli **Equinozi** (di Primavera e di Autunno) corrispondono alle due sole posizioni della Terra sulla propria orbita nelle quali il circolo di illuminazione passa esattamente per i poli. In questi due giorni la durata del dì è, con una certa approssimazione, uguale a quella della notte.

Sarà utile sapere, per le applicazioni future, che nel giorno del **Solstizio d'Estate** a mezzogiorno il Sole si trova allo Zenit del Tropico del Cancro; i suoi raggi sono quindi perpendicolari ai luoghi del Tropico che é un parallelo dell'estremo boreale.

4.1.2 Misura indiretta dell'altezza di un oggetto

Supponiamo di voler misurare l'altezza di un oggetto che non sia misurabile direttamente, ad esempio un campanile. Misurarlo direttamente sarebbe molto difficile (dovremmo trovare un metro abbastanza lungo da poter essere calato dalla parte più alta della torre campanaria, che deve essere facilmente raggiungibile). Se considero, ad esempio, la torre campanaria del mio paese (che tutte le guide turistiche mi dicono avere un'altezza di 66 metri) e volessi effettuare una misura diretta, dovrei salire in cima alla torre con un metro lungo almeno 66 metri!!
Fortunatamente, la geometria ci viene in aiuto con le proprietà dei triangoli simili e ci permette di conoscere l'altezza di un oggetto utilizzando un metodo indiretto (come dice il termine, non misuriamo direttamente l'oggetto). Abbiamo quindi il nostro oggetto da misurare che è posto perpendicolarmente alla superficie terrestre, ad esempio un lampione, una casa o una torre (non prenderemo in esame il caso particolare della Torre di Pisa!!!)
Consideriamo ora un altro oggetto che sia facilmente misurabile direttamente, quindi con un'altezza relativamente piccola, anch'esso posto verticalmente (un palo, un cancello, una balaustra).
Se effettuiamo l'esperimento in una giornata di Sole, entrambi gli oggetti presi in esame avranno una certa ombra.
Come abbiamo detto nella lezione di astronomia, vista l'enorme distanza tra la Terra e il Sole, possiamo considerare i raggi del Sole come paralleli. Inoltre nonostante la Terra sia sferica, consideriamo la superficie terrestre piana (una pianura ha questo nome nonostante sia impercettibilmente curva).
La situazione nella quale ci troviamo è la seguente:

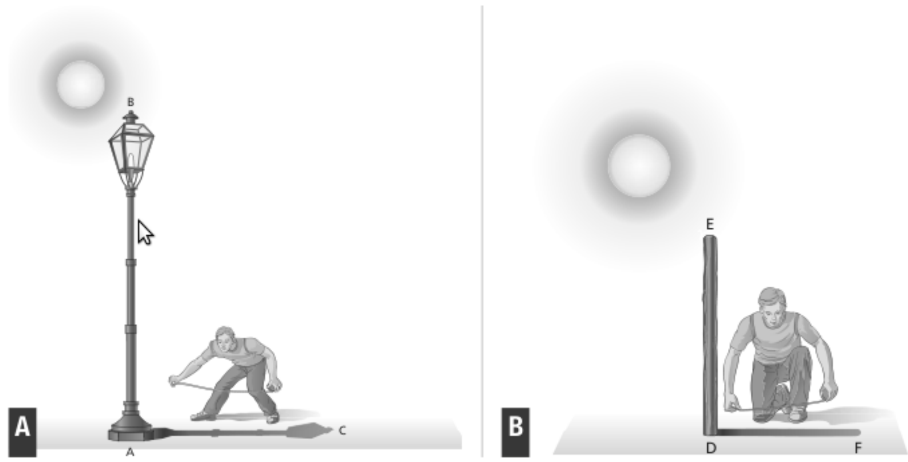


Poiché i raggi del Sole sono paralleli tra loro, se consideriamo i due raggi passanti per il punto più alto dei due oggetti, possiamo vedere la superficie terrestre come una trasversale che taglia entrambi i raggi.

Si formano, così, due triangoli rettangoli simili. Perché?
A questo punto possiamo impostare la seguente proporzione (utilizzando le stesse lettere del disegno):

$$AB : AC = DE : DF$$

Ma dei quattro elementi della proporzione, solo tre sono facilmente misurabili con un metro: le due ombre e il secondo oggetto.

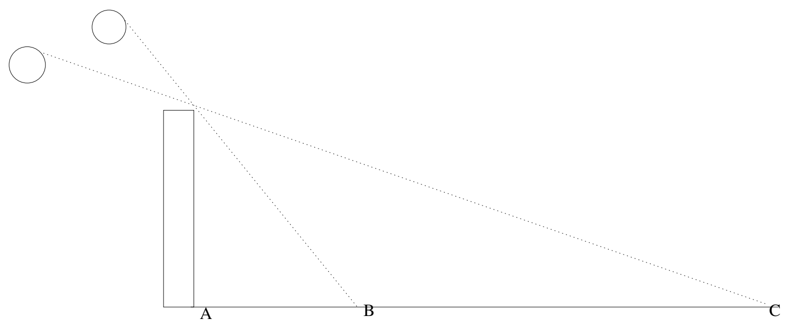


Nella situazione B si misura anche l'altezza del palo.
Da ciò è facilmente ricavabile l'altezza AB del primo oggetto (che nel disegno è un lampione) che sarà data dalla formula:

$$AB = \frac{AC * DE}{DF}$$

Questo è proprio quello che abbiamo fatto quando abbiamo misurato l'altezza della palestra dell'I.T.I. Meucci.
Come abbiamo analizzato nella scorsa lezione, ci sono stati molteplici errori:

1. se prima misuriamo l'ombra dell'oggetto più basso (la balaustra o il quaderno) e non siamo abbastanza veloci a misurare l'ombra del secondo oggetto (la palestra), avremo che la prima misura è cambiata (il Sole d'altra parte non si ferma per il nostro esperimento, o meglio, le Terra non si ferma). Con la mia compagna di università, che mi ha aiutato nelle misure, abbiamo osservato che la misura dell'ombra dell'oggetto piccolo in dieci minuti varia di ben 10 *cm*. La misura da riportare nella proporzione dovrebbe quindi essere più piccola di quella che abbiamo misurato, visto che abbiamo fatto la misurazione prima dell'una (ora legale), quando le ombre diminuiscono a poco a poco;

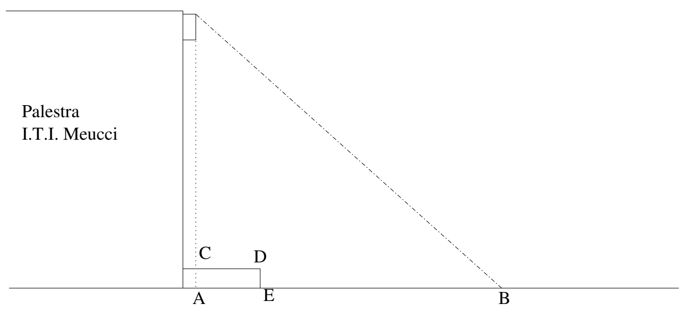


AC= Ombra con il sole "basso"
AB= Ombra con il sole "alto"

2. tutta la classe non si era resa conto che il vertice della maniglia del metro coincideva con l'inizio del metro quindi, in questo caso, abbiamo che le misure reali sono di 3 cm più piccole di quelle riportate nelle relazioni;

3. entrambi i gruppi si sono fermati al centimetro (non hanno riportato i millimetri), quindi è ragionevole pensare che le nostre misure si discostino di 1 cm in più o in meno dalla misura riportata nella proporzione (sensibilità dello strumento);

4. il marciapiede ci ha creato un po' di problemi. Tutti i gruppi dicono che, nelle misure definitive, hanno considerato anche la larghezza del marciapiede. Nei primi tentativi, però, c'erano state varie discussioni sul da farsi;



AB=ombra della palestra.
CD=parte di marciapiede da misurare (uguale ad AE che fa parte dell'ombra)

5. un gruppo ha usato un quaderno come oggetto del quale misurare l'ombra. Come abbiamo visto in classe però un oggetto di questo tipo dà un errore relativo elevato a causa delle piccole dimensioni.

L'altezza che abbiamo misurato sarà falsata. Se dovessimo, quindi, effettuare ancora una misurazione del genere dovremmo:

1. effettuare le misure delle due ombre più velocemente possibile. Ancora meglio: con due metri a disposizione potremmo proprio effettuarle contemporaneamente;

2. riportare anche i millimetri nella misurazione;

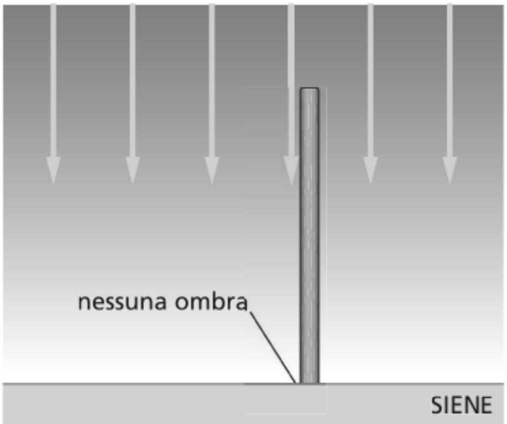
3. fare attenzione alla struttura del metro: ricordiamoci che ripiegando il metro possiamo vedere da dove parte la misurazione dei cm;

4. ragionare sul perché bisogna misurare anche la larghezza del marciapiede (attenzione, non l'altezza!);

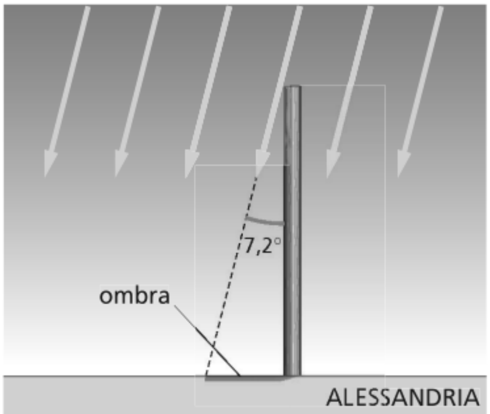
5. scegliere come oggetto del quale bisogna misurare l'altezza (la balaustra o il quaderno) oggetti che siano facilmente misurabili, ma comunque di un'altezza superiore al metro per evitare errori relativi elevati.

4.1.3 Misura del meridiano e del raggio terrestre

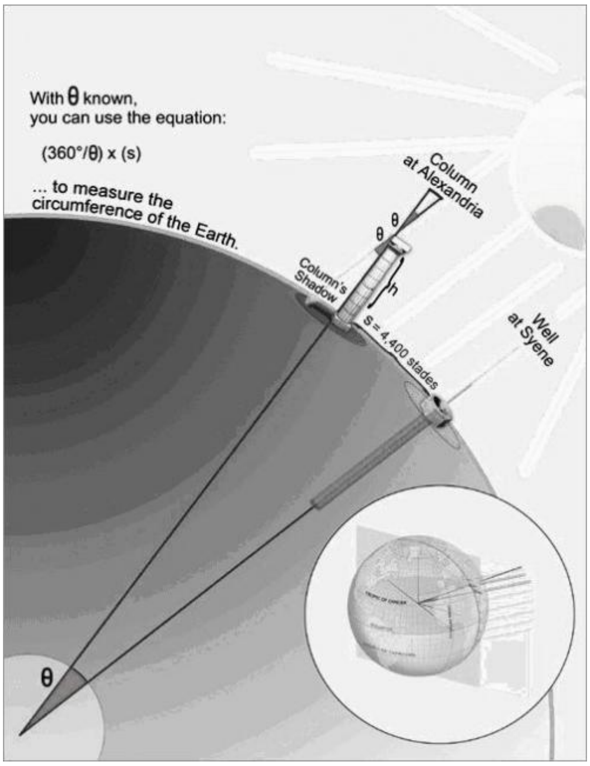
La misura del meridiano e del raggio terrestre da parte di Eratostene è uno tra i maggiori risultati della matematica applicata alla geodesia (disciplina appartenente alle scienze della Terra che si occupa della misura e della rappresentazione della Terra, del suo campo gravitazionale e dei fenomeni geodinamici, come lo spostamento dei poli, maree terrestri e movimenti della crosta).
Eratostene (Cirene 276 a.c., Alessandria 194 a.c.) era un matematico, astronomo, geografo e poeta greco che era stato chiamato ad Alessandria d'Egitto per educare il futuro faraone. I dati riportati in questo paragrafo sono tratti da [10].
La misura della circonferenza del meridiano terrestre era riportata nell'opera "Sulla misura della Terra", oggi andata perduta. Siamo venuti a conoscenza di tale misurazione dall'unica opera che ci è rimasta del matematico greco Cleomede.
Come avevamo osservato durante la lezione dei prerequisiti astronomici, i meridiani hanno la proprietà di avere tutti la stessa lunghezza (a differenza dei paralleli, la cui lunghezza aumenta con l'avvicinarsi all'equatore).
Il metodo di Eratostene è il seguente: si sapeva che Siene (l'odierna Assuan), antica città dell'Egitto, si trovava quasi al tropico; il Sole si trovava infatti allo Zenit a mezzogiorno del giorno del solstizio d'estate.
Un palo verticale a Siene quindi, in quel particolare momento, non ha ombra perché i raggi sono perpendicolari alla superficie terrestre e quindi paralleli al palo stesso, come rappresentato nella figura seguente:



Alessandria si trova approssimativamente sullo stesso meridiano di Siene (ci sono solo 3° di longitudine di differenza), ma più a nord, quindi a mezzogiorno un palo verticale avrà una certa ombra.



Misurando l'ombra di tale palo possiamo ricavarci la misura degli angoli del triangolo rettangolo che si viene a formare, grazie ad un semplice metodo grafico: è sufficiente, infatti, disegnare in un foglio quadrettato un triangolo rettangolo simile a quello che ha come cateti il palo e la sua ombra e poi misurare con un goniometro le ampiezze degli angoli che non conosciamo.
Eratostene aveva così misurato l'angolo tra il raggio del Sole passante per il vertice del palo e il palo stesso. La misura era 7°12'(7,2° è equivalente).
In classe ho dato la misura dell'angolo alla base, dato che con un semplice calcolo si può ricavare quello voluto.
A questo punto, consideriamo i due raggi terrestri che congiungono il centro della Terra con le basi dei due pali (a Siene e ad Alessandria). Poiché i pali sono perpendicolari alla superficie, essi giaceranno sui prolungamenti dei rispettivi raggi.
Osserviamo la figura seguente:



θ sarà l'angolo la cui ampiezza misurata da Eratostene era 7,12°.
Per le proprietà di due rette parallele tagliate da una trasversale (prendiamo il raggio solare passante per il vertice del palo ad Alessandria, il raggio solare passante per Siene e, come trasversale, il raggio terrestre congiungente il centro della Terra con il palo ad Alessandria), avremo che l'angolo al centro compreso tra i due raggi terrestri considerati coincide proprio con θ e quindi misura 7,12°. Perché?
Eratostene sapeva che la distanza tra Alessandria e Siene (non è ancora chiaro come avesse fatto a misurarla, considerando la difficoltà degli spostamenti dell'epoca) era pari a 794 km.
A questo punto è possibile impostare la seguente proporzione:

$$\text{(circonferenza terrestre)}:\text{(distanza tra Siene e Alessandria)}= \\ \text{(angolo giro)}:\text{(angolo al centro } \theta)$$

Quindi:

$$\text{(circonferenza terrestre)} = \frac{\text{(distanza tra Siene e Alessandria)} * \text{(angolo giro)}}{\text{(angolo al centro } \theta)}$$

Esercizio 1: sostituisci alla formula i dati che conosci e trova la lunghezza della circonferenza terrestre (o meridiano terrestre che dir si voglia).
Esercizio 2: trova la misura del raggio terrestre.

Curiosità

Osservando la figura precedente si può osservare che:

- a Siene non è rappresentato un palo, ma un pozzo. Infatti si narra che era noto che Siene si trovava al tropico perché in un particolare giorno (il giorno del solstizio di estate) la luce illuminava completamente il fondo del pozzo;

- ad Alessandria è rappresentata una colonna di un tempio, perché si pensa che Eratostene avesse scelto essa come oggetto del quale misurare l'altezza e l'ombra;

- la lunghezza dell'arco di circonferenza tra Siene e Alessandria è riportato in "stadi" che era l'unità di misura di lunghezza nell'Antica Grecia (1 stadio=157,5 metri).

Approfondimenti

In realtà fare le misurazioni delle ombre nel giorno particolare del solstizio di estate ed essere ad Alessandria d'Egitto non è indispensabile. Questo, infatti, semplifica molto i calcoli, ma in una giornata qualunque (soleggiata naturalmente) due classi III del liceo psico-pedagogico la prima delle quali sia, ad esempio, a Firenze e la seconda a Palermo (che si trova approssimativamente alla stessa longitudine di Firenze) possono effettuare la stessa misurazione. Come?
Ciascuna classe dovrà misurare alla stessa ora dello stesso giorno le lunghezze dell'ombra di un palo e del palo stesso, trovando poi, grazie ad un metodo grafico analogo a quello illustrato nella sezione di Eratostene, gli angoli dei triangoli formati.
A questo punto le due classi si dovranno comunicare le misure degli angoli.
L'angolo al centro nella circonferenza terrestre avente come lati i due raggi con estremi Firenze e Palermo, sarà dato dalla sottrazione degli angoli. Perché?
Conoscendo poi la distanza aerea tra Firenze e Palermo, sarà possibile quindi impostare la proporzione che ci darà la misura del meridiano.

4.1.4 Il teorema del pappagallo

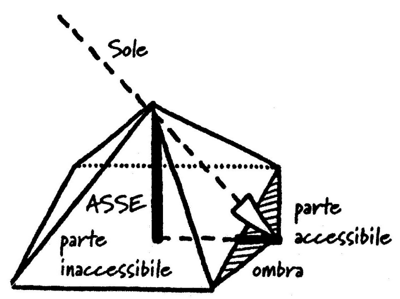
Max si mise a immaginare formule che dipendevano dal materiale sul quale erano scritte: il «più» diventava «meno» passando dal tessuto allo stagno, il segno di moltiplicazione si trasformava in un segno frazionario passando dalla pergamena ordinaria a quella finissima...

«Di quante volte più grande?» insistette Jonathan.

Nessuno si degnò di rispondergli.

La formula sparì dallo schermo. Ruche riattaccò a parlare: «Se si fosse trattato di un albero o... dell'obelisco di place de la Concorde, che, prima di essere trasportato a Parigi, si trovava in Egitto, allora sarebbe stato più semplice, e la misurazione che aveva effettuato sarebbe stata sufficiente. Ma la piramide era svasata: la sua particolarità geometrica consiste infatti nell'avere una base sulla quale poggia. La piramide di Cheope ha una base quadrata, e il suo asse cade esattamente al centro del quadrato. L'altezza della piramide è la lunghezza dell'asse e la lunghezza dell'ombra dell'asse è la lunghezza dell'asse. Semplice! Diapositiva!»

Sullo schermo apparve una figura.



Il signor Ruche, lanciando uno sguardo a Lea, proseguì: «Ora, Talete può misurare materialmente solo la parte che si estende al di sopra della base. L'altra, quella che si trova all'interno del monumento, gli è inaccessibile».

«Tutto questo, allora, non gli è servito a niente», esclamò la ragazza, indignata.

«È quello che ho creduto anch'io per un istante. Poi, però, ho riflettuto e ho trovato la soluzione, ma in un altro libro. Talete ha dovuto cavarsela eseguendo la misurazione al momento in cui i raggi del sole erano esattamente perpendicolari al lato della base.»

«Sarebbe a dire?»

«Eh, lasciami ricordare bene. Perpendicolari al lato della base significa che la parte nascosta era uguale alla metà di un lato. Dunque l'altezza della piramide era uguale alla lunghezza dell'ombra più la metà di un lato», concluse Ruche.

«Ehi, non ci ho capito niente», dichiarò Lea.

«E io meno ancora», confermò Jonathan.

«Si mangia!»

Salvato dal gong, pensò Ruche. Perrette li stava chiamando per la cena. «Cominciavo ad avere una gran fame», dichiarò.

Non riuscì a ingannare nessuno.

L'indomani, Jonathan e Lea non avevano lezioni di pomeriggio. Non appena tornarono dalla mensa della scuola, il signor Ruche li chiamò. «Sbrigatevi», disse, «ho fatto venire Albert.»

Suonarono alla porta: era Albert. Basco grigio a quadrettoni unto e bisunto, occhiali dalle lenti spesse come fondi di bottiglia, sigaretta spenta all'angolo della bocca, portava con disinvoltura i suoi sessant'anni e passa. «Buongiorno a tutti!» Poi s'impadronì del signor Ruche, con tanto di sedia a rotelle: sapeva come prenderlo. A bordo della sua vecchia Renault 404 grigio metallizzato, tutta cuoio e spifferi, trasportava il libraio a destinazione in tutti i suoi spostamenti, dall'incidente in poi. Era stato lui ad accompagnarlo alla BN, in quegli ultimi giorni.

Parlando di Albert, il signor Ruche diceva: «È un indipendente», e bisognava vedere quale piacere provava a pronunciare quella frase. Anche lui, a modo suo, era un indipendente. Albert si era sempre rifiutato di far installare la radio sul suo taxi: per lui era un motivo di orgoglio. Si chiedeva come potessero sopportare i clienti di fare un tragitto in taxi con una voce lancinante che salmodiava: «Rue de Vaugirard 105, boulevard de Belleville 83, vicolo senza uscita Guéménée, davanti al numero 8, rue de Vaugirard 105, rue du Faubourg Saint-Denis 34, vicolo senza uscita Guéménée, davanti al numero 8...» Dal canto suo, cercava clienti in strada o davanti alle stazioni, ma ne aveva anche alcuni abituali, come il signor Ruche.

L'incidente subìto da quest'ultimo li aveva avvicinati. Quando Albert si concedeva un giorno di ferie, andava a prelevare il signor Ruche, la mattina di buon'ora, e lo portava a zonzo per la campagna tutto il giorno. Sul sedile posteriore della macchina troneggiava un cesto di provviste pieno di leccornie, come nel film di Jean Renoir *Une partie de campagne*.

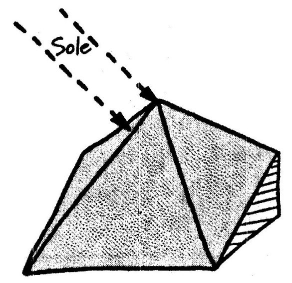
Max sarebbe dovuto andare a scuola, ma, con l'assenso di Perrette, si unì al gruppo. Tutti, Nofutur compreso, si stiparono a bordo della 404. Ferma all'ingresso della libreria, Perrette li guardò partire con una certa invidia.

Il signor Ruche si rifiutò di rivelare la loro meta. Place Pigalle, Notre-Dame-de-Lorette, la Trinité, l'Opéra Garnier, dove si rappresentava *Il ratto dal serraglio*... Imboccarono boulevard de l'Opéra. Albert si premurò persino di rallentare quando passò davanti all'entrata della metropolitana della linea 5, la stazione Pyramides.

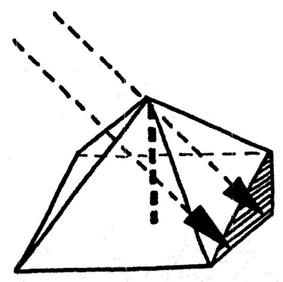
Dopo aver superato il Palais-Royal, la 404 passò sotto gli archi del Louvre, entrando in place du Carrousel. Albert frenò bruscamente, parcheggiando in un batter d'occhio la 404 lungo il marciapiede. Al centro della Cour Napoléon, la piramide di vetro scintillava al sole.

S'installarono al centro del cortile.

«Sono 4639 gli anni che separano la piramide opaca di Cheope da quella trasparente del Louvre. L'una sorge in riva al Nilo, l'altra sulle rive della Senna.» Parlando, il signor Ruche aveva tirato fuori un album da disegno con alcune matite. «Per Talete, l'idea che il sole tratti ogni cosa allo stesso modo si basa sul presupposto che i raggi del sole siano paralleli. L'astro è così lontano e noi siamo così piccoli che tale stima è giustificata. Ed ecco la situazione nel momento in cui Talete eseguì la misurazione.»

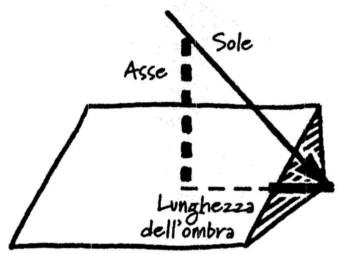


Da quando il signor Ruche aveva cominciato a usare la matita, Nofutur si era appollaiato sulla sua spalla, come per vedere meglio quello che stava disegnando. «Poiché la piramide che Talete doveva misurare non era trasparente come questa, dovrò praticare un'autopsia. Tolgo di mezzo tutto ciò che impedisce di vedere l'esterno, conservo l'ombra e disegno l'asse.» Cancellò le varie ombreggiature delle facce, poi tracciò una linea che scendeva dal vertice fino al centro della base. «L'altezza della piramide coincide con la lunghezza dell'asse», annunciò. «Ed è quello che Talete vuole ottenere.»

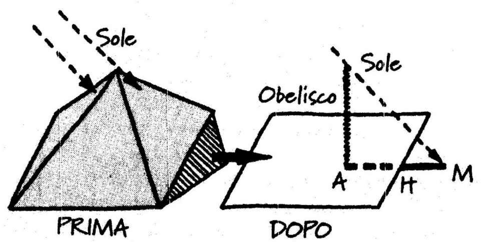


«Proseguiamo con l'autopsia.»

Visto che Ruche si agitava troppo, Nofutur lasciò la sua spalla per quella di Max. Il signor Ruche, intanto, cancellò del tutto le facce della piramide, poi, tracciando una linea orizzontale dal piede dell'asse al vertice del triangolo scuro che rappresentava l'ombra proiettata dalla piramide, aggiunse: «Se la piramide fosse stata trasparente, questa sarebbe stata l'ombra dell'asse di cui Talete voleva determinare la lunghezza».



«La parte dell'ombra che cade all'interno della base, dunque all'interno della piramide, è indicata dalla linea tratteggiata ed è inaccessibile. Talete non può misurarla; l'altra, quella che si estende dal lato della base fino all'estremità dell'ombra, è in grassetto, e Talete può misurarla. Anzi è l'*unica* grandezza che può misurare.» Cancellò il triangolo scuro e tracciò l'asse per intero, scrivendo la lettera A al piede dell'asse, la H nel punto in cui l'ombra intersecava il lato della base e la M al vertice dell'ombra; poi affiancò il primo e l'ultimo disegno. «Prima e dopo la cura, come nella pubblicità dei prodotti dimagranti.»



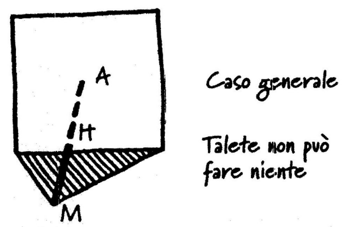
«Spogliare le cose di tutti i loro aspetti materiali, dimenticare la massa del monumento e cancellarla per conservarne soltanto gli effetti che ha sul problema in questione. Cancellare, epurare, semplificare, dimenticare, ecco che cosa ha fatto Talete. Del resto credo che tutti i matematici facciano così: è ciò che definiscono 'astrarre'. Per un matematico, il problema finisce qui», concluse il signor Ruche.

«Come?» insorsero Jonathan e Lea.

«Se Talete si fosse dedicato a un obelisco, il suo problema sarebbe stato risolto: avrebbe misurato direttamente la lunghezza di AM sul terreno. Invece voleva misurare una piramide, che, nascondendo nel suo interno la parte AH, interna alla base, la rendeva inaccessibile.»

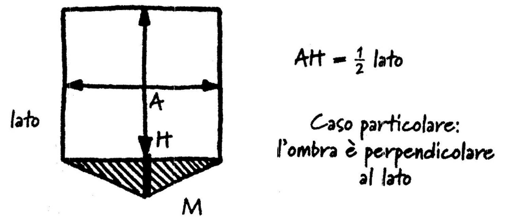
«Allora era fregato», esclamarono trionfanti Jonathan e Lea

Il signor Ruche ignorò l'interruzione. Alzando la testa, si accorse che alcuni turisti si erano fermati per seguire la scena da lontano. Tornò a Talete. «Che cosa succedeva sulla sabbia intorno alla piramide di Cheope? Quando la direzione dei raggi del sole formava un angolo col lato della base, cioè quasi sempre, l'ombra formava un triangolo e... Talete non poteva farci niente.»



«Non dimenticate che i matematici ne inventano una più del diavolo. Talete si mette alla ricerca di una situazione particolare che gli permetta di uscire dall'*impasse*, e la trova risolvendo il problema in un momento particolare della giornata, quando i raggi sono perpendicolari al lato della base. Si tratta della situazione di cui vi ho parlato a casa, e di cui, a quanto pare, non avete capito niente. Vediamola!»

Non era sicuro di riuscire a parlare con chiarezza, specie con quella massa di turisti che cominciava ad affollarsi intorno a lui. «Quello che Talete non poteva ottenere con la misurazione diretta, lo avrebbe dedotto col ragionamento. Quali erano le sue armi? Della piramide conosceva un unico dato, il lato della base, e di quello si sarebbe servito.» Il signor Ruche esibì un altro disegno, eseguito con una rapidità sorprendente.



Soddisfatto, osservò le reazioni del pubblico. I turisti riuniti intorno a lui erano sempre più numerosi. Stava chiudendo lentamente l'album da disegno, quando...

«Come faceva Talete a sapere che l'ombra era perpendicolare al lato?» domandò Jonathan.

Il solito piantagrane! Ruche gli lanciò un'occhiata truce. «È una buona domanda», disse tuttavia. «Me la sono posta anch'io...» Poi, riaprendo di malagrazia il quaderno, spiegò: «Talete non aveva a disposizione una squadra, ma qualcosa di meglio: l'orientamento della piramide. Gli architetti avevano costruito il monumento in modo che una delle facce fosse orientata in pieno verso il sud». Mentre parlava, completò l'ultimo disegno. «L'ombra è perpendicolare al lato nel momento in cui il sole si trova allo zenit, e cioè a mezzogiorno in punto.»

«Proprio quando fa più caldo», osservò Jonathan.

«Per conoscere bisogna soffrire», ribatté Lea in tono filosofico. «I testi dicono per caso se Talete si beccò un colpo di sole? A mezzogiorno in pieno deserto, sarebbe il minimo.»

«A mezzogiorno, certo, ma all'ombra, Lea. Ti ricordo che

Talete misurava l'ombra, non il sole. E quando si misura l'ombra, quale che sia e ammesso che ci sia, si può stare all'ombra.»

Il gruppo fu contagiato da una crisi d'ilarità.

«A proposito di ombra, non ci avrà menato un po' per il naso, signor Ruche? La piramide fa ombra tutti i giorni dell'anno a mezzogiorno?»

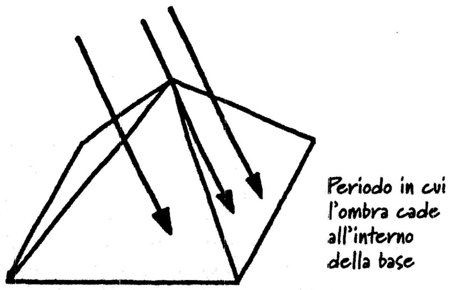
«No», rispose subito il signor Ruche.

Jonathan ribatté trionfante: «Occorre anzitutto che abbia un'ombra visibile, vale a dire che si estenda all'esterno della piramide. Se non ho capito male, almeno».

«Che sia visibile a mezzogiorno in punto, perché se è in un altro momento della giornata Talete non sa che farsene», aggiunse Lea.

«E che sia uguale alla piramide», concluse Jonathan. «Tutto considerato, è un pacchetto di condizioni non facili da realizzare.»

Ruche attese la fine della raffica di obiezioni. «La piramide non proietta ogni mezzogiorno un'ombra visibile e perpendicolare al lato della base: il problema è proprio qui. Perché sussista un'ombra, è necessario che il sole non sia troppo alto nel cielo durante il suo percorso apparente nel corso della giornata.»



«Riassumiamo. Le condizioni sono due: l'ombra dev'essere uguale alla piramide e perpendicolare alla base. Per rispondere a questi requisiti, bisogna uscire dal campo della geometria pura per entrare in quelli dell'astronomia, della geodesia e della geografia... La piramide di Cheope si trova a Giza, a trenta gradi di latitudine nord; come noi, ma molto più in basso, si trova al di sopra del tropico. Perché l'ombra sia uguale all'oggetto, occorre che i raggi solari abbiano un'inclinazione di quarantacinque gradi. Ora, d'estate a Giza i raggi sono quasi verticali, e quindi per un certo periodo dell'anno non c'è nessuna ombra. In più, perché l'ombra sia perpendicolare alla base, dev'essere orientata da nord a sud. Queste condizioni si verificano in coincidenza soltanto due giorni l'anno. In base ai calcoli degli astronomi, la misurazione di Talete poté essere effettuata solo... » Estrasse dalla tasca un prontuario e lo sfogliò. « ... il 21 novembre o il 20 gennaio, a scelta. Quindi, Lea, come vedi, tutto questo è avvenuto a mezzogiorno, certo, ma all'ombra e d'inverno. E se Talete si è beccato qualche malanno durante la misurazione, sarà stato un reumatismo piuttosto che un colpo di sole. Ah, dimenticavo: un'altra condizione perché tutto questo funzioni è che l'altezza della piramide sia maggiore della metà del lato della base... »

Un gruppo di giapponesi si affollò intorno al signor Ruche; alcuni di loro volevano acquistare un disegno, altri scattare una foto.

« Senz'altro il teorema ha un valore generale, ma la misurazione è davvero singolare. Come ha fatto, in concreto, Talete? Perché si tratta pur sempre di accertare l'altezza della piramide, no? » insistette Lea.

« Aveva a disposizione soltanto una corda e gli mancava persino l'unità di misura, così utilizzò il *talete*, vale a dire la sua statura. Servendosi della corda, di cui aveva regolato la lunghezza in base alla propria statura, misurò l'ombra, accertando che era lunga diciotto talete; poi misurò il lato della base, dividendolo per due e scoprendo che era lungo sessantasette talete. Addizionò le due misure e scrisse il risultato su un foglio: *la piramide di Cheope misura ottantacinque talete*. Ora, in base all'unità di misura locale, il talete equivaleva a 3,25 cubiti egiziani, il che fa 276,25 cubiti in totale. Quindi oggi sappiamo che l'altezza della piramide di Cheope è di 280 cubiti, vale a dire 147 metri! » Il signor Ruche non rivelò quanto tempo aveva dedicato a eseguire

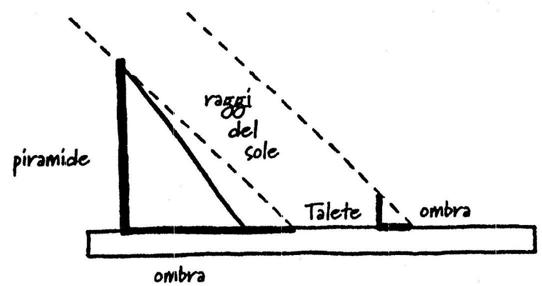
quei calcoli, la notte precedente, e quante volte si era sbagliato. « Questa », aggiunse invece indicando la piramide del Louvre, « ha come dimensioni... »

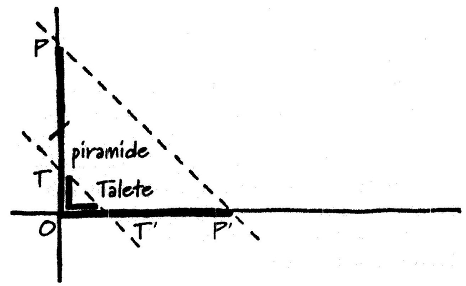
Stava per consultare il suo prontuario, quando si sentì la voce di Albert: « 21,60 metri di altezza e 34,40 di lato ».

Lo guardarono tutti con stupore, e lui, imbarazzato da quell'attenzione, prese a stropicciare il basco. « Lo sento ripetere ogni volta che porto qui i turisti », aggiunse, come per scusarsi.

« Per porre fine alle domande, vi ho preparato una batteria di disegni. »

Il signor Ruche staccò dall'album i fogli, presentandoli.



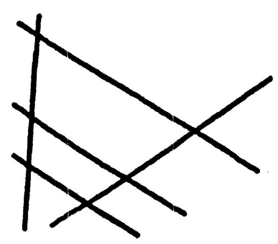


«Il che ci porta a quest'altro risultato...»

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OT'}}{\overline{OP'}}$$

Alcuni turisti giapponesi tesero la mano per prendere il foglio, e il signor Ruche dovette schermirsi. «Ed ecco che ritrovate il disegno della volta scorsa, con la rappresentazione del teorema di Talete, come ricordava Jonathan.»

Poi presentò l'ultimo disegno, in cui l'astrazione la faceva da padrona. Davvero non c'erano più né carne né materia: la ricerca dell'essenziale aveva raggiunto il culmine. Tutti avevano sotto gli occhi un autentico schema matematico. E concluse: «In effetti, questo teorema descrive quello che succede quando un fascio di rette parallele è tagliato da due secanti».



Uno scroscio di applausi salutò l'ultima frase del signor Ruche. In tutte le tonalità, e con gli accenti più improbabili, risuonarono nell'aria dei *Taelis*, *Talaiis* e così via. Talete fu cucinato in tutte le salse linguistiche possibili; un americano, travolto dall'entusiasmo, lanciò addirittura un: «*Yeah, Thales!*» Ma erano soprattutto i turisti giapponesi a essere in estasi; volevano persino pagare. *Ça, c'est Paris!*

Qualche tempo dopo, su un quotidiano di Tokyo, al centro della pagina culturale campeggiava una foto: il signor Ruche che troneggiava sulla sedia a rotelle; ai lati Max, con Nofutur appollaiato sulla spalla, e Albert, che, per istinto, si era tolto il basco,

ma aveva la cicca all'angolo della bocca. In secondo piano, sullo sfondo, i lettori di Tokyo potevano riconoscere la famosa piramide del Louvre. La foto era accompagnata da una didascalia:

高齢のフランス人学者は、建築家イェオ・ミン・ペイの設計によるルーヴル美術館のガラス製ピラミッドの高さを、古代ギリシアの数学者タレスの、影を使う方式で測定する。

Il sole era scomparso dietro le mura delle Tuileries e cominciava a far fresco. Invece di tornare direttamente a nord, la 404 costeggiò la Senna, entrando in place de la Concorde proprio nel momento in cui si accendevano le luci. Albert fece due giri completi della piazza, per lasciare a tutti il tempo di valutare l'obelisco, poi, imboccando rue Saint-Honoré, li portò ad ammirare la colonna di place Vendôme.

«Come vedete», disse il signor Ruche, che cominciava a essere stanco, «si trasferiscono colonne e obelischi, ma le piramidi sono più difficili da trasportare.»

«E da misurare», aggiunse Max.

«È sempre così», disse il signor Ruche per lui. «Al liceo, il mio professore di matematica diceva: 'Dunque basta applicare il teorema, eccetera', e posava il gesso. Ne sapeva delle belle. Basta così...»

«La matematica è semplice, signor Ruche», dichiarò Lea. «È la sua applicazione che è complicata.»

«Io direi che la matematica è complicata e che la sua applicazione lo è ancora di più», rettificò Jonathan.

«Tu drammatizzi sempre. Pensa a Talete: la validità del teorema supera di gran lunga tutte le sue applicazioni, eppure per misurare la piramide ha utilizzato un caso tutto particolare, quello in cui il rapporto tra la piramide e la sua ombra è uguale a uno, perché era il più semplice.»

«Il più semplice, sì, ma il meno frequente», obiettò Jonathan.

4.2 Diario di bordo

4.2.1 Lezione 8: 9 Aprile 2011

Alunni presenti: 12. In questa lezione l'obiettivo era riportare alla mente i concetti di base di astronomia, in particolare riguardanti il pianeta Terra, che serviranno poi per la seconda parte del nostro progetto di tirocinio.
Per questa lezione ho preparato una presentazione in Beamer. Ho parlato della forma della Terra, di come gli antichi avessero fatto a capirne la forma tramite prove indirette, della stella polare. Poi sono passata al reticolato terrestre, meridiani e paralleli che servono ad identificare un punto preciso nella sfera terrestre. Ho detto cosa si intende per emisfero boreale ed emisfero australe.
Poi sono passata ai moti terrestri: la rotazione attorno a se stessa, attorno ad un asse. A questo punto un ragazzo ha chiesto se era quello l'asse che si era spostato durante il terremoto in Giappone.
Ho posto poi l'attenzione sui raggi del Sole anche con un disegno. Il fatto che la Terra sia molto lontana dal Sole ci permette di considerare i raggi solari come tutti paralleli tra loro.
Ho parlato poi dell'alternarsi del giorno e della notte e ho chiesto che cosa succederebbe se la Terra non ruotasse attorno a se stessa; un ragazzo ha affermato, giustamente, che una parte rimarrebbe sempre al buio. Quindi ho continuato dicendo che se la Terra non ruotasse attorno a se stessa, metà pianeta avrebbe una temperatura glaciale e non sarebbe abitato e nell'altra metà farebbe perennemente molto caldo.
La Prof.ssa Bianchin ha aggiunto che è una pura causalità che ci sia vita sulla Terra, una serie di caratteristiche rare e favorevoli che hanno portato alla nascita della vita sul nostro pianeta.
Ho parlato poi del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Ho chiesto se loro conoscessero l'ellisse.
Risposta negativa (la geometria analitica nei licei psico-pedagogico è argomento di quarta superiore). Ho cercato di spiegare brevemente che l'ellisse è in realtà una circonferenza un po' schiacciata con due fuochi. Per cercare di spiegare un po' meglio ho riportato la metafora della capra:
"Prendiamo una capra che sia legata a una corda fissata ai due estremi in due bastoni (i fuochi). La capra però è legata in un modo particolare; può infatti scorrere per tutta la lunghezza della corda. Pensiamo di essere in un prato verde e che la nostra capretta sia affamata. La capra arriverà fino ad un certo punto a mangiare l'erba. Il perimetro della figura che viene a formarsi sull'erba è proprio un'ellisse".
Non so se la metafora sia arrivata a tutti oppure no. Alcuni ragazzi hanno avuto espressioni della serie "Ah carino", ma non ho approfondito troppo sulla reale comprensione.
A quel punto ho cominciato a parlare dell'orbita ellittica della Terra, del

fatto che il Sole che occupa uno dei due fuochi, dell'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano dell'eclittica.
Sono poi passata all'alternanza delle stagioni e del fatto che dipende dall'inclinazione dell'asse. Ho trovato molta difficoltà a spiegare quest'ultima cosa perché è un concetto abbastanza complicato da capire a prima vista e necessita di una certa visione tridimensionale.
Nell'ultima parte della lezione ho poi toccato uno degli argomenti più importanti di tutto il progetto di tirocinio, ossia la misura indiretta dell'altezza di un oggetto. Ho disegnato un campanile e un palo più piccolo e poi i raggi solari (paralleli fra loro) e le rispettive ombre. Ho chiesto poi informazioni sui due triangolini che si erano venuti a formare.

- Prima domanda: come sono i triangoli? Risposta: rettangoli. Abbastanza evidente dal mio disegno.

- Seconda domanda: quindi entrambi avranno cosa? Risposta: un angolo retto.

- Terza domanda: considerate i due raggi che formano l'ombra come sono? Paralleli. Potrei considerare una trasversale per poi usare le proprietà degli angoli che si vengono a formare.

- Quarta domanda: quali? Risposta: un ragazzo sostiene che potremmo prendere la linea che nel mio disegno indica la Terra come trasversale. A quel punto sono io che indicando i due angoli dell'inclinazione dei raggi del Sole che chiedo se sono uguali. Risposta affermativa. Perché? Momento di panico. Ogni volta che c'è da identificare la posizione reciproca di due angoli con le rette parallele tagliate da una trasversale i ragazzi entrano in confusione. Hanno una visione della matematica poco geometrica aggravata dal fatto che le rette parallele tagliate da una trasversale dovrebbero essere un argomento importante del biennio sul quale si dovrebbe restare abbastanza tempo. Alla fine siamo arrivati al fatto che sono uguali perché corrispondenti.

- Quinta domanda: E allora i triangoli come sono? Risposta: simili per il primo criterio. Tutti sembravano abbastanza convinti di questo fatto anche perché forse freschi di studio da compito in classe.

Ho lasciato i ragazzi con un appuntamento per il lunedì, giorno in cui avremmo misurato l'altezza della scuola.
Pur essendo l'ultima ora i ragazzi sembravano particolarmente interessati a questo genere di argomenti, forse perché inusuali da affrontare durante l'ora di matematica.

4.2.2 Lezione 9: 11 Aprile 2011

Alunni presenti: 14
Questa è stata la prima lezione sperimentale. Ho pensato infatti di sperimentare sul campo quello che era stato precedentemente spiegato nelle lezioni frontali. In questa lezione abbiamo misurato indirettamente l'altezza della palestra della scuola.
Fortunatamente il tempo meteorologico ci ha assistito quindi le ombre dei vari edifici erano perfettamente visibili. Nei giorni precedenti avevo osservato i diversi edifici del complesso scolastico e avevo identificato le ombre facilmente misurabili. La scuola è dotata di un parcheggio abbastanza ampio nel quale si possono effettuare tali misurazioni in sicurezza. Il Prof. Ottaviani mi ha gentilmente dotato di due metri a rullo. Arrivata a scuola ho quindi diviso la classe in due gruppi, spiegando a ciascun gruppo che il fine era quello di trovare la misura dell'altezza della palestra della scuola e che il gruppo che avesse trovato per primo la misura la volta successiva avrebbe ricevuto un premio. Ho fatto presente che tutto ciò di cui avevano bisogno erano gli appunti della lezione precedente e che quindi almeno un rappresentante per gruppo avrebbe dovuto portarli con sé. Dati in consegna i due metri siamo usciti nel piazzale della scuola, dove con l'aiuto della mia amica Camilla ho documentato con alcune foto l'operato della classe. Nonostante non facessi parte di alcuno dei due gruppi, ho cercato di seguire l'operato di entrambi. Inizialmente i due gruppi si sono trovati un po' spaesati, poi come spesso accade, dopo aver sollecitato la lettura degli appunti presi in classe, hanno capito che la prima cosa da fare era quella di misurare un oggetto facilmente misurabile direttamente.
In questo ambito i due gruppi si sono comportati entrambi nello stesso modo, almeno in una prima parte del lavoro; l'oggetto misurabile direttamente scelto è stata una balaustra.
Il da farsi era quindi misurare l'altezza della balaustra e successivamente la sua ombra. La balaustra però non era squadrata, ma aveva due vertici leggermente arrotondati. Capire quindi l'ombra di una delle zampe non era cosa da poco. A questo punto le due squadre si sono comportate in maniera diversa.
La prima ha scelto di usare come oggetto di riferimento metà balaustra (la metà era facilmente visibile grazie al ferro orizzontale presente). Ecco la misura dell'altezza dell'oggetto di riferimento

e della sua ombra

La seconda ha invece cambiato oggetto di riferimento utilizzando un quaderno posto verticalmente a terra.
La scelta della prima squadra è stata senz'altro più corretta in quanto le dimensioni del quaderno sono molto piccole; la misura ottenuta è stata quindi falsata da una serie di amplificazioni degli errori.
A questo punto entrambe le squadre si sono messe a misurare l'ombra della palestra della scuola.

Anche in questo caso ci sono state una serie di problematiche molto interessanti:

- la palestra era circondata da un marciapiede; quando i ragazzi hanno dovuto decidere cosa misurare c'è stato molto dibattito sul ruolo del marciapiede nella misura. Inizialmente entrambe le squadre sono cadute in errore: una misurando l'ombra senza considerare la lunghezza del marciapiede, l'altra misurando anche l'altezza del marciapiede come ombra.

- Successivamente io e la compagna che mi ha aiutato abbiamo effettuato la stessa misura usando come oggetto di riferimento la stessa balaustra. Abbiamo quindi misurato l'altezza della balaustra, la sua ombra e successivamente l'ombra della palestra della scuola. Poi, in via precauzionale, abbiamo nuovamente misurato l'ombra della balaustra e in dieci minuti era cambiata di circa dieci centimetri!! La misura della palestra cambiava quindi sensibilmente.

- Tornando in classe mi sono accertata su alcune accortezze che non so se i ragazzi avevano usato. Nessuno si è reso conto che il vertice del metro coincideva con l'inizio del metro, quindi tutte le misure sono state in eccesso di 3 cm.

- Le misure dei due gruppi sono state riportate in centimetri, nonostante nel metro fossero presenti anche i millimetri.

In definitiva le misure finali dell'altezza della palestra dei due gruppi sono state:

$$\textit{Gruppo1} \rightarrow 696cm$$

$$\textit{Gruppo2} \rightarrow 728cm$$

Mentre io effettuavo le misure i ragazzi divisi in due gruppi hanno scritto una relazione sull'esperienza svolta e sulle misure effettuate.

4.2.3 Lezione 10: 2 Maggio 2011

Alunni presenti: 14 Ho diviso questa lezione in due parti: una prima dedicata all'analisi dell'errore dell'esperienza della misurazione della scuola e una seconda dedicata all'esperienza di Eratostene.

Prima parte

Per quanto riguarda la prima parte credo di aver reso un po' troppo complicata la spiegazione. Infatti ho cercato di fare un'analisi quantitativa dell'errore nel senso classico.
Ho impostato la proporzione con i dati misurati da me e dalla mia compagna:

$$\textit{Balaustra} \rightarrow 116cm$$

$$\textit{Ombra balaustra} \rightarrow 135cm$$

$$\textit{Ombra palestra} \rightarrow 790cm$$

Con questi dati la proporzione impostata era la seguente:

$$116 : 135 = x : 790$$

Quindi:

$$x = \frac{116 * 790}{135} cm = 679cm$$

Ora se sostituiamo alla prima misura dell'ombra della balaustra, la misura trovata dopo dieci minuti cioè

$$\textit{Ombra balaustra 2} \rightarrow 125cm$$

l'altezza della palestra della scuola diventa $733cm$.
Ho fatto quindi notare alla classe che in solo dieci minuti la misura era cambiata approssimativamente di mezzo metro.
A quel punto ho cominciato l'analisi dell'errore: ho fatto presente che esistono vari tipi di errori: sistematici, accidentali. Alla misura vengono poi associati errori assoluti e relativi. Un ragazzo ha affermato che sapevano già

questo dal corso di chimica. Sapevano anche che una qualunque misurazione va scritta nella forma:

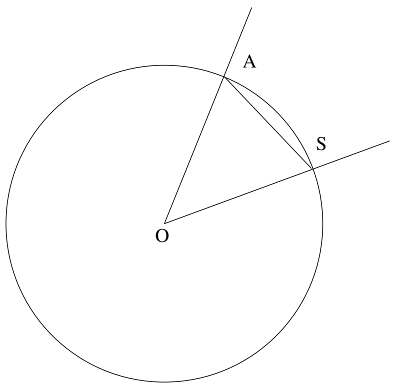
$$x = x_{misurato} \pm errore_{assoluto}$$

Ho cercato di fare un'analisi dell'errore e mostrare l'intervallo di confidenza per la misura. La formula però era data senza spiegazione, né dimostrazione ed è risultata piuttosto difficile da comprendere.
Allora ho semplicemente detto ai ragazzi che quella formula dava come intervallo di confidenza per la misura $[612cm; 746cm]$, quindi entrambi i gruppi di ragazzi avevano trovato una misura accettabile. Ho però premiato la squadra che per prima mi ha inviato il messaggio con la misura della palestra.
Ho fatto presente poi quali accortezze avremmo dovuto usare per una successiva misurazione per ridurre l'errore assoluto.
Devo dire che l'analisi dell'errore ha causato molta distrazione in aula. Effettivamente non è un argomento dei più interessanti (dal punto di vista dei ragazzi). Credo che per loro sia stato interessante trovare il risultato e capire dove potevano aver commesso eventuali errori. L'analisi dell'errore dal punto di vista quantitativo devo dire che è sta alquanto fallimentare.
Le cause possono essere diverse: la non banalità dell'argomento, la meccanicità delle operazioni da effettuare e la mancanza di una conoscenza valida degli argomenti.

Seconda parte

Nella seconda parte della lezione invece ho introdotto l'Esperienza di Eratostene.
Dopo una prima introduzione storica in cui ho fatto presente che Eratostene di Cirene era un "tuttologo" (si occupava infatti anche di astronomia, geografia ed era anche poeta!!), ho chiesto se si ricordavano le caratteristiche dei meridiani e dei paralleli. La risposta affermativa mi ha fatto andare avanti e ho cominciato a enunciare i dati in possesso di Eratostene, disegnando alla lavagna la costruzione.
Ho fatto presente che con tali dati Eratostene era riuscito ad ottenere la misura del meridiano terrestre con un errore dell'1%. A quel punto, ho diviso la classe in quattro gruppi (fatti da me in maniera tale che fossero equilibrati) e ho lasciato la seguente consegna:
Con i dati che Eratostene aveva in possesso calcola la lunghezza del meridiano terrestre e quella del raggio terrestre (entrambe in km).
I ragazzi si sono così divisi in gruppo e passando tra i banchi ho cercato di aiutarli nella risoluzione dell'esercizio. L'esperienza di Eratostene è abbastanza articolata, quindi la comprensione può essere difficoltosa.
Un'indicazione che ho dato è stata di disegnare per prima cosa i raggi solari. Dei quattro gruppi, due li hanno disegnati nel modo corretto, gli altri

due con rette che non avevano nulla a che vedere con gli elementi presenti. Ho rimarcato all'interno di questi gruppi che Siene si trova sul tropico e l'esperimento lo stiamo teoricamente effettuando a mezzogiorno nel giorno del solstizio d'estate. Con un po' di ragionamento sono riuscita alla fine a dare un qualche importante suggerimento per arrivare alla soluzione del problema.
Una volta individuati i raggi, non è stato banale capire quale di essi sarebbe stato importante per la soluzione. Quasi tutti i gruppi infatti invece di prendere il raggio solare passante per il vertice del palo, prendevano in considerazione il raggio passante per la base. Naturalmente anche in questo modo si poteva arrivare alla soluzione, ma tramite due passaggi, visto che tra le ipotesi avevo dato loro la misura dell'angolo che si forma tra il vertice e il raggio.
Visto che la soluzione tardava ad arrivare ho suggerito che bisognava utilizzare le conoscenze acquisite sulle rette parallele tagliate da una trasversale. A quel punto almeno due gruppi su tre (gli stessi che avevano disegnato correttamente le rette dei raggi) sono riusciti a ricavarsi la misura dell'angolo al centro. Uno di questi due gruppi è anche riuscito ad impostare le giuste proporzioni e ad arrivare alla misura di raggio e circonferenza.
L'ora è finita quindi ho detto ad ogni gruppo di prepararmi una relazione in cui spiegavano quello che avevano fatto.
Delle relazioni ricevute la lezione successiva (ne ho ricevute solo tre su quattro) due sono sostanzialmente corrette. La terza credo che sia frutto di qualche copiatura sbagliata. Si arriva alla misura del raggio terrestre, ma il disegno fa capire che non c'è una comprensione reale della situazione.



Da tale disegno infatti sembra che la distanza misurata sia il segmento tra Siene e Alessandria e non l'arco di circonferenza.

4.2.4 Lezione 11: 9 Maggio 2011

L'ultima lezione come metodologia è stata totalmente diversa dalle precedenti. Infatti abbiamo letto una parte del libro [2]. In questa parte, riportata nel sottocapitolo precedente, si dà una descrizione dell'esperienza di Talete di misurazione dell'altezza della **Piramide di Cheope**. La questione non è semplice come la misura di un palo verticale e nemmeno di un semplice edificio a forma di parallelepipedo. Qui infatti parte dell'ombra viene coperta dall'estensione della Piramide. Essa non è quindi possibile misurarla direttamente. Bisogna trovare un certo stratagemma.

Inizialmente ho chiesto se qualcuno se la sentisse di leggere. Non avendo nessun volontario ho cominciato io e man mano mi fermavo e spiegavo anche con parole mie come Talete ha raggirato il problema della non misurabilità diretta dell'ombra. Talete aveva a sua disposizione un solo dato: il lato della base quadrata della Piramide. La situazione ottimale per misurare l'ombra era quando essa stessa fosse perpendicolare al lato. Grazie all'orientazione delle piramidi sappiamo che ciò avviene quando il Sole è allo Zenit, cioè a mezzogiorno in punto.

A questo punto Talete ha cercato il giorno in cui la lunghezza dell'ombra fosse esattamente la stessa della piramide e in cui i raggi fossero perpendicolari ad un lato della Piramide.

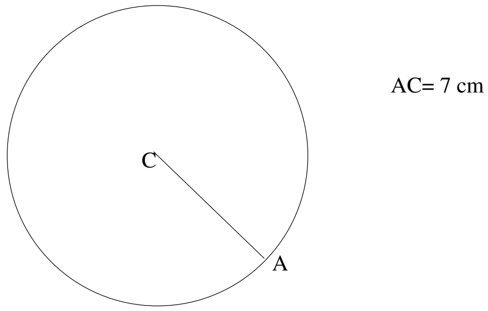
In questo passaggio c'è stato un momento di forte incomprensione. Infatti le nozioni di parallelismo e di perpendicolarità fino ad ora con la terza BL sono state espresse solo nel piano. Il concetto di perpendicolare in tre dimensioni non è chiaro. Ci sono state molte domande su questo punto e anche ragazzi che sostenevano che stessi dicendo cose sbagliate. Alla fine ho cercato di spiegare il concetto servendomi di due matite.

Questa lezione, che a priori avrei pensato una delle più interessanti, è stata la meno movimentata. C'è stato infatti un momento di assopimento della classe, quasi che la metodologia della lettura di un testo non fosse ben accetta. Ne ho parlato con la Prof.ssa Bianchin e lei mi ha consolato dicendo che non tutti i giorni sono uguali e che una lezione anche se strutturata bene può anche non piacere tanto per condizioni non dipendenti per forza da insegnanti e contenuti. Alla fine di questa lezione ho lasciato alla classe delle dispense, presenti nella parte del materiale consegnato, in cui ho spiegato le "esperienze pratiche" svolte nelle ultime lezioni.

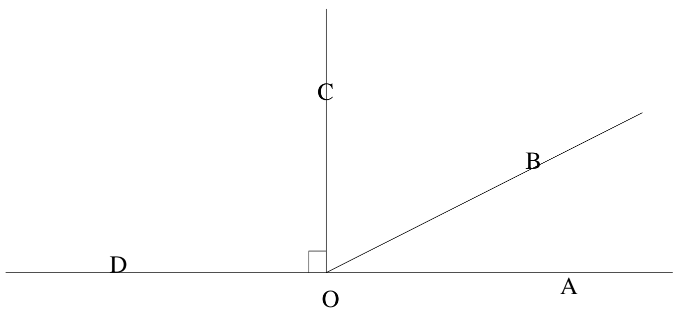
4.2.5 Lezione 12: Test finale

Test di verifica finale
11 Maggio 2011

Esercizio 1
Osserva la figura seguente. Quanto misura la circonferenza? E l'area del cerchio?
Se la circonferenza misurasse 30 π, quanto misurerebbe l'area?



Esercizio 2
Osserva la figura seguente.



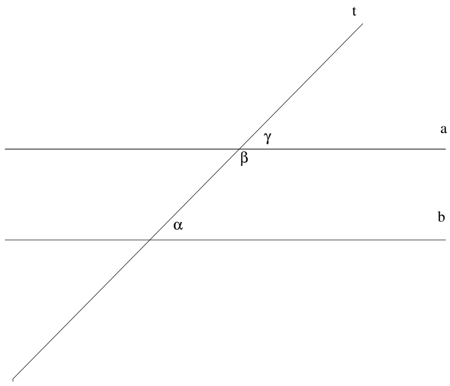
Quali tra le seguenti informazioni è vera?

1. $\widehat{BOC}$ e $\widehat{COD}$ sono supplementari;
2. $\widehat{COB}$ e $\widehat{BOA}$ sono supplementari;
3. $\widehat{DOC}$ è ottuso;
4. $\widehat{BOA}$ è acuto.

Esercizio 3
Enuncia il teorema di Talete, riportando anche il disegno.

Esercizio 4
Per imbottigliare una certa quantità di vino occorrono 150 bottiglie da 750 ml. Quante bottiglie occorrerebbero per imbottigliare la stessa quantità di vino in bottiglie da $1l$?

Esercizio 5
La figura seguente rappresenta due rette parallele tagliate dalla trasversale t.



Fra le seguenti affermazioni una sola è falsa. Quale?

1. $\alpha + \beta = 180°$
2. $\alpha = \gamma$
3. $\alpha = \beta$
4. $\beta + \gamma = 180°$
5. β e γ non sono congruenti.

Esercizio 6
Le seguenti affermazioni sono tutte vere tranne una. Quale?

1. due triangoli equilateri sono sempre simili;
2. due triangoli con un angolo retto sono sempre simili;
3. due triangoli scaleni con due angoli rispettivamente congruenti sono simili;
4. due triangoli rettangoli con un angolo acuto congruente sono simili.

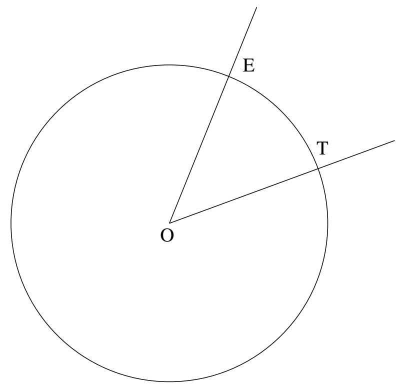
Esercizio 7

Dopo un viaggio nello spazio ti trovi sul pianeta TerzaBL della Galassia del Galilei.

Una stella molto simile al Sole illuminerà questo pianeta.

Tu vuoi essere un Eratostene di TerzaBL e puoi diventarlo svolgendo questo esercizio!

Osserva il seguente disegno:



Il punto E corrisponde a una città chiamata Erastotilandia.

Il punto T corrisponde a una città chiamata Taletecity.

Sai che, proprio in questo momento, il Sole a Erastotilandia è allo Zenit (nessuna ombra) e a Taletecity un palo e la sua ombra hanno la stessa lunghezza.

Inoltre la distanza tra le due città (l'arco ET) è di 314 km.

Calcola la lunghezza del meridiano e il raggio di TerzaBL.

Capitolo 5

Analisi della sperimentazione

5.1 Valutazione verifiche presentate

Gli esercizi delle prove che sono state presentate alla classe sono stati tratti in parte da vari libri ([4], [5], [6], [12]) e in parte inventati da me (con l'aiuto del Prof. Ottaviani e della Prof.ssa Bianchin, naturalmente).

5.1.1 Primo test di valutazione: 28 Marzo 2011

Il compito svolto dopo la prima parte del lavoro è stato finalizzato alla verifica delle conoscenze geometriche di base.
Ne ho fatte tre differenti versioni simili e (almeno nelle intenzioni) della stessa difficoltà. Il compito è riportato nel paragrafo 3.2.4.
Nei tre compiti vi erano i seguenti tipi di esercizi:

1. esercizio sull'applicazione del teorema di Talete;
2. esercizio sulla nomenclatura degli angoli formati da due rette parallele tagliate da una trasversale;
3. esercizio sulla similitudine di due triangoli, con proporzioni da impostare;
4. esercizio sul cerchio: misura dell'area e della circonferenza;
5. esercizio finale più elaborato sulla similitudine dei triangoli.

I primi quattro esercizi erano o a risposta multipla o da completare. Il quinto esercizio invece era un problema da svolgere in cui particolare importanza era data alla correttezza del disegno e alla completezza delle ipotesi. I punteggi sono stati dati nel seguente modo: tutti gli esercizi dall'1 al 4 avevano un punteggio di $1,5$.
L'esercizio numero 5 invece, se eseguito in maniera completa, aveva un peso di 4 punti, ma sono stati attribuiti 2 punti anche qualora solo disegno e

ipotesi fossero corretti.
Il tutto è riassunto dalla seguente tabella:

Esercizio	**Punteggio**
1	1,5
2	1,5
3	1,5
4	1,5
5 solo disegno e hp	2
6 completo	4

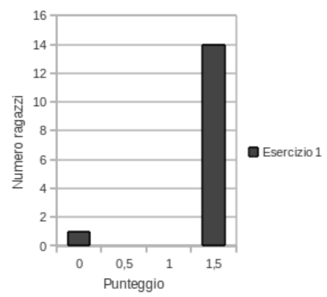
La griglia seguente indica invece il punteggio ottenuto dagli studenti nei primi 4 esercizi (ci soffermeremo successivamente sul quinto):

Esercizio	0 punti	0,5 punti	1 punto	1,5 punti
1	1	0	0	14
2	7	0	0	8
3	2	0	5	8
4	4	0	0	11

A questo punto analizziamo qualitativamente uno per uno gli esercizi:

Esercizio 1

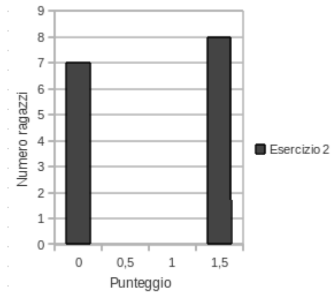
Il primo esercizio sul Teorema di Talete è risultato molto facile per la classe. La quasi totalità dei ragazzi ha infatti risposto correttamente, molti dei quali esplicitando nel foglio la giusta proporzione da impostare.



Esercizio 2

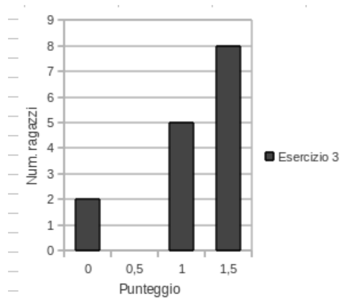
Nel secondo esercizio nel disegno era riportato un disegno di due rette parallele tagliate da una trasversale in cui erano indicati gli angoli con lettere dell'alfabeto greco e latino.
Nel compito della fila 1 veniva chiesto quale fosse l'angolo alterno interno rispetto ad un certo angolo.
Nel compito della fila 2 veniva chiesto quale fosse l'angolo corrispondente rispetto ad un certo angolo.

Nel compito della fila 3 veniva chiesto quale fosse l'angolo coniugato rispetto ad un certo angolo.
Le risposte corrette sono state 8, le errate 7. Delle 7 risposte sbagliate ben 4 provengono dagli studenti che avevano ricevuto in consegna la fila 3. L'angolo coniugato, quindi, risultava più "sconosciuto" degli altri, forse perché meno utilizzato negli esercizi svolti in classe.



Esercizio 3

L'esercizio sulle similitudini è stato l'unico nel quale ho dato come punteggio anche 1. Vi erano infatti da impostare due differenti proporzioni. A chi ha impostato correttamente solo una delle due ho assegnato un punteggio parziale di 1.



8 alunni hanno completato correttamente le due proporzioni. Andiamo ad analizzare gli errori commessi nei restanti 7.
I 5 ragazzi che hanno ottenuto 1 come punteggio, che quindi hanno completato in maniera errata una delle due proporzioni, hanno commesso vari tipi di errore:

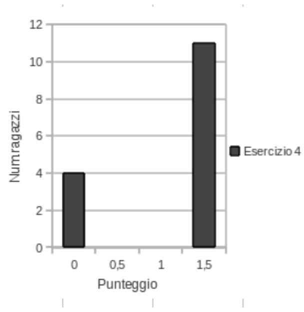
- un errore di distrazione in cui è stato riportato un lato di un triangolo effettivamente non presente;
- una proporzione impostata nel seguente modo: $AB : EF = EF : AB$;
- uno scambio nell'ordine dei termini al secondo membro della proporzione;

- due scritture del tipo $AC : ED = ac : \alpha\gamma$ dove a è l'angolo in A, c l'angolo in C e così via; i due studenti che hanno commesso questo errore avevano avuto in consegna due file diverse, si può dire che sono arrivati separatamente allo stesso errore.

I due studenti che hanno ottenuto 0 come punteggio hanno in un caso lasciato in bianco l'esercizio e nell'altro sbagliato i lati delle due proporzioni.

Esercizio 4

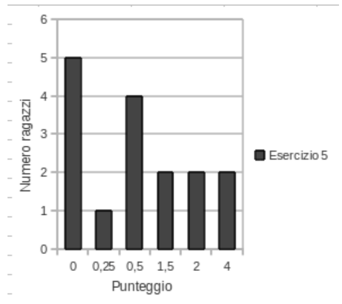
Quando ho deciso, insieme al Prof. Ottaviani, di dare in consegna questo esercizio, ci aspettavamo che la totalità degli studenti rispondesse in maniera corretta.
In due delle tre file la domanda posta era quella di calcolare la lunghezza della circonferenza; nella restante, invece, si chiedeva di calcolare l'area del cerchio.



Come si vede nel grafico, undici studenti hanno risposto correttamente, quattro invece hanno fatto la scelta sbagliata. Di questi quattro, tre avevano in consegna di calcolare l'area del cerchio e solo uno la lunghezza della circonferenza.
Sicuramente ha influito il fatto che durante le lezioni mi sono soffermata più volte sulla lunghezza della circonferenza e abbia solo accennato la formula per calcolare l'area del cerchio.
In ogni caso sono argomenti che vengono abbondantemente trattati alle scuole medie. Si presume quindi che gli studenti, arrivati al Liceo, posseggano già queste conoscenze di base.

Esercizio 5

Nella seguente tabella sono rappresentati i differenti punteggi ottenuti nell'ultimo esercizio.



I criteri di assegnazione del punteggio sono stati i seguenti:

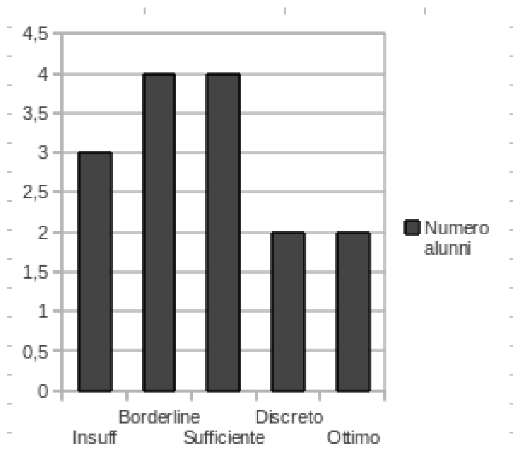
- 0 punti per esercizio non svolto o errato anche nella stesura delle ipotesi e del disegno;
- 0,25 punti per disegno sostanzialmente corretto, ma con un'imperfezione;
- 0,5 punti per disegno corretto e ipotesi errate;
- 1,5 punti per disegno corretto e ipotesi quasi completamente corrette;
- 2 punti per disegno e ipotesi corretti;
- 4 punti per esercizio svolto interamente in maniera esatta.

Dei cinque alunni che hanno ottenuto 0 punti per questo esercizio due non hanno neppure disegnato la figura, i tre restanti invece hanno svolto il disegno in maniera errata. Tra gli ultimi tre, due non hanno disegnato un triangolo rettangolo ma un triangolo isoscele.
Lo studente al quale ho assegnato un punteggio di 0,25 ha disegnato, giustamente un triangolo rettangolo, ma con la particolarità dell'essere isoscele. A quel punto le ipotesi sono state scritte in funzione di questa nuova ipotesi.
Chi ha ottenuto 0,5 ha eseguito il disegno in maniera corretta, ma non le relative ipotesi.
Con 1,5 e 2 punti si è premiato chi aveva impostato nel modo corretto sia il disegno che le ipotesi.
Due studenti hanno svolto correttamente l'intero esercizio con notevole precisione e dovizia di particolari.

Considerazioni generali

A mio avviso il risultato finale è stato alquanto positivo, considerando il livello di partenza della classe e soprattutto l'alta percentuale di risposte corrette negli esercizi a risposta multipla.
L'ultimo esercizio era stato messo nel compito in classe appositamente per

premiare gli studenti che più avevano passione e predisposizione per la geometria e che erano venuti più fuori durante le ore di lezione in classe.
Il fatto che molti altri siano comunque riusciti a disegnare correttamente, secondo le indicazioni fornite dal testo del problema, è sicuramente segno di un buon lavoro svolto.
La Prof.ssa Bianchin infatti mi ha più volte detto che fin dal primo giorno in cui è entrata in quella classe una delle difficoltà che incontravano i ragazzi era leggere e comprendere i compiti assegnati.
Nel seguente istogramma è illustrata la valutazione finale dei ragazzi:



5.1.2 Secondo test di valutazione: 11 Maggio 2011

Il test finale di valutazione è stato consegnato in un'unica forma. Non c'erano file differenziate. È riportato in 4.2.5.
Composto da sette esercizi, per la maggior parte era finalizzato alla verifica del raggiungimento delle competenze in ambito geometrico e solo l'ultimo esercizio era destinato alla verifica della comprensione della parte sperimentale.
Gli esercizi erano strutturati nel seguente modo:

1. esercizio su cerchio e circonferenza;
2. esercizio su angoli complementari, supplementari, acuti e ottusi;
3. esercizio sul teorema di Talete;
4. esercizio sulle proporzioni;
5. esercizio sugli angoli formati da rette parallele tagliate da una trasversale;
6. esercizio sulla similitudine;

7. esercizio sperimentale che riproduceva l'esperienza di Eratostene di misura del raggio e del meridiano terrestre.

Gli esercizi 2,5 e 6 erano quesiti a risposta multipla, i restanti invece domande aperte.
Ho deciso di assegnare i punteggi nel seguente modo:

Esercizio	**Punteggio**
1	1,5
2	1
3	1,5
4	1
5	1,5
6	1,5
7	2,5

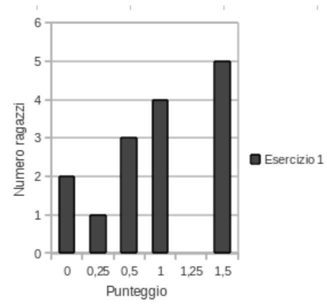
Nei quesiti a domanda aperta ho assegnato anche punteggi intermedi a seconda della completezza della risposta.
Nella seguente griglia sono rappresentati i risultati degli studenti in ogni esercizio:

Es.	0 pt	0,25 pt	0,5 pt	1 pt	1,25 pt	1,5 pt	1,75 pt	2 pt	2,5 pt
1	2	1	3	4	0	5	-	-	-
2	5	0	0	10	-	-	-	-	-
3	6	0	1	2	2	4	-	-	-
4	10	0	1	4	-	-	-	-	-
5	3	0	0	0	0	12	-	-	-
6	9	0	0	0	0	6	-	-	-
7	7	0	0	2	0	1	1	1	1

Analizziamo qualitativamente ciascuno degli esercizi.

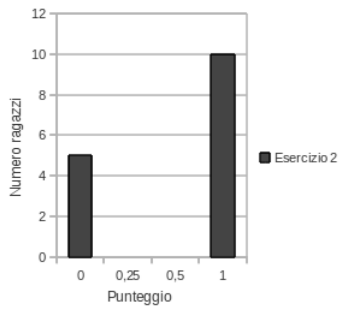
Esercizio 1

L'esercizio era composto da due parti. Una prima in cui dal raggio si doveva arrivare a calcolare la misura della circonferenza e una seconda in cui dalla misura della circonferenza si doveva calcolare l'area.
Naturalmente la seconda parte dell'esercizio è stata più problematica della prima in quanto si trattava di compiere un'operazione inversa.



Chi ha ottenuto come punteggio 0, o non ha svolto l'esercizio, o ha fatto calcoli errati.
Lo studente al quale ho assegnato un punteggio di 0,25 ha svolto solo la seconda metà dell'esercizio applicando però la formula diretta. Il testo infatti richiedeva "*Se la circonferenza misurasse* 30π *quanto misurerebbe l'area del cerchio?*" e lo studente ha applicato la formula del calcolo dell'area considerando 30π come raggio. Ha dimostrato quindi di conoscere la formula per il calcolo dell'area del cerchio, ma non l'ha applicata nella prima parte dell'esercizio dove era la cosa giusta da fare.
Chi ha ottenuto 0,5 come punteggio ha svolto solamente la prima domanda della prima parte dell'esercizio, applicando quindi la formula per il calcolo della circonferenza correttamente, ma dimostrando, ancora una volta, di non ricordarsi la formula per il calcolo dell'area del cerchio.
Chi ha ottenuto 1, invece, ha svolto correttamente la prima parte dell'esercizio, ma non la seconda. Ha applicato le due formule in maniera diretta, ma non inversa.
In ogni caso ben 6 persone hanno svolto l'esercizio in maniera corretta.

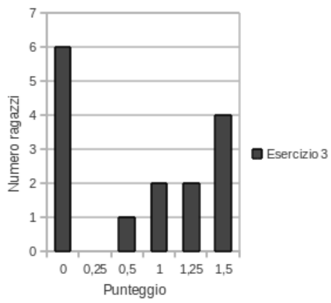
Esercizio 2



Per l'esercizio numero 2 è stata data la risposta corretta da dieci alunni su quindici.
I rimanenti hanno tutti commesso lo stesso errore, dando come risposta corretta la risposta numero 2, confondendosi cioè tra angoli complementari e supplementari.

Esercizio 3

Il terzo esercizio richiedeva l'enunciato del Teorema di Talete con disegno.



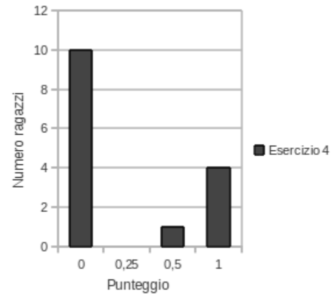
Sei persone hanno lasciato l'esercizio in bianco.
Le altre hanno risposto in maniera sostanzialmente corretta. La differenziazione nei punti assegnati sta nella forma in cui è stato scritto l'enunciato.
Chi ha ottenuto 1, 1,25 punti ha eseguito il disegno in maniera corretta, ha scritto una delle possibili proporzioni impostabili, ma non ha scritto le ipotesi o le ha sbagliate. Gli errori sulle ipotesi sono stati di due tipi:

- due ragazzi non hanno scritto che il fascio è composto da rette parallele;

- altri per scrivere che le rette sono parallele hanno usato la stessa notazione che avevano usato per i punti nel disegno ($A \parallel B$).

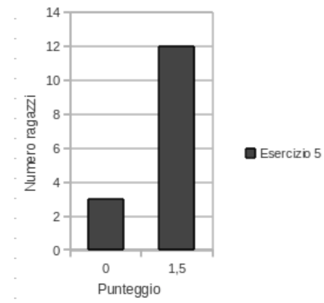
Esercizio 4

Quando ho consegnato l'esercizio 4, pensavo che la quasi totalità dei ragazzi rispondesse in maniera corretta. Si trattava infatti di eseguire una semplice moltiplicazione. Il testo però ha ingannato la maggior parte, che hanno impostato la proporzione inversa.
La meccanicità del procedimento di impostazione delle proporzioni in questo caso ha superato il buon senso.
Inoltre un controllo successivo della correttezza logica della risposta avrebbe fatto suonare qualche campanello d'allarme.
"È possibile che per imbottigliare la stessa quantità di vino servano più bottiglie da un litro che da 0,75 ? " La pratica usuale, però, tende a delegare il compito allo strumento, in questo caso la proporzione diretta.



Esercizio 5

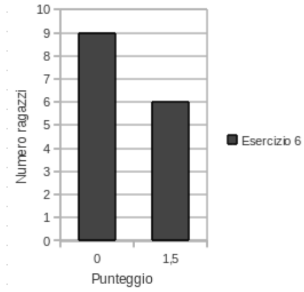
Il quinto esercizio sugli angoli è stato svolto in maniera corretta dalla maggioranza degli studenti.



L'argomento erano le proprietà degli angoli formati da rette parallele tagliate da una trasversale. Considerando che nel compito di metà sperimentazione le risposte corrette date ad un esercizio analogo erano state 8 su 15, direi che c'è stato un notevole miglioramento. Da notare che dei tre studenti che hanno dato la risposta errata, due hanno scelto la risposta 2, quella cioè riguardante gli angoli coniugati che avevano destato qualche problema nel primo test.

Esercizio 6

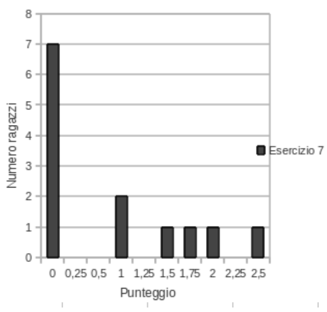
L'esercizio 6 sui triangoli simili era sicuramente più difficile di quello dato in consegna nel test di metà sperimentazione. Ha suscitato non pochi problemi:



Dei 9 alunni che hanno dato la risposta errata, 6 hanno dato la risposta 3, sostenendo quindi che è falso che *due triangoli scaleni con due angoli rispettivamente congruenti sono simili.* Chiaramente il fatto che i due triangoli fossero scaleni ha dato un'impressione di ineguaglianza che ha portato ad escludere quella risposta dalle affermazioni vere.

Esercizio 7

L'esercizio 7 era nettamente più difficile degli esercizi precedenti.
La risoluzione dell'esercizio necessitava una buona comprensione dell'esperienza di Eratostene anche per la scrittura delle ipotesi; infatti l'ipotesi che l'angolo è di 45° non è esplicita, viene detto soltanto che il palo e la sua ombra hanno la stessa lunghezza. Tale fatto era presente anche nell'esperienza di misurazione della Piramide di Cheope.



In generale l'esercizio è stato lasciato in bianco (o quasi) da 3 persone. Altre quattro hanno solo disegnato le rette rappresentanti i raggi nel disegno e il segmento ombra del palo. Delle 8 persone che hanno avuto un punteggio maggiore di 0 abbiamo che:

- 3 hanno svolto in maniera sostanzialmente corretta l'esercizio; in un caso c'è stato un piccolo errore di distrazione e un 315 si è trasformato in 314, negli altri si è usato al posto dell'ampiezza dell'angolo giro quella dell'angolo piatto. I due ragazzi si sono quindi ricavati la semilunghezza del meridiano;

- 1 ha svolto in maniera corretta l'esercizio arrivando alla soluzione impostando però la proporzione in maniera sbagliata ($x : 360 = 45 : 314$ invertendo quindi i termini al secondo membro). La soluzione però è stata $x = \frac{360*314}{45} = 2512$ dove quindi si è applicato in maniera sbagliata proprietà fondamentale delle proporzioni 3.1.11, arrivando però al giusto risultato.

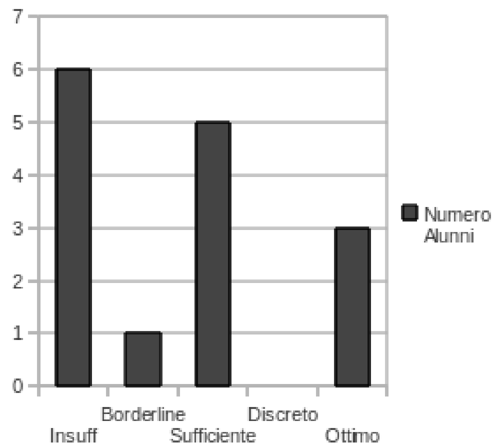
- 1 ha completato il disegno in maniera corretta e espresso le ipotesi, non ha però svolto l'esercizio.

- 1 è arrivato al risultato giusto scrivendo le ipotesi correttamente, ma completando il disegno in maniera errata. Questo ragazzo ha svolto il compito in un giorno diverso dagli altri.
- 1 ha completato il disegno in maniera corretta sbagliando però le ipotesi, sostenendo che i due angoli acuti del triangolo rettangolo che ha per cateti il palo e la sua ombra misurano 30°.
- 1 ha scritto bene le ipotesi dell'esercizio e impostato bene lo svolgimento, ma ha rappresentato in maniera errata i raggi del Sole nel disegno.

I risultati in questo esercizio sono stati per me una sorpresa. Non mi aspettavo infatti che 3 persone lo risolvessero in maniera corretta e che altrettanti ci arrivassero molto vicini. C'è da dire che, vedendo la classe inizialmente in difficoltà, durante il compito ho fatto una precisazione spiegando alla lavagna cosa volesse dire che la lunghezza del palo fosse uguale alla sua ombra. Sicuramente la visualizzazione della situazione ha aiutato chi aveva chiare le esperienze spiegate a lezione nella risoluzione dell'esercizio.

Considerazioni finali

Nel complesso la prova è andata sufficientemente bene. I punteggi totali attribuiti sono stati i seguenti:



Ci sono state più insufficienze gravi, ma il numero di alunni che hanno svolto un compito eccellente è aumentato, a discapito però dei discreti che sono passati alla sufficienza.

5.2 Cosa ne pensano i ragazzi

Nella lezione successiva al test finale, la Prof.ssa Bianchin ha consegnato alla classe il seguente test di valutazione dell'esperienza. Io non ero presente in tale giorno, anche per non influenzare le considerazioni della classe.

APPLICAZIONI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA ALL'ASTRONOMIA.
VALUTAZIONE DELL'ESPERIENZA

Rispondi alle seguenti domande dove i simboli corrispondono a:

 Decisamente no

 Più sì che no

 Più no che sì

 Decisamente sì

Domanda				
1. Gli argomenti di geometria trattati erano totalmente nuovi (rette parallele, circonferenza, triangoli)?				
2. Conoscevi le applicazioni astronomiche della geometria?				
3. L'esistenza di applicazioni “pratiche” della geometria ti ha sorpreso?				
4. Gli argomenti delle lezioni svolte erano interessanti?				
5. Gli argomenti delle lezioni erano difficili da capire?				
6. È stato impegnativo seguire le lezioni?				
7. Il tempo di ogni lezione era proporzionale agli argomenti trattati?				
8. Il materiale fornito (fotocopie, dispense, diapositive) è stato utile per la comprensione degli argomenti?				
9. Tì è piaciuta l'esperienza di misurazione della scuola?				
10. Pensi che sia interessante apprendere a scuola la storia di alcune esperienze di applicazione della matematica come quelle di Talete e Eratostene?				
11. La tirocinante ha esposto gli argomenti in modo chiaro?				
12. La tirocinante è stata disponibile in caso di richiesta di chiarimenti?				
13. La tirocinante ha motivato interesse verso gli argomenti?				

Quali tra i seguenti argomenti ti ha interessato maggiormente?

1. Rette parallele tagliate da una trasversale.
2. Circonferenza e cerchio.
3. Proporzioni fra grandezze.
4. Teorema di Talete.
5. Similitudini tra triangoli.
6. Il Pianeta Terra e le sue caratteristiche.
7. Misura indiretta dell'altezza di un oggetto.
8. Esperienza di Eratostene: misura del meridiano terrestre.
9. Esperienza di Talete: misura dell'altezza della Piramide di Cheope.

Perché?

…..

....

....

…..

Commenti e suggerimenti.

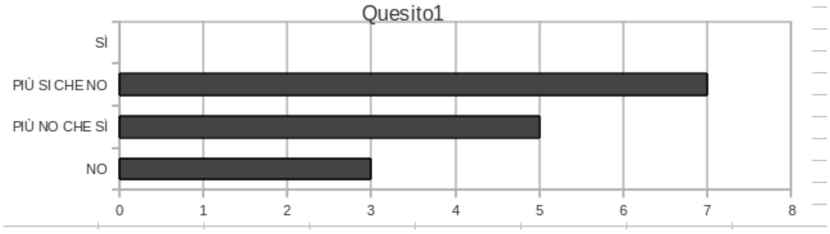
…..

....

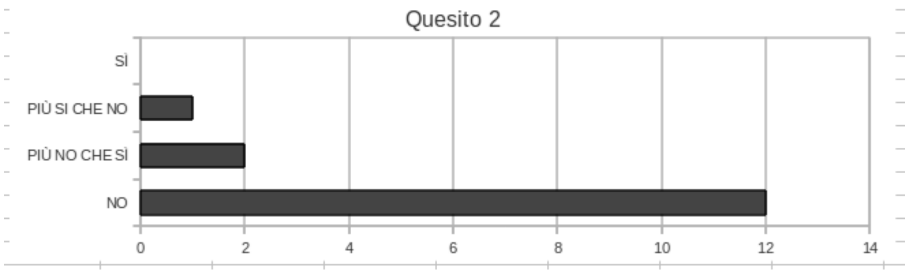
....

....

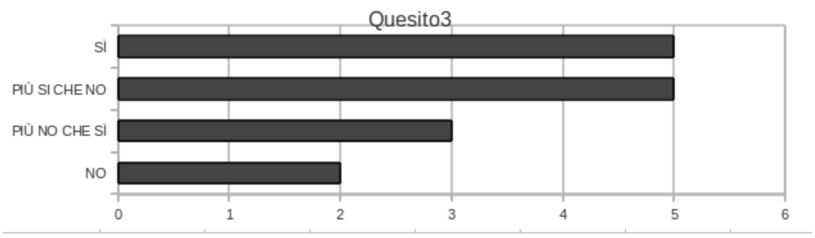
Le risposte ai vari quesiti sono state le seguenti:
1.Gli argomenti di geometria trattati erano totalmente nuovi (rette parallele, circonferenza, triangoli)?



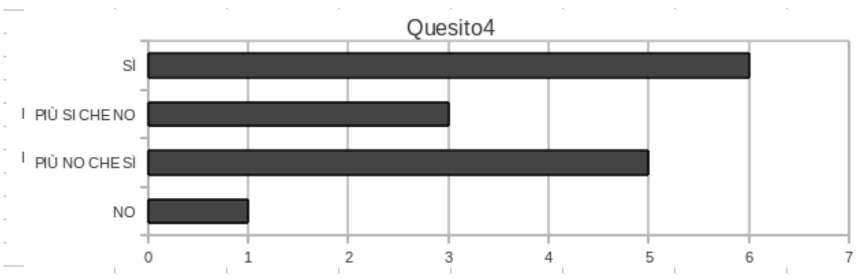
2.Conoscevi le applicazioni astronomiche della geometria?



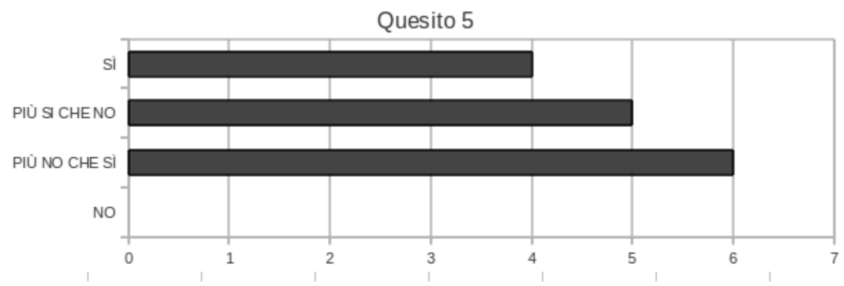
3.L'esistenza di applicazioni pratiche della geometria ti ha sorpreso?



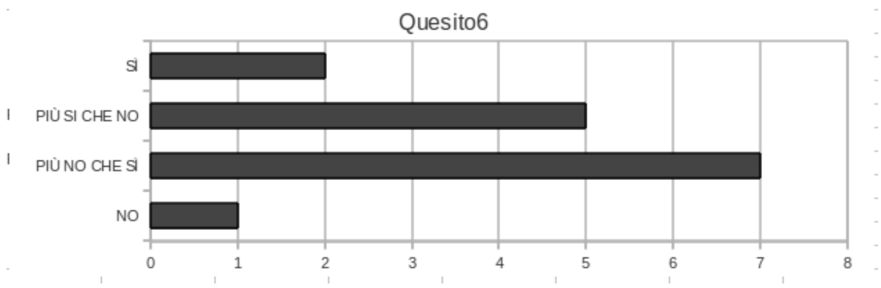
4.Gli argomenti delle lezioni svolte erano interessanti?



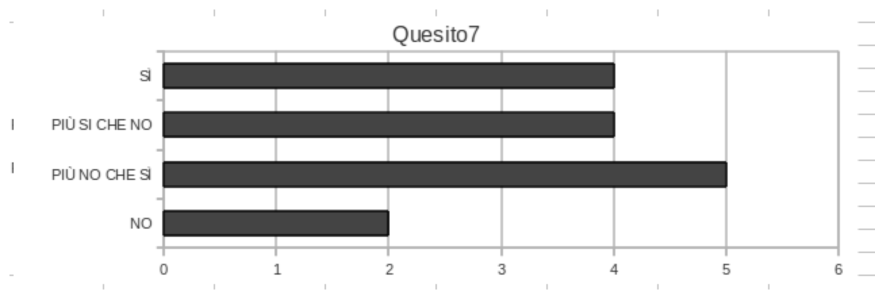
5.Gli argomenti delle lezioni erano difficili da capire?



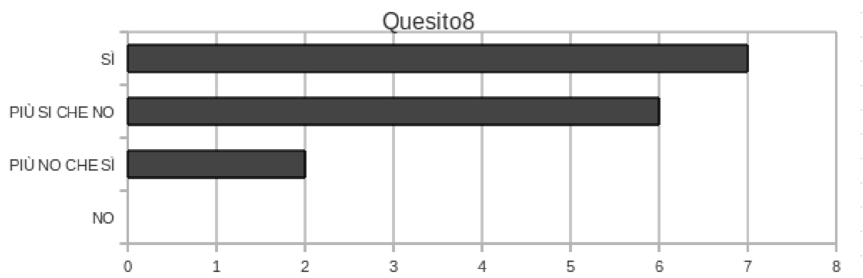
6.È stato impegnativo seguire le lezioni?



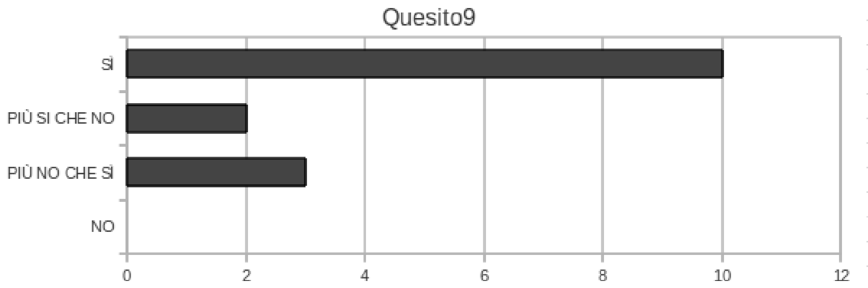
7.Il tempo di ogni lezione era proporzionale agli argomenti trattati?



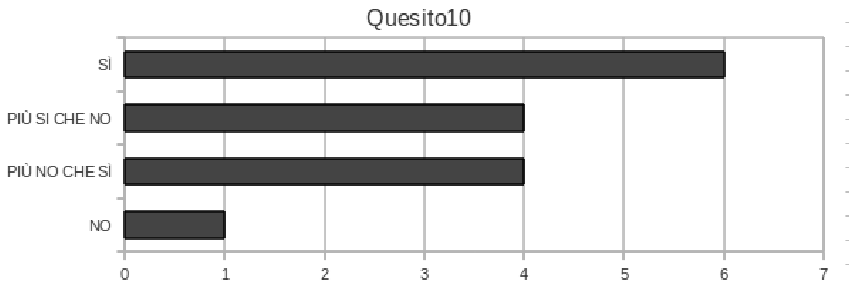
8.Il materiale fornito (fotocopie, dispense, diapositive) è stato utile per la comprensione degli argomenti?



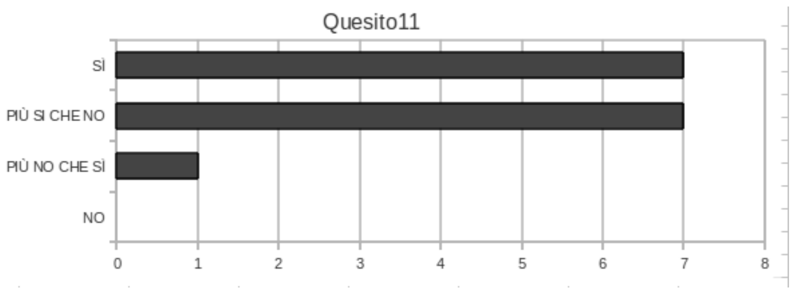
9.Ti è piaciuta l'esperienza di misurazione della scuola?



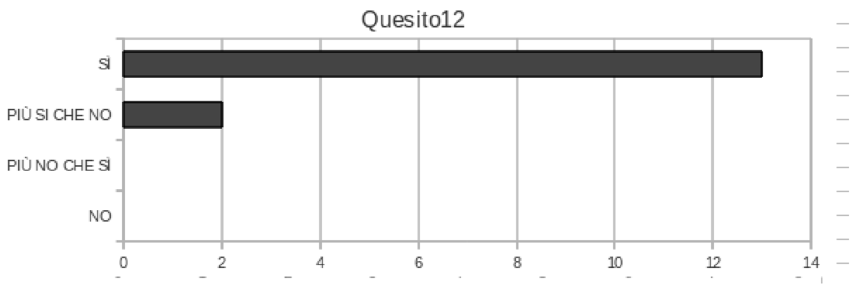
10.Pensi che sia interessante apprendere a scuola la storia di alcune esperienze di applicazione della matematica come quelle di Talete e Eratostene?



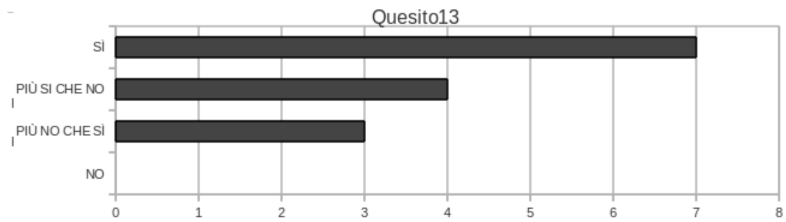
11.La tirocinante ha esposto gli argomenti in modo chiaro?



12.La tirocinante è stata disponibile in caso di richiesta di chiarimenti?



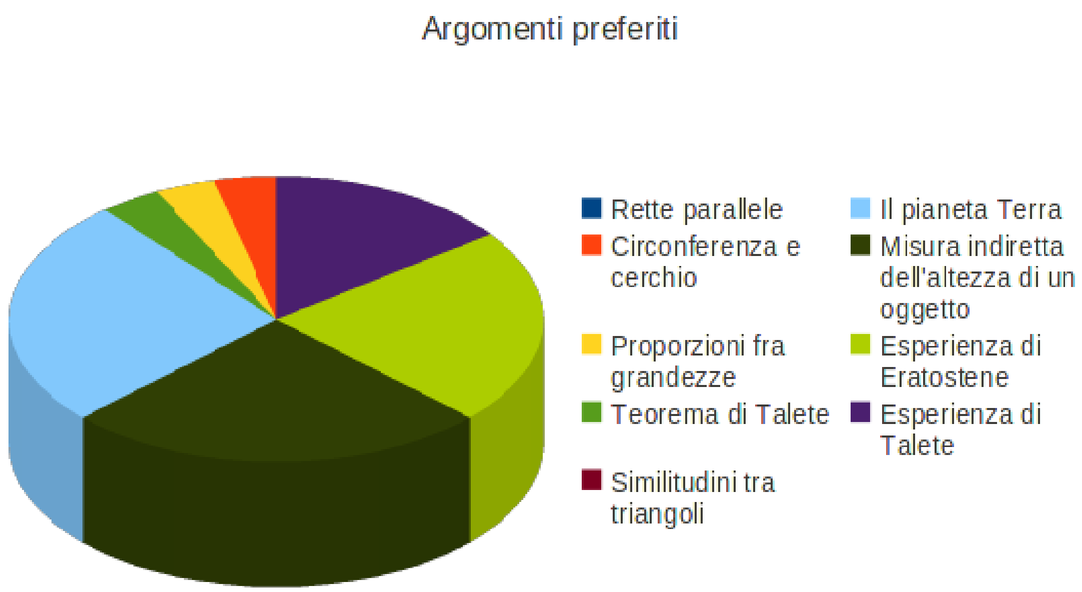
13.La tirocinante ha motivato interesse verso gli argomenti?



5.2.1 Argomenti preferiti

Nella tabella seguente riportiamo gli argomenti che maggiormente hanno interessato i ragazzi, seguiti da un diagramma a torta. Ogni ragazzo poteva esprimere più di una preferenza.

Argomento	**N. preferenze**
Rette parallele	0
Circonferenza e cerchio	1
Proporzioni fra grandezze	1
Teorema di Talete	1
Similitudini tra triangoli	0
Il pianeta Terra	7
Misura indiretta dell'altezza di un oggetto	7
Esperienza di Eratostene	6
Esperienza di Talete	4



Le motivazioni a tali preferenze sono state le seguenti:

Circonferenza e cerchio.

"Perché comunque era facilmente comprensibile e chiaro come argomento."

Il pianeta Terra

"Perché non era totalmente un argomento geometrico ma comprendeva anche un po' di astronomia."

"Quando abbiamo cominciato a parlare del pianeta Terra mi sono interessata di più poiché lo vedevo come argomento diverso dalle solite formule di geometria."

"Perché è un argomento attualissimo che ci coinvolge nella vita di tutti i giorni e che mescola insieme scienze, geografia e geometria."

"Perché a me personalmente non piace la geometria e trovo questo argomento più interessante e utile rispetto agli altri proposti."

"Era molto interessante e come argomento mi piaceva molto."

Misura indiretta dell'altezza di un oggetto

"Perché l'esempio pratico ha stimolato molto di più."

"Perché comunque si tratta di conoscenza sfruttabile anche nella vita quotidiana."

"Perché è stato bello applicare la pratica dopo aver imparato la teoria."

Esperienza di Eratostene

"Penso che una materia debba avere anche un fine pratico: con Eratostene ne abbiamo la conferma."

"Perché è interessante vedere come già in antichità si potessero fare misura-

zioni di grandi distanze quasi perfette."
Esperienza di Talete
"Mi ha maggiormente interessato perché è stata un'esperienza nuova, un metodo differente di svolgere una lezione di geometria, dato che la professoressa ci ha letto in classe spezzoni di un libro 'Il Teorema del pappagallo', a cui poi abbiamo applicato un teorema geometrico."
" Perché è interessante scoprire come un uomo che ha vissuto in un'epoca così distante dalla nostra sia riuscito ad arrivare ad una soluzione così perspicacemente."
Il pianeta Terra e l'Esperienza di Eratostene
"Mi sono piaciute di più perché come lezioni erano più interessanti e perché è stato un argomento più divertente confronto alle rette, alla circonferenza, al cerchio etc."
Teorema di Talete, Misura indiretta dell'altezza di un oggetto e Esperienza di Eratostene
" Mi hanno interessato molto questi due personaggi, in particolare Eratostene che è riuscito a misurare oggetti enormi, non direttamente ma grazie alle ombre."
Misura indiretta dell'altezza di un oggetto e Esperienza di Eratostene
"Perché ho capito più dal vero che la geometria può essere usata anche in problemi reali; utilizzare la geometria in pratica mi ha dato un nuovo punto di vista verso la geometria."
Il pianeta Terra e la Misura indiretta dell'altezza di un oggetto.
"Mi hanno interessato maggiormente questi argomenti perché sono quelli più utili e applicabili alla realtà. Gli altri argomenti sono stati un po' più difficili da capire e da applicare alla vita quotidiana."
L'Esperienza di Eratostene e l'Esperienza di Talete
"Perché sono molto interessanti e per alcuni divertenti da studiare e capire."
Misura indiretta dell'altezza di un oggetto e Esperienza di Talete
"Perché sono stati due argomenti interessanti data l'utilità pratica. In questo modo si è potuto applicare concetti teorici a funzioni concrete, trovando quindi uno scopo per quello che si è studiato."

5.2.2 Commenti liberi e suggerimenti

"È stata un'esperienza utile e divertente soprattutto per l'organizzazione; sarebbe stato forse più semplice se ci fossimo soffermati maggiormente sull'acquisizione dei concetti geometrici di base, che non avevamo minimamente, ma nonostante questo non ci sono stati particolari problemi."
"Questa esperienza di geometria è stata molto interessante e utile per chiarire alcune cose."
"È stata un'esperienza carina, ma difficile. Seguire le lezioni di argomenti fondamentalmente complicati è stato faticoso, ma vedere che certi argomenti

potevano essere utili ci ha spronato a stare più attenti."
"C'erano nozioni che conoscevo già da tempo e che mi sono sembrate parecchio ripetitive. Ad esprimere problemi di geometria forse dovrebbe essere più chiara."
"L'idea di mettere in atto (misurare ombre degli oggetti) i teoremi della geometria a mio parere può aiutare molto l'apprendimento."
"Sinceramente non amo molto né la matematica né la geometria ma comunque qualche esperienza e conoscenze in più non fanno mai male. Le lezioni sono state piacevoli soprattutto grazie alla disponibilità dell'insegnante e per la sua pazienza!"
"Posso ritenere la nostra classe fortunata dato che siamo stati gli unici a partecipare a questo progetto."
"Esperienza positiva e interessante su una materia non facile come la geometria affrontata appunto in un modo semplice e comprensivo."
"A mio parere le lezioni erano troppo frontali e difficili da seguire."
"La tirocinante è stata molto brava perché sapeva spiegare bene. L'unico suggerimento che dico è che ci vorrebbero di più esperienze pratiche".
"L'esperienza è stata senza dubbio interessante, a me la geometria piace (anche se ho bisogno che mi venga spiegata con calma e passo passo, o mi perdo). Di fatto il tempo era poco e la confusione molta. La colpa non è di nessuno in quanto, secondo me, per una materia simile (soprattutto se è la prima volta che si prende in considerazione) servirebbe più tempo."
"Fare più lezioni più spesso così divertenti e interessanti che si possono applicare alla vita quotidiana."

Riflessione sui commenti

Dai commenti liberi è evidente che l'esperienza di rendete "pratica" la matematica è piaciuta più o meno a tutta la classe. Alcuni ragazzi, inoltre, hanno captato la possibilità di inserire nei programmi di matematica della classe un lavoro simile a questo e che esso potrebbe "aiutare molto l'apprendimento".
La sperimentazione è sicuramente stato un lavoro gradito dalla classe che, nonostante le difficoltà dovute alle poche conoscenze geometriche di base, è riuscita a portare a termine, con consapevolezza, le varie "misure indirette" proposte.

Capitolo 6

Approfondimenti teorici: il moto retrogrado dei pianeti

In quest'ultimo capitolo del mio lavoro di tesi studieremo un fenomeno del sistema solare: il **moto retrogrado**.
A differenza del resto del lavoro questo capitolo non è sperimentale, ma è stato progettato come un approfondimento teorico di matematica applicata all'astronomia che può essere usato come schema di lavoro per una sperimentazione in una classe quinta (o quarta) di liceo scientifico o classico. Gli argomenti trattati sono, infatti, abbastanza accessibili e hanno il pregio di rendere tangibile l'applicabilità della matematica.
In particolar modo una classe di quinta di un liceo ha i mezzi necessari per affrontare questo lavoro in maniera abbastanza completa.
I prerequisiti necessari sono i seguenti:

- leggi di Keplero;
- elementi di trigonometria;
- studio di una funzione e della sua derivata;
- moto circolare uniforme;
- basi di astronomia relative al Sistema Solare.

Anche in una classe quarta si potrebbe tentare una sperimentazione di questo tipo "aggirando l'ostacolo" dello studio di una funzione e della sua derivata. Si potrebbe, infatti, sostituire un'analisi quantitativa della situazione con una qualitativa, con l'aiuto di software quali Matlab (nel mio caso ho usato Octave, la versione gratuita di Matlab).
Per capire a fondo il moto retrogrado dobbiamo introdurre alcuni elementi di astronomia che ci aiuteranno nello studio di questo fenomeno. I primi paragrafi di quest'ultimo capitolo serviranno, quindi, per porre le basi per il nostro modello.

Successivamente andremo a descrivere il modello e i risultati numerici dello stesso.

6.1 Sistemi di coordinate

Come la posizione di un punto sulla sfera terrestre è identificata dalle sue coordinate, la latitudine geografica e la longitudine geografica, così la posizione di un qualsiasi oggetto astronomico può essere indicata da una coppia di numeri. Tali numeri generalmente dicono quanto un punto sia "lontano su di un cerchio" o quanto sia in "alto" in maniera analoga alla latitudine e alla longitudine geografica.
I **sistemi di riferimento**, o **sistemi di coordinate**, utilizzati sono molteplici:

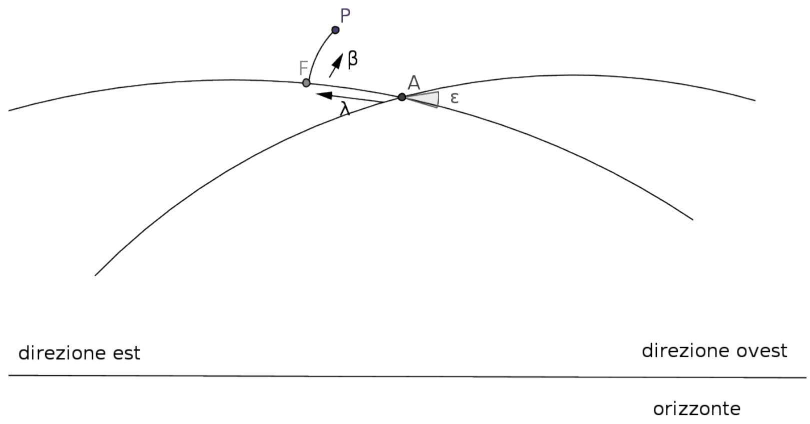
- il sistema altoazimutale, dove le coordinate di un oggetto in cielo, azimut e altezza, sono riferite al piano dell'orizzonte dell'osservatore;
- il sistema equatoriale, dove le coordinate sono riferite al piano dell'equatore terrestre;
- il sistema eclittico, dove le coordinate sono riferite al piano dell'**eclittica**, quello, cioè, contenente l'orbita della Terra;
- il sistema galattico, usato per descrivere relazioni tra stelle e altri oggetti celesti dentro la nostra Galassia, il cui piano fondamentale è il piano della Galassia.

Per lo studio del moto retrogrado è opportuno lavorare in coordinate eclittiche; nel seguente sottoparagrafo è, quindi, spiegato più in dettaglio tale sistema.

6.1.1 Coordinate eclittiche

Come già detto questo sistema di coordinate utilizza come piano di riferimento il **piano dell'eclittica**, quello cioè contenente l'orbita del pianeta Terra. Una stella, o un pianeta, in tale sistema avranno due coordinate: la **latitudine eclittica** (che indicheremo con β) e la **longitudine eclittica** (che indicheremo con λ). In seguito è riportata la costruzione per trovarle.
I tracciati immaginari dell'intersezione dei piani dell'equatore e dell'eclittica con la volta celeste sono disegnati in cielo (due circonferenze) e il loro punto di intersezione è l'equinozio di primavera. I due piani sono inclinati tra loro di un angolo che misura $23°26'$ chiamato obliquità dell'eclittica e indicato da ϵ.
Ora, dato un pianeta che indicheremo con la lettera P, consideriamo la traccia della circonferenza massima immaginaria che dal polo dell'eclittica (il punto dove la retta tracciata per il Sole perpendicolarmente all'eclittica

interseca la sfera celeste) scende attraverso P. Chiamiamo F il punto in cui essa taglia l'eclittica. La **longitudine eclittica** λ del pianeta P sarà l'angolo sotteso dai punti F e A, che sta per (Ariete) e rappresenta l'equinozio di primavera. La **latitudine eclittica** β è, invece, l'angolo sotteso dai punti F e P. Il tutto è rappresentato dalla seguente figura che ha come punto di osservazione la Terra.



Convenzionalmente β sarà positiva se il pianeta passa sopra l'eclittica, negativa altrimenti. λ, invece, cresce quando ci si muove verso est lungo l'eclittica.
Il Sole ha la particolarità di avere sempre β nulla in quanto si muove verso est lungo il tracciato dell'eclittica. Anche λ sarà nulla nel giorno dell'equinozio di primavera, cioè il 21 Marzo.

6.2 Struttura del sistema solare

Il nostro sistema planetario può essere suddiviso in **pianeti inferiori alla fascia degli asteroidi** e **pianeti superiori** ad essa. I primi sono Mercurio, Venere, Terra e Marte, mentre i secondi sono Giove, Saturno , Urano e Nettuno. Plutone, l'ultima scoperta del sistema solare, non viene classificato, in quanto ha caratteristiche proprie particolari.
I due gruppi sono caratterizzati da caratteristiche fisiche diverse: i pianeti inferiori sono relativamente piccoli, con piccole velocità di rotazione e hanno superfici solide (come pietre e metalli), mentre quelli superiori sono relativamente grandi, con grandi velocità di rotazione e una struttura interna fatta

di gas. La fascia di separazione tra le due classi è la **fascia delle asteroidi**, o dei pianetini, chiamata così perché composta da molteplici corpi di piccole dimensioni.
Le distanze dei pianeti dal Sole hanno delle regolarità che sono espresse dalla seguente legge:

Lemma 6.2.1 (Legge di Titius e di Bode)**.** *La distanza media r di un pianeta dal Sole in UA è data dalla seguente formula:*

$$r = 0,4 + 0,3 * 2^n \tag{6.1}$$

in cui con UA *si intende unità astronomica, un'unità di misura spesso usata in astronomia che corrisponde alla distanza media della Terra dal Sole pari a* $149,6 * 10^6$ *km, e in cui il valore di n è* $-\infty$ *per Mercurio,* 0 *per Venere,* 1 *per la Terra,* 2 *per Marte,* 3 *in media per i pianetini,* 4 *per Giove etc.*

Le distanze così calcolate sono in accordo con quelle effettive tranne che per Nettuno e Plutone; nel modello quindi non ci occuperemo del moto retrogrado di quest'ultimi.

6.2.1 Le configurazioni planetarie

I pianeti del sistema solare possono essere classificati anche rispetto alla Terra e al Sole; chiameremo quindi **pianeti interni** quelli che si muovono all'interno dell'orbita della Terra (Mercurio e Venere) e **pianeti esterni** quelli che si muovono all'esterno di essa (Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno e Plutone).
Per i pianeti interni si possono verificare le seguenti "posizioni reciproche":

- *congiunzione superiore* rispetto al Sole, quando il pianeta sta al di là del Sole rispetto alla Terra e non è osservabile;
- *congiunzione inferiore* quando il pianeta si trova tra il Sole e la Terra e non può, nella maggior parte dei casi, essere osservato;
- *massima elongazione orientale/occidentale* rispetto al Sole, quando il pianeta si trova alla massima distanza angolare dal Sole verso est/ovest ed è visibile a ovest/est la sera/mattina.

Per i pianeti esterni, invece, avremo:

- *congiunzione* quando Terra e pianeta in questione sono da parti opposte rispetto al Sole. Il pianeta è invisibile;
- *opposizione* rispetto al Sole quando il pianeta è posto in direzione opposta a quella del Sole. Il pianeta è visibile durante tutta la notte;
- *quadratura* quando il pianeta ha una longitudine eclittica di 90°.

La latitudine eclittica può essere di qualche grado a causa dell'inclinazione dell'orbita del pianeta rispetto al piano dell'eclittica. Per questo i pianeti interni raramente attraversano il disco solare.
La seguente definizione sarà molto importante per il modello sul moto retrogrado:

Definizione 6.2.2. Si dice **periodo sinodico** di un pianeta l'intervallo di tempo tra due successive uguali posizioni di esso rispetto alla Terra.

6.3 Leggi di Keplero

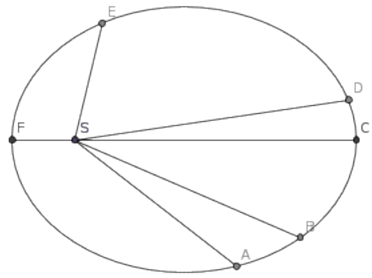
Le leggi di Keplero sono riportate in due opere del matematico e teologo tedesco Kepler: le prime due nel trattato *Astronomia Nova* del 1609, la terza nell'opera *Harmonices* del 1619. Cominciamo con enunciarle; subito dopo daremo una spiegazione più approfondita delle stesse.

Legge 6.3.1 (Prima legge di Keplero)**.** *I pianeti si muovono su orbite ellittiche, uno dei fuochi delle quali è occupato dal Sole.*

Legge 6.3.2 (Seconda legge di Keplero)**.** *La linea che unisce il Sole con il pianeta, detta **raggio vettore**, copre aree uguali in tempi uguali.*

Legge 6.3.3 (Terza legge di Keplero)**.** *I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi della loro distanza media dal Sole.*

Il significato della 6.3.1 è evidente: viene data una descrizione geometrica delle orbite.
La 6.3.2 dice che la velocità di un pianeta all'afelio (punto dell'orbita di massima distanza dal Sole) è minima, e al perielio (punto dell'orbita di minima distanza dal Sole) è massima; inoltre la velocità sull'orbita è tale che l'area coperta dal raggio vettore in un tempo fissato rimane costante qualunque parte dell'orbita si consideri. Tale proprietà è illustrata dalla figura seguente.



Se il pianeta impiega a muoversi da A a B, da C a D e da E a F tempi uguali, allora i settori ABS,CDS e EFS, dove con S è indicata la posizione del Sole, hanno la stessa area.
La 6.3.3 si può esprimere con la formula seguente, dove a_1 e a_2 sono i semiassi maggiori delle orbite di due pianeti 1 e 2, e P_1 e P_2 sono i periodi di rivoluzione degli stessi:

$$a_1^3 : a_2^3 = P_1^2 : P_2^2 \tag{6.2}$$

Nella seguente tabella sono rappresentati i dati relativi alle caratteristiche dei pianeti visibili all'epoca di Keplero (che peraltro saranno gli unici sui quali faremo il nostro studio): essi sono in completo accordo con le leggi 6.3.1, 6.3.2 e 6.3.3.

6.3.1 Il tempo e la Terra

Un calendario ci aiuta a seguire il tempo dividendo l'**anno civile** in mesi, settimane e giorni. Approssimativamente, un mese è il tempo necessario affinché la Luna compia un giro attorno alla Terra e un anno è il tempo necessario affinché la Terra compia un'orbita attorno al Sole. Convenzionalmente una settimana è composta da 7 giorni, un mese ha tra i 28 e i 31 giorni e ogni anno ha 12 mesi.
L'**anno tropico**, il tempo reale impiegato dalla Terra per percorrere un'orbita attorno al Sole, è però di 365,2422 giorni. Se non tenessimo conto di questo fatto e mantenessimo immutati 365 giorni per anno, la Terra perderebbe il passo con il nostro sistema al ritmo di 0,2422 giorni per anno. Dopo 100 anni avremmo una discrepanza di 24 giorni e dopo 750 anni le stagioni sarebbero invertite. Nell'antichità ci sono stati numerosi tentativi di creare un calendario che permettesse di risolvere tale problema.
Giulio Cesare adottò la convenzione che ogni tre anni consecutivi di 365

giorni ce ne fosse uno (bisestile) di 366 (**calendario giuliano**). La durata media di un anno, secondo tale calendario, è di 365,25 giorni, una buona approssimazione dell'anno tropico.
Nel 1582, però, si ebbe una notevole discrepanza tra le stagioni e le date; il merito della soluzione a tale problema spetta a Papa Gregorio che in quell'anno abolì i giorni dal 5 al 14 Ottobre, così da rimettere in pari anni civili e anni tropici e creò un nuovo calendario, il **calendario gregoriano**, utilizzato ancora oggi. Esso è molto simile al calendario giuliano, ma perde tre giorni ogni quattro secoli nel seguente modo: nel calendario gregoriano gli anni il cui numero termina con 2 zeri (1700, 1800) sono bisestili solo se sono divisibili per 400. In questo modo 400 anni civili contengono $(400 * 365) + 100 - 3 = 146097$ giorni; la durata quindi dell'anno medio è $\frac{146097}{400} = 365,2425$ approssimazione dell'anno tropico più precisa della precedente.
Nel mio modello avrò bisogno di calcolare le posizioni dei vari astri in una data precisa, il giorno della discussione della mia tesi: il 20 Dicembre 2011. In [15] l'autore prende come data di riferimento dalla quale calcolarle le ore zero dello 0 Gennaio 1980, dove con esso si intende la mezzanotte tra il 30 e il 31 Dicembre del 1979; questo semplifica molto i calcoli, infatti se vogliamo contare il numero di giorni passati a mezzogiorno del 3 Gennaio 1980 dalla data di riferimento, essi saranno 3,5, in accordo con la cifra indicante la data.
Quello che dovrò sapere è il numero di giorni che separano il 20 Dicembre 2011 dallo 0 Gennaio 1980. Con gli accorgimenti illustrati nella prima parte del sottoparagrafo siamo in grado di farlo ed i risultati sono:

$$\text{numero di giorni tra lo 0 Gennaio 1980 e lo 0 Gennaio 2011} = 11323$$

Mentre

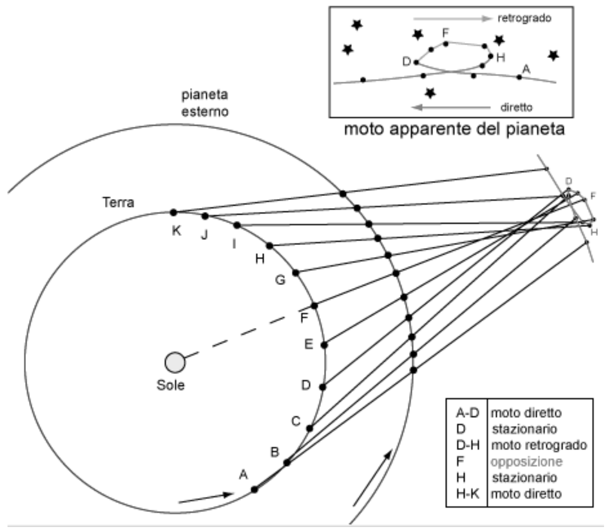
$$\text{numero di giorni tra lo 0 Gennaio 2011 e il 20 Dicembre 2011} = 354$$

In totale dalla nostra epoca di riferimento saranno passati $11323 + 354 = 11677$ giorni.

6.4 Il moto retrogrado

Un'osservazione continua della posizione di un pianeta esterno in cielo porterebbe a notare che ad un certo punto il pianeta stesso sembra indietreggiare. Questo fenomeno ha il nome di **moto retrogrado**. Il temporaneo moto retrogrado di un pianeta avviene sempre quando la Terra supera un pianeta esterno più lento nelle epoche attorno a quelle dell'opposizione (vedi 6.2.1) e quando essa è superata da un pianeta interno più veloce nelle epoche attorno a quelle della congiunzione inferiore; i pianeti interni, però, nella maggior

parte dei casi non sono osservabili dalla Terra in tale configurazione planetaria, quindi il loro moto retrogrado generalmente non è visibile.
Se le orbite di tutti i pianeti fossero complanari, il moto retrogrado sarebbe un va e vieni sullo stesso cerchio massimo; in realtà nella traiettoria apparente dei pianeti sono presenti dei cappi, dovuti alle differenti inclinazioni dei piani delle orbite.
La situazione è spiegata dalla seguente figura:



6.4.1 Il nostro modello del moto retrogrado

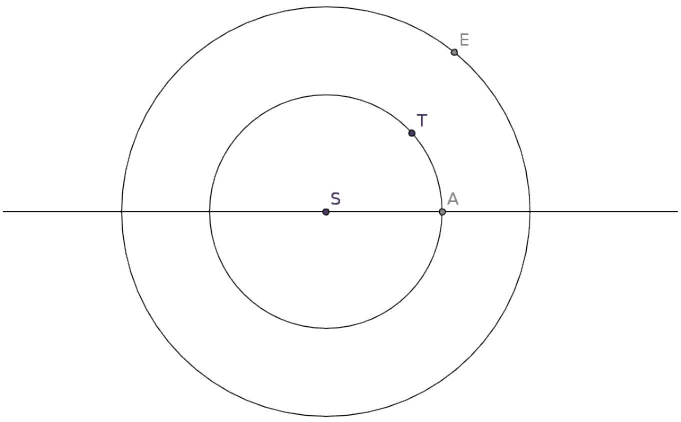
Lo scopo di questo modello è quello di dare una descrizione quantitativa del moto retrogrado dei pianeti esterni ed interni; di capire, cioè, ogni quanto avviene e per quanto tempo ogni pianeta è “retrogrado”.
Per i pianeti esterni il moto retrogrado è visibile, per quelli interni, invece, è visibile solo da “extraterrestri venuti sulla Terra che hanno la caratteristica di riuscire a vedere le stelle in cielo anche di giorno”. La ragione di questo sarà più chiara in seguito.
Faremo una descrizione della situazione per Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno e Urano.
Le ipotesi del modello sono le seguenti:

- tutti i pianeti del Sistema Solare hanno orbite circolari;
- tutte le orbite giacciono sul piano dell’eclittica;
- i pianeti si muovono di moto circolare uniforme.

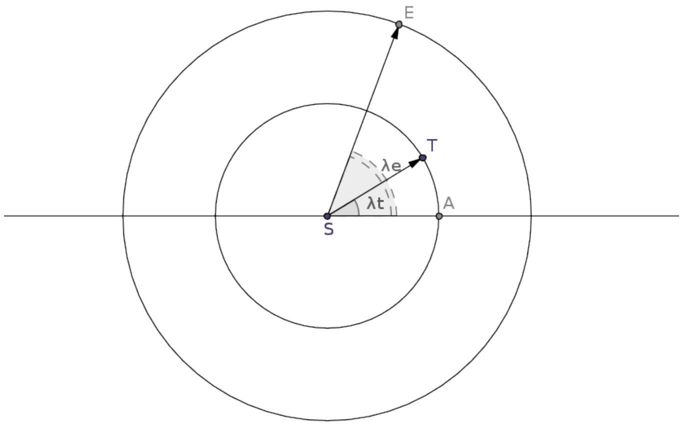
A livello scolastico con queste ipotesi possiamo arrivare ad uno studio relativamente semplice che dà risultati abbastanza vicini a quelli reali.

Caso 1: pianeta esterno

Nel caso di un pianeta esterno la situazione è la seguente: il Sole è posto in S, la Terra, indicata da T, effettuerà un'orbita circolare attorno ad esso e il pianeta esterno, che chiameremo E, si muoverà su una circonferenza concentrica con la prima. Con A si indica il giorno dell'equinozio di primavera.



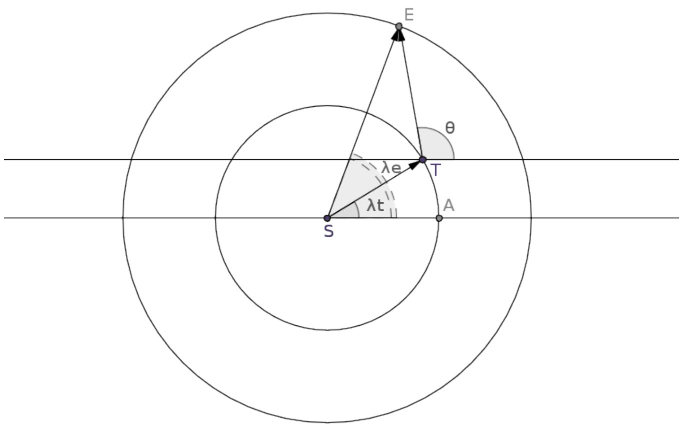
Secondo le definizioni date in 6.1.1 la latitudine e la longitudine eclittica danno una descrizione della posizione del pianeta in coordinate eclittiche. Per tutti i nostri pianeti la latitudine eclittica è nulla in quanto abbiamo fatto l'ipotesi che ogni orbita giace sul piano dell'eclittica.
Quindi quello che identifica la posizione di un pianeta ad un certo momento è solo la sua longitudine.
Il nostro compito sarà quello di individuare l'angolo che dà una descrizione del moto del pianeta esterno visto dalla Terra; per trovarlo ci serviamo dei vettori posizione di T e E, indicati rispettivamente con $\overrightarrow{ST}$ e $\overrightarrow{SE}$.



Avremo che:

$$\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} R_T cos(\lambda_T) \\ R_T sin(\lambda_T) \end{pmatrix} \; e \; \overrightarrow{SE} = \begin{pmatrix} R_E cos(\lambda_E) \\ R_E sin(\lambda_E) \end{pmatrix}$$

dove R_T e R_E sono le misure dei raggi delle due circonferenze.
Il vettore che dà le informazioni sulla posizione di E rispetto a T è $\overrightarrow{TE}$.



TE è la differenza dei due vettori posizione di T ed E, quindi:

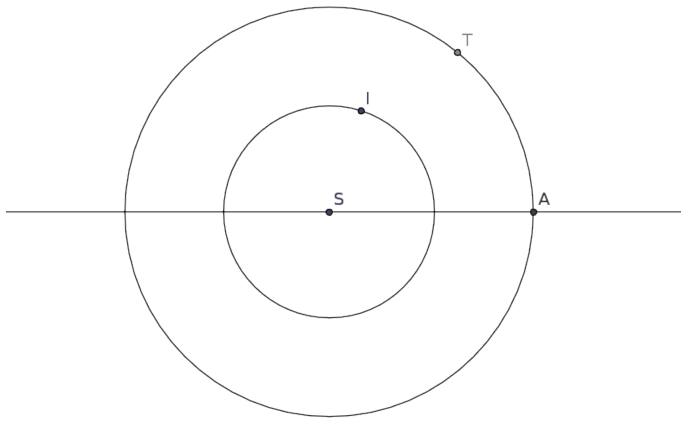
$$\overrightarrow{TE} = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} R_E cos(\lambda_E) - R_T cos(\lambda_T) \\ R_E sin(\lambda_E) - R_T sin(\lambda_T) \end{pmatrix}$$

L'angolo che descrive il moto apparente del pianeta E è indicato in figura da θ e la sua espressione è ricavabile da $\overrightarrow{TE}$. Naturalmente tutti gli angoli in questione cambiano al variare del tempo. Indicando le longitudini eclittiche di T e E in funzione del tempo con $\lambda_T(t)$ e $\lambda_E(t)$ avremo

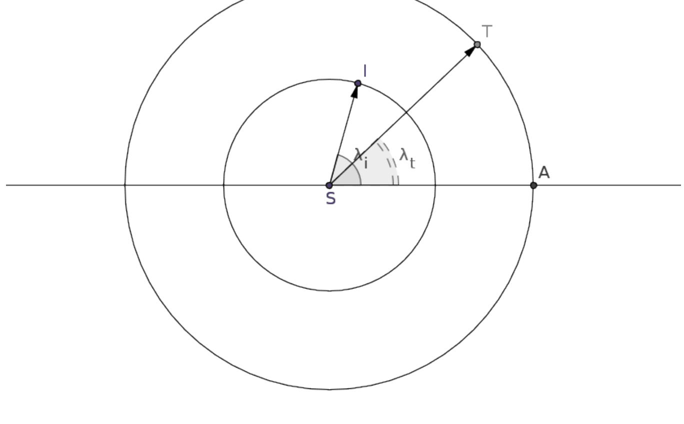
$$\theta(t) = arctg\Big(\frac{R_E sin(\lambda_E(t)) - R_T sin(\lambda_T(t))}{R_E cos(\lambda_E(t)) - R_T cos(\lambda_T(t))}\Big) \tag{6.3}$$

Caso 2: pianeta interno

Nel caso in cui vogliamo studiare il moto apparente del pianeta interno dobbiamo analizzare la situazione illustrata dalla figura seguente.



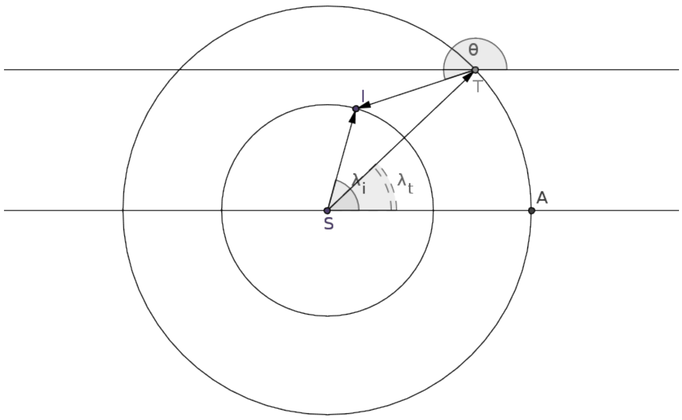
T è la Terra, I il pianeta interno e A ancora la posizione della Terra il giorno dell'equinozio di primavera.



I vettori posizione dei due pianeti rappresentati nella figura precedente, che chiameremo $\overrightarrow{SI}$ e $\overrightarrow{SE}$, hanno le espressioni

$$\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} R_T cos(\lambda_T) \\ R_T sin(\lambda_T) \end{pmatrix} \; e \; \overrightarrow{SI} = \begin{pmatrix} R_I cos(\lambda_I) \\ R_I sin(\lambda_I) \end{pmatrix}$$

dove con R_I e R_E si indicano i raggi delle due orbite.
Il vettore che dà la posizione di I vista da T è il vettore $\overrightarrow{TI}$ e l'angolo che dà le informazioni sul moto retrogrado è indicato da θ



dove:

$$\overrightarrow{TI} = \overrightarrow{SI} - \overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} R_I cos(\lambda_I) - R_T cos(\lambda_T) \\ R_I sin(\lambda_I) - R_T sin(\lambda_T) \end{pmatrix}$$

A questo punto l'espressione di θ è la seguente.

$$\theta(t) = arctg\Big(\frac{R_I sin(\lambda_I(t)) - R_T sin(\lambda_T(t))}{R_I cos(\lambda_I(t)) - R_T cos(\lambda_T(t))}\Big) \tag{6.4}$$

Anche questa volta con $\lambda_I(t)$ e $\lambda_T(t)$ indichiamo le longitudini eclittiche dei due pianeti in funzione del tempo.
Osserviamo che (6.4) e (6.3) hanno la stessa espressione. Lo studio del moto retrogrado per pianeti interni ed esterni sarà quasi lo stesso.

6.4.2 Espressione degli angoli ad un generico tempo t

Se siamo nel caso illustrato da 6.4.1, per avere l'espressione analitica di θ in funzione del tempo occorre conoscere λ_T e λ_E (o λ_I) in funzione del tempo. Grazie alle ipotesi del nostro modello possiamo scrivere che:

$$\lambda_T(t) = \omega_T t + \lambda_{T0} \tag{6.5}$$

dove λ_{T0} è la longitudine eclittica di T al tempo $t = 0$ e ω_T è la velocità angolare di T. Analogamente:

$$\lambda_E(t) = \omega_E t + \lambda_{E0} \tag{6.6}$$

dove λ_{E0} è la longitudine eclittica di E al tempo $t = 0$ e ω_E è la velocità angolare di E.
Sostituendo le espressioni trovate a 6.3 otteniamo

$$\theta(t) = arctg\Big(\frac{R_E sin(\omega_E t + \lambda_{E0}) - R_T sin(\omega_T t + \lambda_{T0})}{R_E cos(\omega_E t + \lambda_{E0}) - R_T cos(\omega_T t + \lambda_{T0})}\Big) \tag{6.7}$$

Le espressioni per I pianeta interno saranno equivalenti.
Quando avviene il moto retrogrado di E? Quando c'è un cambiamento nell'andamento della derivata di $\theta(t)$. Infatti abbiamo un moto retrogrado apparente quando il pianeta E visto dalla Terra sembra fermarsi e indietreggiare. In corrispondenza di uno zero della derivata di θ il moto retrogrado avrà inizio o fine.
In maniera del tutto analoga un osservatore posto su un pianeta interno I prima o poi vedrà la "Terra retrograda". Simmetricamente, se un essere umano nello stesso momento potesse osservare I, lo vedrebbe muoversi di moto retrogrado.
Avremo, quindi, che quando la derivata di $\theta(t)$ avrà segno negativo il moto del pianeta sarà retrogrado, in caso di segno positivo il moto avverrà in maniera diretta.
Per semplicità di scrittura useremo le seguenti notazioni:

- $\lambda_T = \lambda_T(t)$;
- $\lambda_E = \lambda_E(t)$;
- $\dot{\lambda_T} = \frac{d\lambda_T}{dt}$;
- $\dot{\lambda_E} = \frac{d\lambda_E}{dt}$;

6.4.3 Studio della derivata

Procediamo quindi con lo studio della derivata di (6.3). I due casi (pianeta interno e pianeta esterno) sono molto simili salvo che per lo studio del segno. Differenzieremo quindi i pianeti interni da quelli esterni, omettendo per i primi (se possibile) i calcoli equivalenti a quelli dei secondi.

Caso 1: pianeti esterni

Applicando le formule della derivata dell'arcotangente e delle funzioni composte si arriva alla seguente espressione:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{1 + \Big(\frac{R_E sin(\lambda_E) - R_T sin(\lambda_T)}{R_E cos(\lambda_E) - R_T cos(\lambda_T)}\Big)^2} \frac{d}{dt}\Big(\frac{R_E sin\lambda_E - R_T sin\lambda_T}{R_E cos\lambda_E - R_T cos\lambda_T}\Big) \tag{6.8}$$

Svolgendo i calcoli del primo addendo e applicando la formula per la derivata di una funzione fratta, possiamo arrivare all'espressione seguente:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{(R_E cos(\lambda_E) - R_T cos(\lambda_T))^2}{(R_E cos(\lambda_E) - R_T cos(\lambda_T))^2 + (R_E sin(\lambda_E) - R_T sin(\lambda_T))^2}$$
$$*\Bigg(\frac{(R_E cos(\lambda_E)\dot{\lambda_E} - R_T cos(\lambda_T)\dot{\lambda_T})(R_E cos(\lambda_E) - R_T cos(\lambda_T))}{(R_E cos(\lambda_E) - R_T cos(\lambda_T))^2}$$
$$-\frac{(-R_E sin(\lambda_E)\dot{\lambda_E} + R_T sin(\lambda_T)\dot{\lambda_T})(R_E sin(\lambda_E) - R_T sin(\lambda_T))}{(R_E cos(\lambda_E) - R_T cos(\lambda_T))^2}\Bigg)$$

Imponendo $R_E cos(\lambda_E) - R_T cos(\lambda_T) \neq 0$, possiamo semplificare l'espressione precedente che, dopo aver svolto i calcoli, assume la seguente forma:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{{R_E}^2 cos^2(\lambda_E)\dot{\lambda_E} - R_E R_T cos(\lambda_T) cos(\lambda_E)\dot{\lambda_E}}{(R_E cos(\lambda_E) - R_T cos(\lambda_T))^2 + (R_E sin(\lambda_E) - R_T sin(\lambda_T))^2}$$
$$+\frac{-R_E R_T cos(\lambda_T) cos(\lambda_E)\dot{\lambda_T} + R_T^2 cos^2(\lambda_t)\dot{\lambda_T} + {R_E}^2 sin^2(\lambda_E)\dot{\lambda_E}}{(R_E cos(\lambda_E) - R_T cos(\lambda_T))^2 + (R_E sin(\lambda_E) - R_T sin(\lambda_T))^2}$$
$$+\frac{-R_E R_T sin(\lambda_T) sin(\lambda_E)\dot{\lambda_E} - R_E R_T sin(\lambda_T) sin(\lambda_E)\dot{\lambda_T} + R_T^2 sin^2(\lambda_t)\dot{\lambda_T}}{(R_E cos(\lambda_E) - R_T cos(\lambda_T))^2 + (R_E sin(\lambda_E) - R_T sin(\lambda_T))^2}$$

A questo punto ricordandoci che $\forall x \in \mathbb{R}$ vale $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, raccogliendo parzialmente e svolgendo i calcoli al denominatore con le stesse accortezze, otteniamo la seguente espressione:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{R_E^2\dot{\lambda_E} + R_T^2\dot{\lambda_T} - R_E R_T(\dot{\lambda_E} + \dot{\lambda_T})(cos(\lambda_T)cos(\lambda_E) + sin(\lambda_T)sin(\lambda_E))}{R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T(cos(\lambda_T)cos(\lambda_E) + sin(\lambda_T)sin(\lambda_E))} \tag{6.9}$$

Applicando le formule di sottrazione, in particolare che $cos(\lambda_T)cos(\lambda_E) + sin(\lambda_T)sin(\lambda_E) = cos(\lambda_T - \lambda_E)$ avremo l'espressione definitiva della derivata:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{R_E^2\dot{\lambda_E} + R_T^2\dot{\lambda_T} - R_E R_T(\dot{\lambda_E} + \dot{\lambda_T})(cos(\lambda_T - \lambda_E))}{R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T(cos(\lambda_T - \lambda_E))} \tag{6.10}$$

Ora $\dot{\lambda_E}$ e $\dot{\lambda_T}$ possiamo ricavarceli derivando rispettivamente le espressioni (6.5) e (6.6). Quindi:

$$\dot{\lambda_E} = \frac{d\lambda_E}{dt} = \omega_E \tag{6.11}$$

$$\dot{\lambda_T} = \frac{d\lambda_T}{dt} = \omega_T \tag{6.12}$$

Sostituendo quindi alla (6.10) le espressioni (6.5), (6.6), (6.11), (6.12) otteniamo:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T - R_E R_T(\omega_E + \omega_T)cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0})}{R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0})} \tag{6.13}$$

Abbiamo cioè dimostrato la seguente proposizione.

Proposizione 6.4.1. *La funzione* $\frac{d\theta(t)}{dt}$ *è periodica di* $\frac{2\pi}{|\omega_T - \omega_E|}$. *Se* E *è un pianeta esterno, per (6.3.3) vale che* $\omega_T > \omega_E$, *quindi il periodo vale* $\frac{2\pi}{\omega_T - \omega_E}$ *ed è pari al* ***periodo sinodico*** *di* E.

A questo punto dobbiamo porre (6.13) uguale a 0 per trovare gli zeri della funzione ed andare a studiare il moto retrogrado; si tratta di risolvere la seguente equazione:

$$\frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T - R_E R_T(\omega_E + \omega_T)cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0})}{R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0})} = 0 \tag{6.14}$$

Avremo che $R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}) \geq R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T = (R_E - R_T)^2 > 0$ poichè $R_E \neq R_T$ essendo il primo il raggio di un pianeta esterno alla Terra, quindi possiamo porre senza condizioni aggiuntive il numeratore uguale a zero e trovare le soluzioni.
Abbiamo

$$R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T - R_E R_T(\omega_E + \omega_T)cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}) = 0 \tag{6.15}$$

$$R_E R_T(\omega_E + \omega_T)cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}) = R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T \tag{6.16}$$

$$cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}) = \frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T}{R_E R_T(\omega_E + \omega_T)} \tag{6.17}$$

Le soluzioni saranno quindi:

$$t_{sol} = \frac{\pm arccos\left(\frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T}{R_E R_T(\omega_E + \omega_T)}\right) + \lambda_{E0} - \lambda_{T0} + 2k\pi}{\omega_T - \omega_E} \tag{6.18}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.
Ritroviamo che per E, pianeta esterno, la funzione è periodica di $\frac{2\pi}{\omega_T - \omega_E}$.
Abbiamo inoltre la seguente condizione di esistenza:

$$R_E cos(\omega_E t_{sol} + \lambda_{E0}) - R_T cos(\omega_T t_{sol} + \lambda_{T0}) \neq 0 \tag{6.19}$$

Possiamo anche studiare il segno della derivata riprendendo l'espressione (6.13). Il moto retrogrado avverrà quando la derivata è negativa.
Studiamo quindi la sua "negatività".

$$\frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T - R_E R_T(\omega_E + \omega_T)cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0})}{R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0})} \leq 0 \tag{6.20}$$

e risolvendo otteniamo che ciò succede per

$$R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T - R_E R_T(\omega_E + \omega_T)cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}) \leq 0 \tag{6.21}$$

essendo il denominatore sempre strettamente positivo per dimostrazione precedente.

Procedendo nello svolgimento dei calcoli avremo che la derivata è negativa per:

$$cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}) \geq \frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T}{R_E R_T(\omega_E + \omega_T)} \tag{6.22}$$

Cioè per $t_{sol1} \leq t \leq t_{sol2}$ dove:

$$t_{sol1} = \frac{-arccos\Big(\frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T}{R_E R_T(\omega_E+\omega_T)}\Big) - \lambda_{T0} + \lambda_{E0} + 2k\pi}{\omega_T - \omega_E}$$

$$t_{sol2} = \frac{arccos\Big(\frac{R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T}{R_E R_T(\omega_E+\omega_T)}\Big) - \lambda_{T0} + \lambda_{E0} + 2k\pi}{\omega_T - \omega_E}$$

Caso 2: pianeti interni

Nel caso dei pianeti interni, indicando con λ_I la longitudine eclittica di I, avremo che, analogamente ai pianeti esterni, la sua espressione in funzione del tempo è la seguente.

$$\lambda_I(t) = \omega_I t + \lambda_{I0} \tag{6.23}$$

dove λ_{I0} è la longitudine eclittica del pianeta I al tempo 0.
L'espressione dell'angolo $\theta(t)$ è data da:

$$\theta(t) = arctg\Big(\frac{R_I sin(\omega_I t + \lambda_{I0}) - R_T sin(\omega_T t + \lambda_{T0})}{R_I cos(\omega_I t + \lambda_{I0}) - R_T cos(\omega_T t + \lambda_{T0})}\Big) \tag{6.24}$$

Procedendo in maniera analoga al Caso 1 avremo che

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{R_I^2\omega_I + R_T^2\omega_T - R_I R_T(\omega_I + \omega_T)cos((\omega_T - \omega_I)t + \lambda_{T0} - \lambda_{I0})}{R_I^2 + R_T^2 - 2R_I R_T cos((\omega_T - \omega_I)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0})} \tag{6.25}$$

Anche questa volta possiamo enunciare

Proposizione 6.4.2. *La funzione* $\frac{d\theta(t)}{dt}$ *è periodica di* $\frac{2\pi}{|\omega_T - \omega_I|}$*. Se* I *è un pianeta interno, per (6.3.3) vale che* $\omega_I > \omega_T$*, quindi il periodo vale* $\frac{2\pi}{\omega_I - \omega_T}$ *ed è pari al* ***periodo sinodico*** *di* I*.*

Gli zeri di (6.25) avranno la seguenti espressioni

$$t_{sol} = \frac{\pm arccos\Big(\frac{R_I^2\omega_I + R_T^2\omega_T}{R_I R_T(\omega_I+\omega_T)}\Big) - \lambda_{I0} + \lambda_{T0} + 2k\pi}{\omega_I - \omega_T} \tag{6.26}$$

con la condizione

$$R_E cos(\omega_I t_{sol} + \lambda_{I0}) - R_T cos(\omega_T t_{sol} + \lambda_{T0}) \neq 0 \tag{6.27}$$

e $k \in \mathbb{Z}$.
Lo studio della "negatività" della derivata è leggermente diverso dal caso precedente. Come nel caso precedente avremo che la derivata è negativa per

$$cos((\omega_T - \omega_I)t + \lambda_{T0} - \lambda_{I0}) \geq \frac{R_I^2\omega_I + R_T^2\omega_T}{R_I R_T(\omega_I + \omega_T)} \tag{6.28}$$

ma questa volta $\omega_T - \omega_I \leq 0$ quindi 6.28 è negativa per $t_{sol1} \leq t \leq t_{sol2}$ dove

$$t_{sol1} = \frac{-arccos\left(\frac{R_I^2\omega_I + R_T^2\omega_T}{R_I R_T(\omega_I + \omega_T)}\right) + \lambda_{T0} - \lambda_{I0} + 2k\pi}{\omega_I - \omega_T}$$

$$t_{sol2} = \frac{arccos\left(\frac{R_I^2\omega_E + R_T^2\omega_T}{R_I R_T(\omega_I + \omega_T)}\right) + \lambda_{T0} - \lambda_{I0} + 2k\pi}{\omega_I - \omega_T}$$

e $k \in \mathbb{Z}$.

6.4.4 Condizione necessaria per il verificarsi del moto retrogrado

Dopo aver studiato l'andamento dell'angolo θ sia per i pianeti esterni che per quelli interni, ci chiediamo se il moto retrogrado avvenga effettivamente per tutti i pianeti, oppure se ci siano delle condizioni che lo regolano.
Condizione necessaria per il moto retrogrado è l'annullamento della derivata. Nel caso dei pianeti esterni (per i pianeti interni è analogo) questo avviene se l'equazione:

$$R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T - R_E R_T(\omega_E + \omega_T)cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}) = 0 \tag{6.29}$$

ha soluzioni.
A questo punto, per semplicità di scrittura, poniamo:

$$A = R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T \;\; e \;\; B = -R_E R_T(\omega_E + \omega_T)$$

$$\alpha = (\omega_T - \omega_E) \;\; e \;\; \beta = \lambda_{T0} - \lambda_{E0}$$

l'equazione precedente può essere scritta come:

$$A + Bcos(\alpha t + \beta) = 0 \tag{6.30}$$

Quest'ultima ha soluzioni solo se

$$-1 \leq -\frac{A}{B} \leq 1 \tag{6.31}$$

Ma il termine centrale della disuguaglianza per come sono definiti A e B è sempre positivo, quindi condizione necessaria per il moto retrogrado sarà:

$$-\frac{A}{B} \leq 1 \tag{6.32}$$

cioè

$$R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T \leq R_E R_T(\omega_E + \omega_T) \tag{6.33}$$

Per la terza legge di Keplero (6.3.3) possiamo ricavarci uno dei parametri in funzione degli altri tre. Infatti vale che:

$$\frac{R_T^3}{R_E^3} = \frac{P_T^2}{P_E^2} = \frac{\omega_E^2}{\omega_T^2} \tag{6.34}$$

Quindi

$$\omega_E = \frac{\omega_T R_T^{\frac{3}{2}}}{R_E^{\frac{3}{2}}} \tag{6.35}$$

Poniamo a questo punto $a = \sqrt{R_E}$ e $b = \sqrt{R_T}$. Dopo aver sostituito in (6.33) il valore di ω_E, dopo aver semplificato, essa assume la forma:

$$ab^3 + b^4 \leq \frac{b^5}{a} + a^2b^2$$

Raccogliendo da entrambe le parti b^3 e semplificando otteniamo:

$$a + b \leq \left(\frac{a^3 + b^3}{ab}\right)$$

$$ab(a + b) \leq (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

che è sempre verificata.
Abbiamo quindi la seguente proposizione.

Proposizione 6.4.3. *Ogni pianeta del sistema solare si muove periodicamente di moto retrogrado.*

6.4.5 Un'altra espressione della derivata

Per capire meglio l'andamento della derivata possiamo trovare un'altra espressione, meno comoda per trovare le soluzioni, ma più congeniale per capirne l'andamento. Faremo una descrizione per il caso dei pianeti esterni (il caso dei pianeti interni è analogo).
Ancora una volta per semplificare la scrittura poniamo:

$$A = R_E^2\omega_E + R_T^2\omega_T \text{ e } B = -R_E R_T(\omega_E + \omega_T)$$

$$C = R_E^2 + R_T^2 \text{ e } D = -2R_E R_T$$

$$\alpha = (\omega_T - \omega_E) \text{ e } \beta = \lambda_{T0} - \lambda_{E0}$$

Quindi (6.13) può essere scritta nel seguente modo:

$$\frac{A + Bcos(\alpha t + \beta)}{C + Dcos(\alpha t + \beta)}$$

Possiamo semplificare il tutto aggiungendo e sottraendo la quantità $\frac{CB}{D}$ al numeratore. Avremo che:

$$\frac{Bcos(\alpha t + \beta) + \frac{CB}{D}}{C + Dcos(\alpha t + \beta)} + \frac{A - \frac{CB}{D}}{C + Dcos(\alpha t + \beta)}$$

$$\frac{B}{D} + \frac{AD - CB}{D(C + Dcos(\alpha t + \beta))} \tag{6.36}$$

dove abbiamo potuto semplificare senza aggiungere condizioni perché $C + Dcos(\alpha t + \beta) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.
La derivata sarà la somma di una costante più una funzione periodica di $\frac{2\pi}{|\alpha|}$.
Risostituendo i valori di $A, B, C, D, \alpha, \beta$ e semplificando ove possibile, avremo la seguente espressione per $\frac{d\theta(t)}{dt}$:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{\omega_T + \omega_E}{2} + \frac{R_E^2(2\omega_E - 1) + R_T^2(2\omega_T - 1)}{2(R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}))} \tag{6.37}$$

Integrando (6.37) otterremo la seguente espressione per $\theta(t)$

$$\theta(t) = \frac{(\omega_T + \omega_E)t}{2} + \int \frac{R_E^2(2\omega_E - 1) + R_T^2(2\omega_T - 1)}{2(R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}))} dt + C \tag{6.38}$$

Possiamo svolgere la parte da integrare di 6.38 nel seguente modo.
Per $a^2 > b^2$ vale

$$\int \frac{dx}{a + bcos(x)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} arctg\Big(\frac{(a - b)tan(\frac{x}{2})}{\sqrt{a^2 - b^2}}\Big) \tag{6.39}$$

L'integrale da risolvere è trasformabile in un integrale di questo tipo. Infatti portando le costanti fuori dal segno di integrale posso scrivere che

$$\int \frac{R_E^2(2\omega_E - 1) + R_T^2(2\omega_T - 1)}{2(R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}))} dt =$$

$$\frac{R_E^2(2\omega_E - 1) + R_T^2(2\omega_T - 1)}{2} \int \frac{dt}{R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos((\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0})}$$

Dopo il cambio di variabili $x = (\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}$ l'espressione precedente diventa:

$$\frac{R_E^2(2\omega_E - 1) + R_T^2(2\omega_T - 1)}{2(\omega_T - \omega_E)} \int \frac{dx}{R_E^2 + R_T^2 - 2R_E R_T cos(x)}$$

Possiamo quindi applicare 6.39 con $a = R_E^2 + R_T^2$ e $b = -2R_E R_T$ e svolgendo i calcoli otteniamo:

$$\frac{R_E^2(2\omega_E - 1) + R_T^2(2\omega_T - 1)}{(\omega_T - \omega_E)(R_E^2 - R_T^2)} arctg\left(\frac{(R_E + R_T)^2}{R_E^2 - R_T^2} tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{6.40}$$

Risostituendo il valore di x abbiamo la seguente espressione finale:

$$\frac{R_E^2(2\omega_E - 1) + R_T^2(2\omega_T - 1)}{(\omega_T - \omega_E)(R_E^2 - R_T^2)} arctg\left(\frac{(R_E + R_T)^2}{R_E^2 - R_T^2} tan\left(\frac{(\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}}{2}\right)\right) \tag{6.41}$$

Abbiamo quindi l'espressione di $\theta(t)$ esplicitata.

$$\theta(t) = \frac{(\omega_T + \omega_E)t}{2} + C + \frac{R_E^2(2\omega_E - 1) + R_T^2(2\omega_T - 1)}{(\omega_T - \omega_E)(R_E^2 - R_T^2)} arctg\left(\frac{(R_E + R_T)^2}{R_E^2 - R_T^2} tan\left(\frac{(\omega_T - \omega_E)t + \lambda_{T0} - \lambda_{E0}}{2}\right)\right) \tag{6.42}$$

Possiamo quindi enunciare la seguente proposizione.

Proposizione 6.4.4. *La funzione $\theta(t)$ è somma di una funzione lineare e di una periodica di periodo $\frac{2\pi}{\omega_T - \omega_E}$ (periodo sinodico).*

Questo fatto sarà confermato dai grafici della funzione $\theta(t)$ per i vari pianeti.

6.4.6 Intervallo tra due moti retrogradi

Supponiamo di essere un extraterrestre che può vedere il cielo stellato (quindi anche i vari pianeti del sistema solare) anche di giorno. Possiamo chiederci se tra un moto retrogrado e l'altro un pianeta, interno o esterno che sia, effettui più di un giro nella volta celeste.
La scrittura trovata in 6.4.5 ci aiuta in questo studio. Cominciamo con l'osservare la validità della seguente proposizione.

Proposizione 6.4.5. *$\theta(t)$ aumenta ogni periodo sinodico di un fattore pari alla media delle due velocità angolare $\frac{\omega_T + \omega_E}{2}$.*

Sappiamo che tra due successivi moti retrogradi intercorre un periodo sinodico; possiamo quindi valutare quando l'angolo è variato di più di un angolo giro.

Caso 1: Pianeti esterni

Per quanto riguarda i pianeti esterni dobbiamo verificare quando la seguente disuguaglianza è verificata:

$$\frac{\omega_T + \omega_E}{2} \frac{2\pi}{\omega_T - \omega_E} > 2\pi \tag{6.43}$$

Semplificando otteniamo la disequazione

$$\frac{(\omega_T + \omega_E)}{\omega_T - \omega_E} > 2$$

cioè

$$\omega_T + \omega_E > 2\omega_T - 2\omega_E$$

Avremo quindi che il pianeta esterno percorre più di un giro nella volta celeste quando

$$3\omega_E > \omega_T \tag{6.44}$$

Vedremo che questa disuguaglianza è verificata solo per Marte.

Caso 2: pianeti interni

Il caso dei pianeti interni è molto simile al precedente, con la differenza che il periodo sinodico ha al denominatore la differenza delle velocità angolari in ordine inverso. Abbiamo quindi che la disuguaglianza da verificare sarà:

$$\frac{\omega_T + \omega_I}{2} \frac{2\pi}{\omega_I - \omega_T} > 2\pi \tag{6.45}$$

In questo caso un pianeta interno percorrerà più di un'orbita apparente quando:

$$3\omega_T > \omega_I \tag{6.46}$$

Vedremo che la precedente disuguaglianza è verificata per Venere, ma non per Mercurio.
Riassiumiamo i risultati raggiunti in questo paragrafo:

Proposizione 6.4.6. *Condizione sufficiente e necessaria affinché un pianeta compia più di un giro rispetto alle stelle fisse è che valgano le seguenti disuguaglianze:*

- $3\omega_E > \omega_T$ *per* E*, pianeta esterno alla Terra;*
- $3\omega_T > \omega_I$ *per* I*, pianeta interno alla Terra.*

6.4.7 Studio della derivata seconda

Con la nuova espressione della derivata è più semplice calcolare la relativa derivata seconda e studiarne l'andamento. Per quanto riguarda gli zeri della stessa i risultati sono gli stessi per pianeti interni o esterni.
Lo studio del segno sarà invece differenziato anche se nei due casi si ha lo stesso risultato.

$$\frac{d(6.36)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{AD - BC}{D(C + Dcos(\alpha t + \beta))}\right) =$$

$$= \frac{-(AD-BC)(-D^2\alpha sin(\alpha t+\beta))}{D^2(C+Dcos(\alpha t+\beta))^2} = \frac{\alpha(AD-BC)sin(\alpha t+\beta)}{(C+Dcos(\alpha t+\beta))^2}$$

Il denominatore è sempre non nullo, possiamo quindi aggiungere senza ulteriori condizioni che la derivata si annulla quando:

$$sin(\alpha t+\beta) = 0$$

Caso 1: pianeti esterni

Sostituendo l'espressione di α e β per i pianeti esterni abbiamo:

$$sin((\omega_T-\omega_E)t+\lambda_{T0}-\lambda_{E0}) = 0 \tag{6.47}$$

Questo succede quando:

$$(\omega_T-\omega_E)t+\lambda_{T0}-\lambda_{E0} = k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.
Per capire meglio la situazione conviene scrivere tale espressione in funzione dei due angoli di partenza λ_T e λ_E.

$$\lambda_T-\lambda_E = k\pi \tag{6.48}$$

Cioè

$$\lambda_T = \lambda_E + k\pi \tag{6.49}$$

La derivata seconda si annulla, quindi, quando i due angoli λ_T e λ_E coincidono o si differenziano di π.
Quando cioè siamo nella posizione reciproca di *congiunzione* o *opposizione*.
Il grafico di $\theta(t)$ presenterà dei flessi quando i pianeti sono allineati con il Sole.

Caso 2: pianeti interni

Il caso del pianeta esterno è analogo al precedente abbiamo quindi che la derivata seconda di $\theta(t)$ si annulla quando

$$\lambda_T-\lambda_I = k\pi \tag{6.50}$$

Quando cioè

$$\lambda_T = \lambda_I + k\pi \tag{6.51}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.
Ciò si verifica nei periodi di *congiunzione inferiore o superiore* del pianeta interno in questione.

6.4.8 Segno della derivata seconda

Procediamo con lo studio della derivata seconda. Studiamone la positività:

$$\frac{\alpha(AD-BC)sin(\alpha t+\beta)}{(C+Dcos(\alpha t+\beta))^2}\geq 0 \tag{6.52}$$

Dobbiamo studiare le seguenti disuguaglianze:

$$\alpha\geq 0$$

$$AD-BC\geq 0$$

$$sin(\alpha t+\beta)\geq 0$$

Separiamo anche questa volta i casi pianeta interno e pianeta esterno:

Caso 1: pianeti esterni

Nel caso del pianeta esterno le tre disequazioni si trasformano in:

$$\omega_T-\omega_E\geq 0 \tag{6.53}$$

$$sin(\lambda_T-\lambda_E)\geq 0 \tag{6.54}$$

$$(R_E^2\omega_E+R_T^2\omega_T)(-2R_ER_T)+R_ER_T(\omega_E+\omega_T)(R_E^2+R_T^2)\geq 0 \tag{6.55}$$

La (6.53) è sempre verificata.
Invece, (6.54) è vera per $2k\pi\leq\lambda_T-\lambda_E\leq(2k+1)\pi$.
Sostituendo i valori di λ_T e λ_E otteniamo che ciò equivale a $\frac{\lambda_{E0}-\lambda_{T0}+2k\pi}{\omega_T-\omega_E}\leq t\leq\frac{\lambda_{E0}-\lambda_{T0}+(2k+1)\pi}{\omega_T-\omega_E}$ e $k\in\mathbb{Z}$.
La disequazione (6.55) risulta sempre verificata. Infatti svolgendo i calcoli otteniamo che dobbiamo verificare che:

$$\omega_ER_ER_T^3+\omega_TR_E^3R_T-\omega_ER_E^3R_T-\omega_TR_ER_T^3\geq 0$$

Dopo un raccoglimento totale e uno parziale la disequazione diventa:

$$R_ER_T(R_E^2-R_T^2)(\omega_T-\omega_E)\geq 0$$

Per le condizioni che abbiamo sui parametri ($R_E\geq R_T$ e $\omega_T\geq\omega_E$) (6.55) risulta sempre verificata.
Quindi avremo la positività della derivata seconda per

$$\frac{\lambda_{E0}-\lambda_{T0}+2k\pi}{\omega_T-\omega_E}\leq t\leq\frac{\lambda_{E0}-\lambda_{T0}+(2k+1)\pi}{\omega_T-\omega_E}$$

o nella forma sintetica per $2k\pi\leq\lambda_T-\lambda_E\leq(2k+1)\pi$. Questo ci dice che quando $\lambda_T=\lambda_E+2k\pi$, quando siamo cioè nel momento dell'*opposizione* dei pianeti, avremo il minimo della derivata prima (un *flesso discendente*

nella funzione), quindi il moto retrogrado si verifica in un'epoca attorno al momento dell'opposizione. Il momento dell'opposizione è proprio a metà dell'intervallo del moto retrogrado.
Quando invece $\lambda_T = \lambda_E + (2k+1)\pi$, siamo nell'epoca della *congiunzione* e abbiamo un massimo della derivata prima (quindi un *flesso ascendente* della funzione); attorno a quest'epoca il moto è diretto.

Caso 2: pianeti interni

Nel caso dei pianeti interni le tre disequazioni si trasformano in:

$$\omega_T - \omega_I \geq 0 \tag{6.56}$$

$$sin(\lambda_T - \lambda_I) \geq 0 \tag{6.57}$$

$$(R_I^2\omega_I + R_T^2\omega_T)(-2R_IR_T) + R_IR_T(\omega_I + \omega_T)(R_I^2 + R_T^2) \geq 0 \tag{6.58}$$

In questo caso (6.56) non è mai verificata ($\omega_I > \omega_T$).
Anche in questo caso (6.57) è verificata per $2k\pi \leq \lambda_T - \lambda_I \leq (2k+1)\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$. Sostituendo i rispettivi valori a λ_T e a λ_I otteniamo che questo vale per:

$$2k\pi \leq (\omega_T - \omega_I)t + \lambda_{T0} - \lambda_{I0} \leq (2k+1)\pi$$

$$\lambda_{I0} - \lambda_{T0} + 2k\pi \leq (\omega_T - \omega_I)t \leq \lambda_{I0} - \lambda_{T0} + (2k+1)\pi$$

$$\frac{\lambda_{I0} - \lambda_{T0} + (2k+1)\pi}{\omega_T - \omega_I} \leq t \leq \frac{\lambda_{I0} - \lambda_{T0} + 2k\pi}{\omega_T - \omega_I}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.
Svolgendo i calcoli come abbiamo fatto per (6.55) possiamo scrivere (6.58) nel seguente modo:

$$R_IR_T(R_I^2 - R_T^2)(\omega_T - \omega_I) \geq 0$$

Il primo termine del prodotto è positivo, gli altri due sono negativi quindi la disuguaglianza è sempre verificata.
La derivata seconda risulterà quindi positiva nei seguenti intervalli:

$$\frac{\lambda_{I0} - \lambda_{T0} + 2k\pi}{\omega_T - \omega_I} \leq t \leq \frac{\lambda_{I0} - \lambda_{T0} + (2k-1)\pi}{\omega_T - \omega_I} \tag{6.59}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.
Avremo quindi massimi per la derivata prima (flessi ascendenti per la funzione $\theta(t)$) per

$$t = \frac{\lambda_{I0} - \lambda_{T0} + (2k+1)\pi}{\omega_T - \omega_I} \quad e\ k \in \mathbb{Z}$$

e minimi per la derivata prima (flessi discendenti per la funzione $\theta(t)$) per

$$t = \frac{\lambda_{I0} - \lambda_{T0} + 2k\pi}{\omega_T - \omega_I} \quad e\ k \in \mathbb{Z}$$

I *flessi ascendenti* corrispondono ai momenti di *congiunzione superiore*, mentre i *flessi discendenti* corrispondono ai momenti di *congiunzione inferiore*. Avremo quindi che il moto retrogrado avverrà nelle epoche attorno la congiunzione inferiore, cioè quando il pianeta interno si trova tra il Sole e la Terra e il tempo t all'epoca della congiunzione inferiore è proprio il valore medio tra gli istanti di inizio e fine del moto retrogrado.
I risultati ottenuti in questo paragrafo possono essere riassunti dalla seguente proposizione.

Proposizione 6.4.7. *1. Per ogni pianeta esterno l'intervallo di durata del moto retrogrado ha per centro l'**opposizione** e durata pari a*

$$\frac{2arccos\left(\frac{R_E^2\omega_E+R_T^2\omega_T}{R_ER_T(\omega_E+\omega_T)}\right)}{\omega_T-\omega_E}$$

*2. Per ogni pianeta interno l'intervallo di durata del moto retrogrado ha per centro la **congiunzione inferiore** e durata pari a*

$$\frac{2arccos\left(\frac{R_I^2\omega_I+R_T^2\omega_T}{R_IR_T(\omega_I+\omega_T)}\right)}{\omega_I-\omega_T}$$

6.4.9 Parametri

Per studiare quantitativamente la nostra derivata abbiamo bisogno di conoscere i vari parametri che sono presenti in essa. Ve ne sono sei (in seguito elenchiamo i parametri con la notazione per un pianeta esterno; per un pianeta interno è analogo):

- R_E, il raggio dell'orbita circolare del pianeta E;
- R_T, il raggio dell'orbita circolare della Terra T;
- ω_E, la velocità angolare del pianeta E;
- ω_T, la velocità angolare della Terra T;
- λ_{E0}, l'angolo indicante la posizione iniziale di E, cioè la longitudine eclittica di E al tempo 0;
- λ_{T0}, l'angolo indicante la posizione iniziale di T, cioè la longitudine eclittica di T al tempo 0.

Dobbiamo quindi dare un valore alle costanti relative alla Terra e a quelle relative al pianeta E in questione.
Per quanto riguarda i raggi R_E e R_T, in accordo con la letteratura, li facciamo coincidere con il semiasse maggiore dell'orbita ellittica di E e T, corrispondente alla distanza media del pianeta dal Sole.

ω_E e ω_T coincideranno con le velocità angolari medie. Esse possono essere ricavate dai periodi di E e di T, quindi $\omega_E = \frac{2\pi}{P_E}$ e $\omega_T = \frac{2\pi}{P_T}$. Da notare che con 6.2.1 possiamo ricavarci il semiasse maggiore di entrambi i pianeti e con esse grazie a 6.3.3 possiamo calcolarci P_E, essendo P_T noto. Da sottolineare che l'unità temporale per noi sarà il giorno.
Quello che ci rimane da fare è trovare l'angolo indicante la posizione iniziale dei due pianeti al tempo 0.
Come già detto, il tempo 0 è la data della discussione della mia tesi, il 20 Dicembre 2011.

Ora λ_{E0} si calcolerà, in gradi, nel seguente modo:

$$\lambda_{E0} = \frac{360}{365,2422} * \frac{D}{P_E} + \epsilon_E \ gradi \tag{6.60}$$

Dove nel primo addendo della somma si calcola l'angolo in gradi che il pianeta ha percorso dal tempo di riferimento (lo 0 Gennaio 1980 vedi 6.3.1) e il secondo è la longitudine eclittica del pianeta E lo 0 Gennaio 1980, che ci viene fornita dalle tabelle in [15]. D sarà il numero di giorni che è intercorso tra lo 0 Gennaio 1980 e il 20 Dicembre 2011 (già calcolato in 6.3.1) e P_E è il periodo del pianeta E in anni tropici.
Per quanto riguarda la longitudine eclittica della Terra la formula è molto simile alla precedente ed è:

$$\lambda_{T0} = \frac{360}{365,2422} * \frac{D}{P_T} + \epsilon_T \ gradi \tag{6.61}$$

dove $P_T = 1,00004$ è il periodo della Terra in anni tropici e ϵ_T è la longitudine eclittica di T lo 0 Gennaio 1980.

6.4.10 Risultati del nostro modello

A questo punto svolgiamo i calcoli e troviamo gli zeri di $\frac{d\theta(t)}{dt}$ per i pianeti esterni e interni.
Per i calcoli possiamo usare Octave 3.4.0, la versione libera di Matlab.
Per prima cosa calcoliamo i parametri con il procedimento enunciato in 6.4.9. Riportiamo, inoltre, gli angoli delle posizioni iniziali in radianti. I valori sono riportati nella seguente tabella.

PIANETA	*Periodo in anni tropici*	*Velocità angolare*	*Semiasse maggiore dell'orbita in UA*	*Longitudine eclittica lo 0 Gennaio 1980 in gradi*	*Longitudine eclittica il 20 Dicembre 2011 in gradi*	*Longitudine eclittica il 20 Dicembre 2011 in gradi [0,360]*	*Longitudine eclittica il 20 Dicembre 2011 in rad*
MERCURIO	0,24085	0,071425332	0,3870986	231,2973	48017,90264	137,9026432	2,406855172
VENERE	0,61521	0,027962470	0,7233316	355,73352	19063,82327	343,8232730	6,000848158
TERRA	1,00004	0,017202103	1	98,83354	11607,77708	87,77707918	1,531999039
MARTE	1,88089	0,009146091	1,5236883	126,30783	6245,434359	125,4343589	2,189242558
GIOVE	11,86224	0,001450214	5,202561	146,966365	1117,221890	37,22188984	0,649644531
SATURNO	29,45771	0,000583983	9,554747	165,322242	556,0316317	196,0316317	3,421397412
URANO	84,01247	0,000204765	19,21814	228,070855	365,0672306	5,067230620	0,088439858

Ricordiamo per UA (unità astronomica) si intende la lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita terrestre.
Dalla tabella si osserva che i pianeti per i quali si verificano le condizioni del paragrafo 6.4.6 e che, quindi, effettuano più di un giro nella volta celeste tra un moto retrogrado e l'altro sono Venere, tra i pianeti interni, e Marte, tra quelli esterni.

Caso 1: pianeti esterni

Abbiamo così tutte le variabili di entrata della funzione di Matlab/Octave data dal seguente comando:

```
function [sol1, sol2, opposizione, congiunzione, durata,
sinodico]=retro1(ue,pe,le)
rt=149.6*(10^6);
re=rt*ue;
wt=(2*pi)/(365.2422*1.00004);
we=(2*pi)/(365.2422*pe);
lt=1.531999039;
sol1=(-acos(((re^2)*we +(rt^2)*wt)/(re*rt*(we+wt)))+le-lt)/(wt-we);
sol2=(acos(((re^2)*we +(rt^2)*wt)/(re*rt*(we+wt)))+le-lt)/(wt-we);
opposizione=(le-lt)/(wt-we);
congiunzione=(le-lt+pi)/(wt-we);
durata=sol2-sol1;
sinodico=(2*pi)/(wt-we);
endfunction
```

Le variabili di INPUT sono:

- ue, il semiasse maggiore del pianeta esterno in UA;
- pe, il periodo del pianeta esterno in anni tropici;
- le, la longitudine eclittica del pianeta esterno il 20 Dicembre 2011.

In uscita avremo i valori delle soluzioni (quando comincia e quando finisce il moto retrogrado), il giorno dell'opposizione, il giorno della congiunzione, la durata del moto retrogrado e il periodo sinodico del pianeta in questione. I risultati ottenuti per i differenti pianeti sono riportati nella tabella seguente (ho riportato solo le soluzioni vicine o prossime al 20 Dicembre 2011). Tutti i valori sono approssimati all'intero più vicino visto che la nostra unità di misura temporale è il giorno. Per ogni soluzione, inoltre, va verificato che essa rispetti la condizione di esistenza.

Pianeta	*Sinodico in giorni*	*Inizio moto retrogrado*	*Fine moto retrogrado*	*Giorno congiunzione*	*Giorno opposizione*	*Durata moto retrogrado*
Marte	780 giorni	45 giorni	118 giorni	472 giorni	82 giorni	73 giorni
Giove	399 giorni	-116 giorni	4 giorni	143 giorni	-56 giorni	120 giorni
Saturno	378 giorni	45 giorni	182 giorni	303 giorni	114 giorni	137 giorni
Urano	370 giorni	209 giorni	361 giorni	521 giorni	285 giorni	152 giorni

Come previsto si nota che il momento dell'opposizione sta esattamente alla metà del moto retrogrado.

Caso 2: pianeti interni

Il procedimento per studiare quantitativamente il moto retrogrado per i pianeti interni è analogo al precedente.
Dobbiamo notare che il moto retrogrado per i pianeti interni avviene, come dimostrato, nelle epoche attorno alla congiunzione inferiore. Il pianeta in quell'epoca è, però, invisibile (tranne casi molto particolari in cui Mercurio e Venere tagliano il disco solare). Il moto retrogrado dei pianeti interni potrà essere visto solo da un extraterrestre o da un macchinario capace di vedere stelle e pianeti anche durante il giorno.
La funzione di Matlab utilizzata è la seguente, dove i parametri in entrata sono analoghi a quello del caso 1.

```
function [sol1, sol2, congiunzioneinf, congiunzionesup, durata,
sinodico]=retro1(ui,pin,li)
rt=149.6*(10^6);
ri=rt*ui;
wt=(2*pi)/(365.2422*1.00004);
wi=(2*pi)/(365.2422*pin);
lt=1.531999039;
sol1=(acos(((ri^2)*wi +(rt^2)*wt)/(ri*rt*(wi+wt)))-lt+li)/
(wt-wi);
sol2=(-acos(((ri^2)*wi +(rt^2)*wt)/(ri*rt*(wi+wt)))-lt+li)/
(wt-wi);
congiunzioneinf=(li-lt)/(wt-wi);
congiunzionesup=(li-lt-pi)/(wt-wi);
durata=sol2-sol1;
sinodico=(2*pi)/(wi-wt);
endfunction
```

Anche questa volta in uscita avremo quando inizia il moto retrogrado rispetto al 20 Dicembre, quando finisce, il momento di congiunzione inferiore del pianeta, quello di congiunzione superiore, la durata della retrogradazione e il periodo sinodico.
I risultati sono riportati nella seguente tabella:

Pianeta	*Sinodico in giorni*	*Inizio moto retrogrado*	*Fine moto retrogrado*	*Giorno congiunzione inferiore*	*Giorno congiunzione superiore*	*Durata moto retrogrado*
Mercurio	116 giorni	88 giorni	111 giorni	100 giorni	42 giorni	23 giorni
Venere	584 giorni	148 giorni	190 giorni	169 giorni	461 giorni	42 giorni

Anche in questo caso si nota che il momento di congiunzione inferiore "casca" proprio a metà del moto retrogrado.

6.4.11 Studio qualitativo della traiettoria eclittica del pianeta.

Se volessimo fare il grafico di $\theta(t)$ sia per i pianeti esterni, che per quelli interni, il procedimento sarebbe il seguente. Dobbiamo creare un file function di questo tipo con le stesse variabili di input del precedente, più l'incognita x:

```
function valore=valore(x,ue,pe,le)
```

```
rt=149.6*(10^6);
re=rt*ue;
wt=(2*pi)./(365.2422*1.00004);
we=(2*pi)./(365.2422*pe);
lt=1.531999039;
valore=atan((re.*sin(we.*x+le)-rt.*sin(wt.*x+lt))./
(re.*cos(we.*x+le)-rt.*cos(wt.*x+lt)));
endfunction
```

Per il disegno del grafico utilizziamo, invece, il seguente programma:

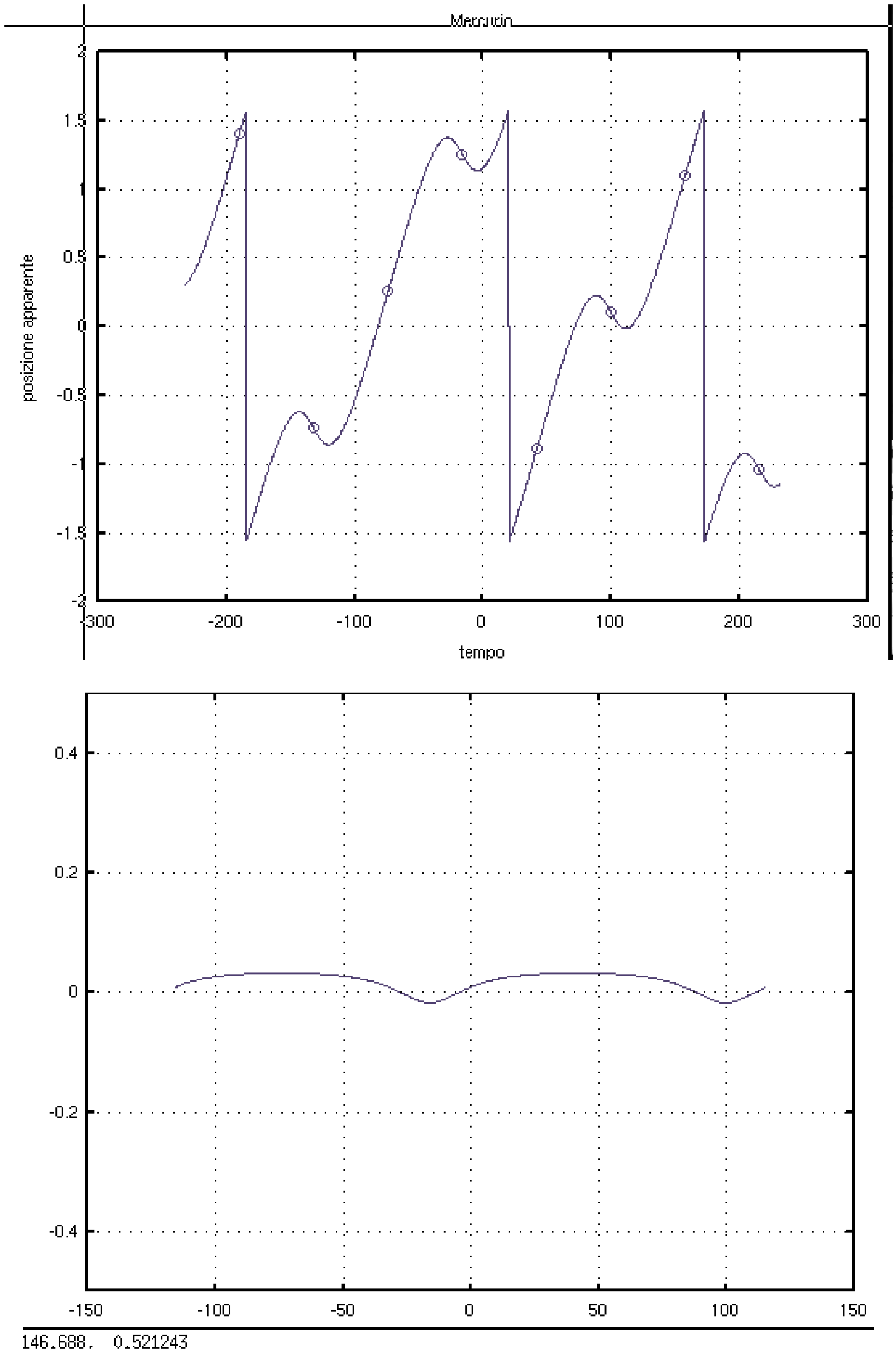
```
function grafico=grafico(ue,pe,le)
D=[];
[sol1,sol2,opposizione, congiunzione, durata,
sinodico]=retro1(ue,pe,le);
X=[-2*sinodico:0.5:2*sinodico];
N=length(X);
for i=1:N
abbs=valore(X(i),ue,pe,le);
D(i)=abbs;
end
plot(X,D)
endfunction
```

Quest'ultimo mi disegnerà la funzione cercata nell'intervallo $[-2sinodico, 2sinodico]$ (ma possiamo naturalmente anche scegliere altri intervalli). Quando la funzione decresce siamo nella fase del moto retrogrado. I massimi e i minimi sono quindi rispettivamente i punti di inizio e fine del moto retrogrado, mentre i punti di flesso, in accordo con quanto dimostrato, corrispondono alle epoche di opposizione (flesso discendente) e congiunzione (flesso ascendente) nel caso dei pianeti esterni e alle epoche di congiunzione inferiore (flesso discendente) e congiunzione superiore (flesso ascendente) nel caso dei pianeti interni.
Rappresentiamo in seguito i vari grafici per ogni pianeta (interno e esterno).

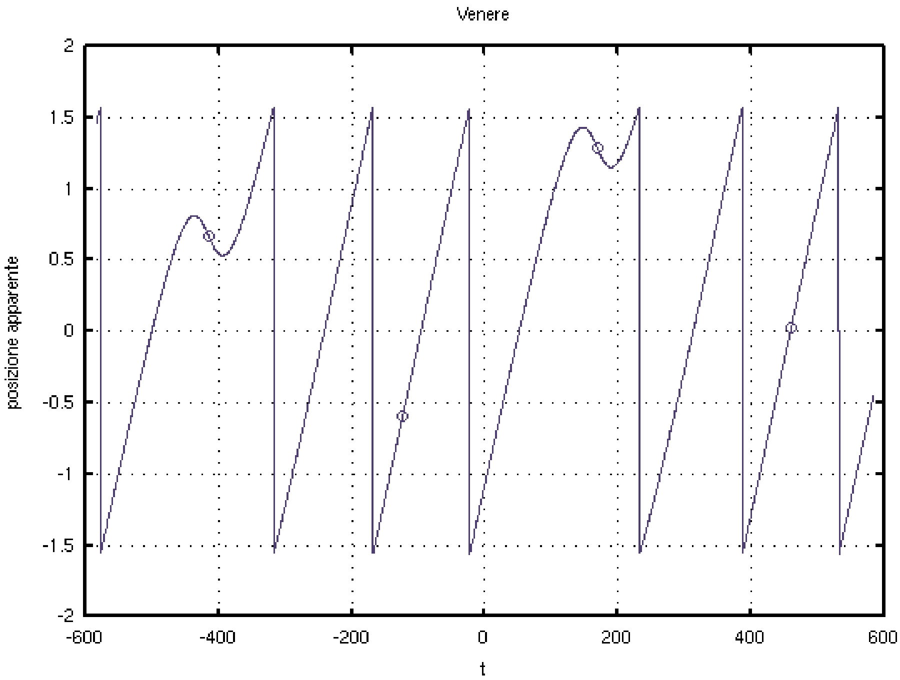
Considerazioni sui grafici successivi
L'espressione che abbiamo trovato di $\theta(t)$ è un arcotangente, il codominio avrà valori in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Il codominio reale dell'angolo sarà $[-\infty, +\infty]$. Le discontinuità presenti nei grafici della posizione apparente dei vari pianeti non sono discontinuità reali, ma legate alla "natura" della funzione arcotangente.

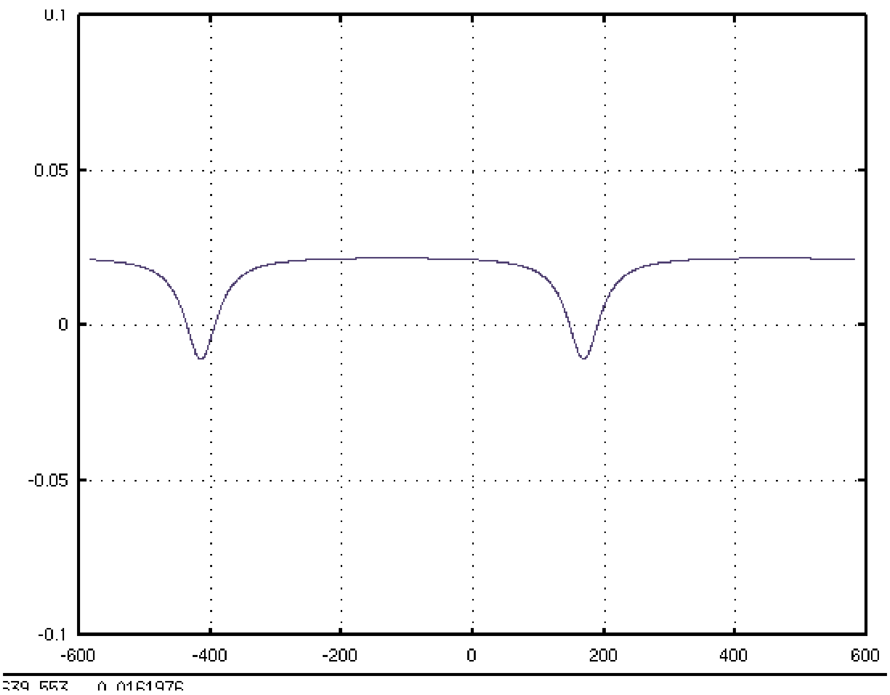
Analogamente con un'apposita funzione possiamo rappresentare anche il grafico di $\frac{d\theta(t)}{dt}$. Nei prossimi sotto paragrafi rappresentiamo i grafici dell'angolo per ogni pianeta, seguito dal grafico della sua derivata.

Mercurio, $3\omega_T < \omega_I$

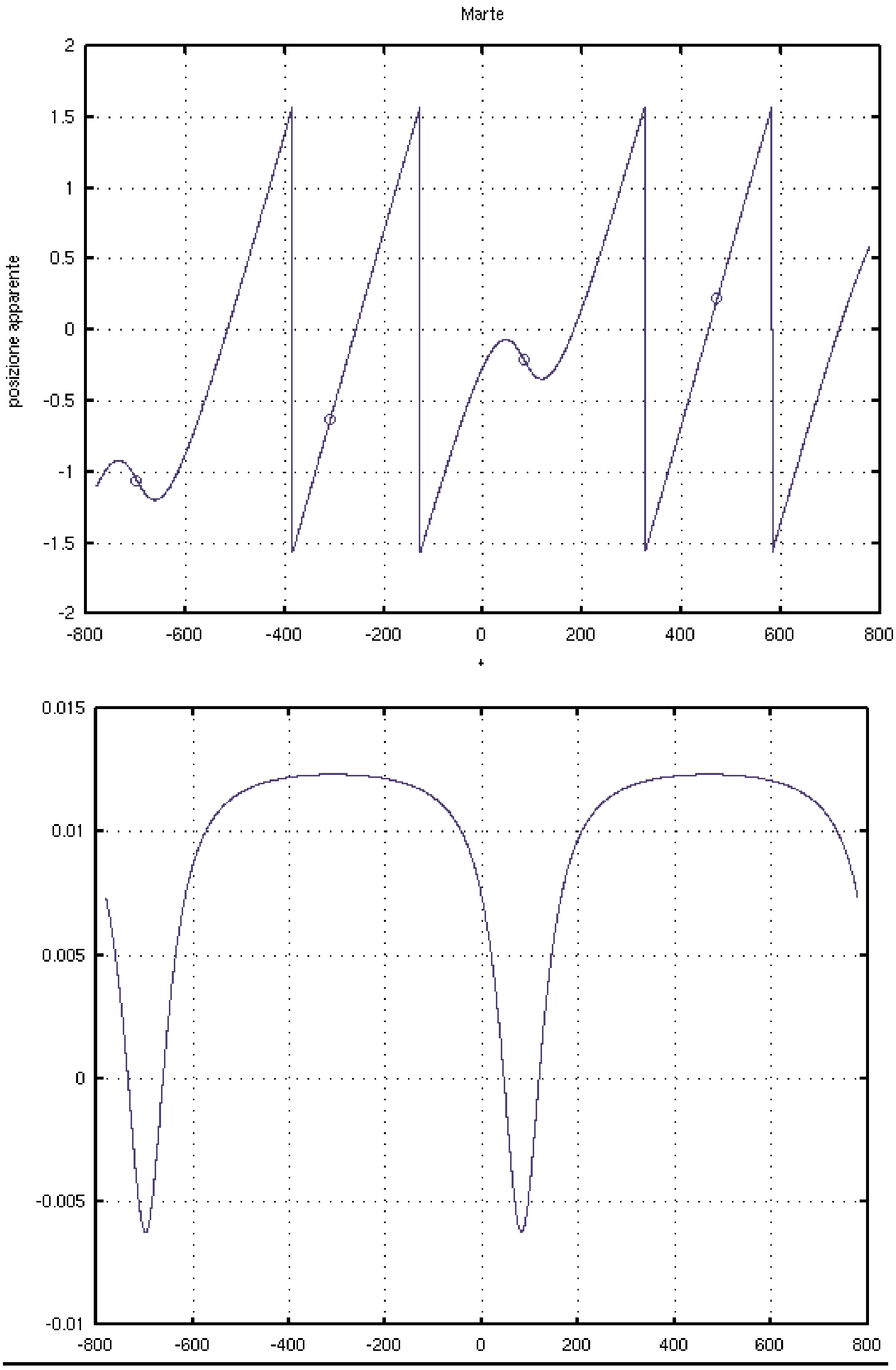


Venere, $3\omega_T > \omega_I$



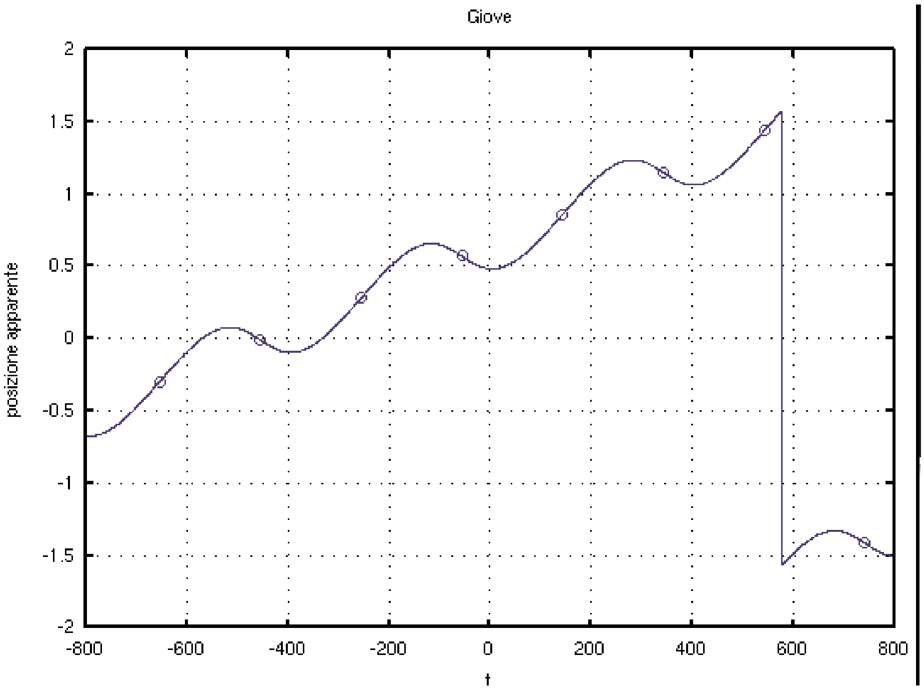


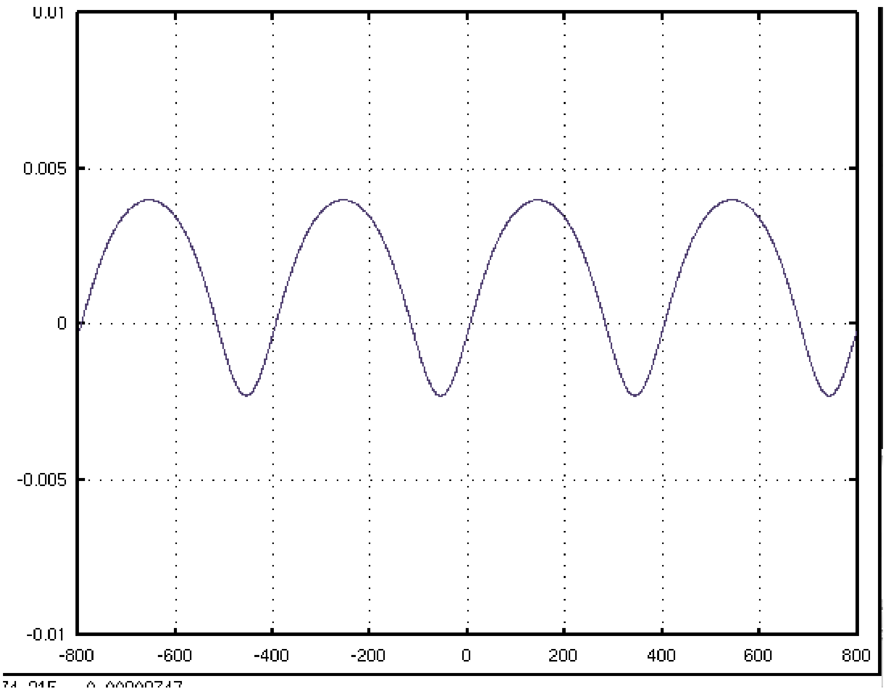
Marte, $3\omega_E > \omega_T$



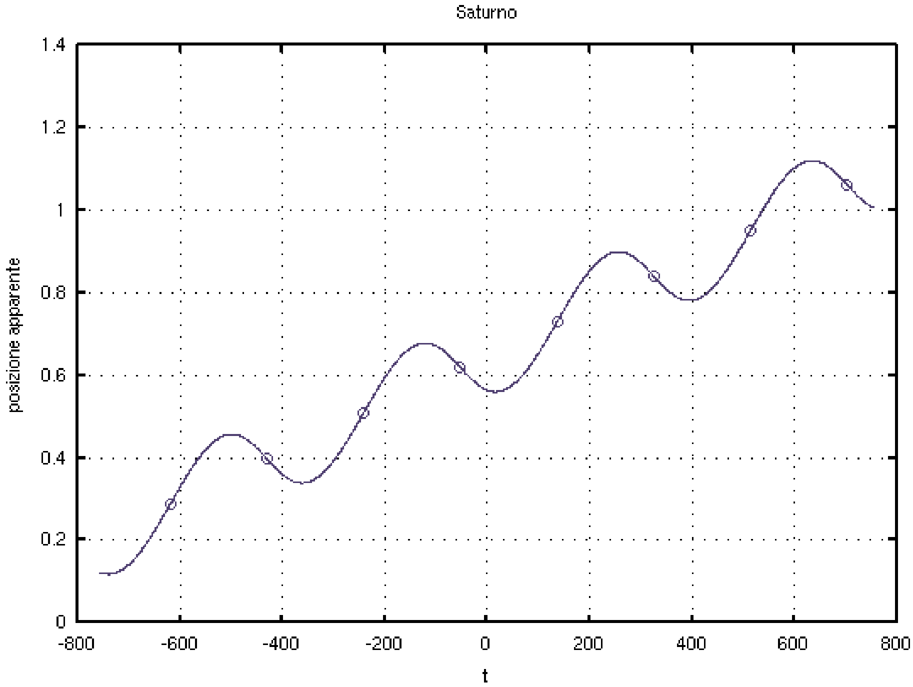
consegn

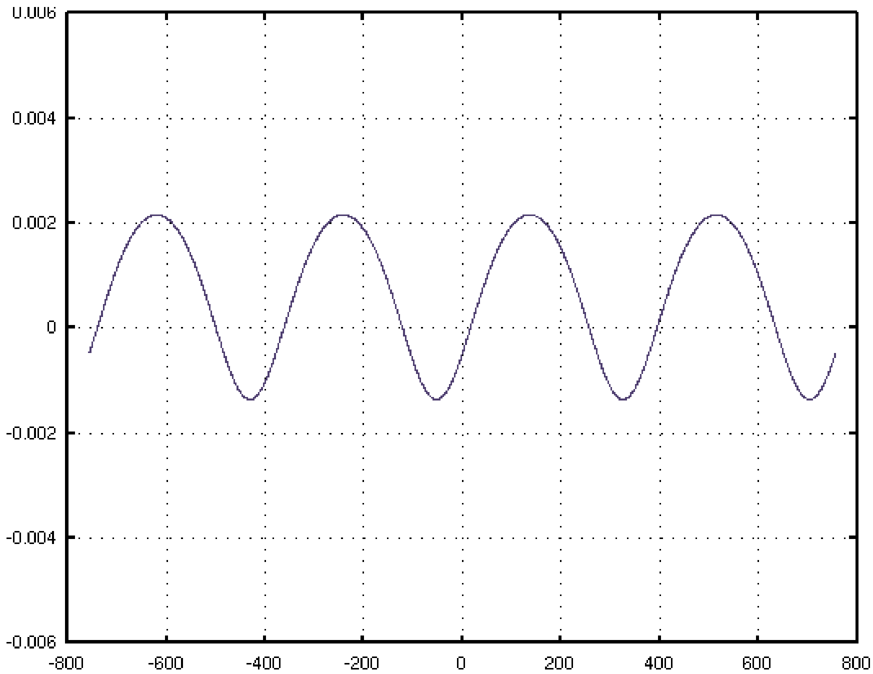
Giove, $3\omega_E < \omega_T$



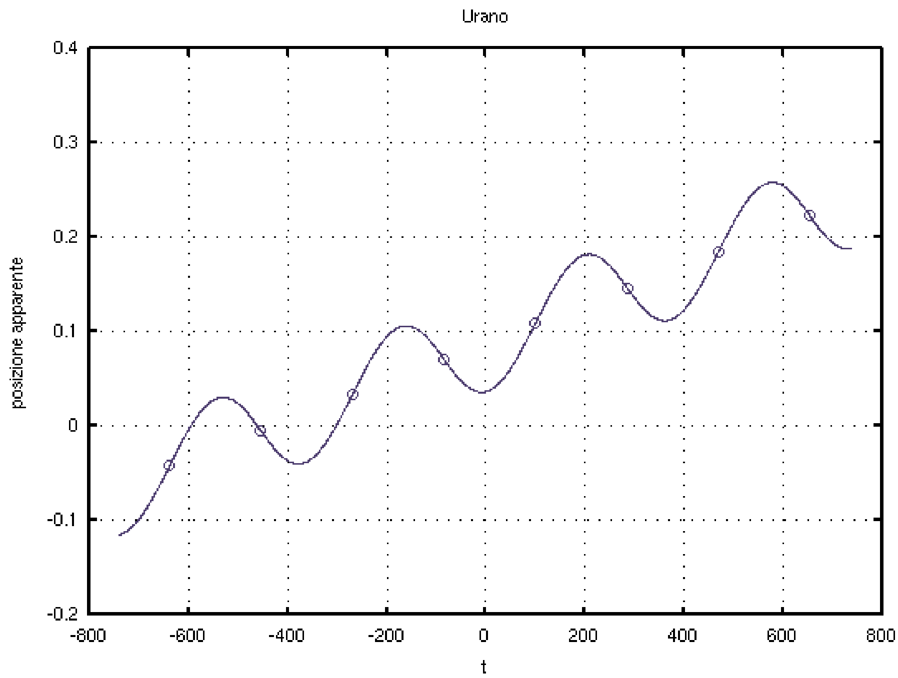


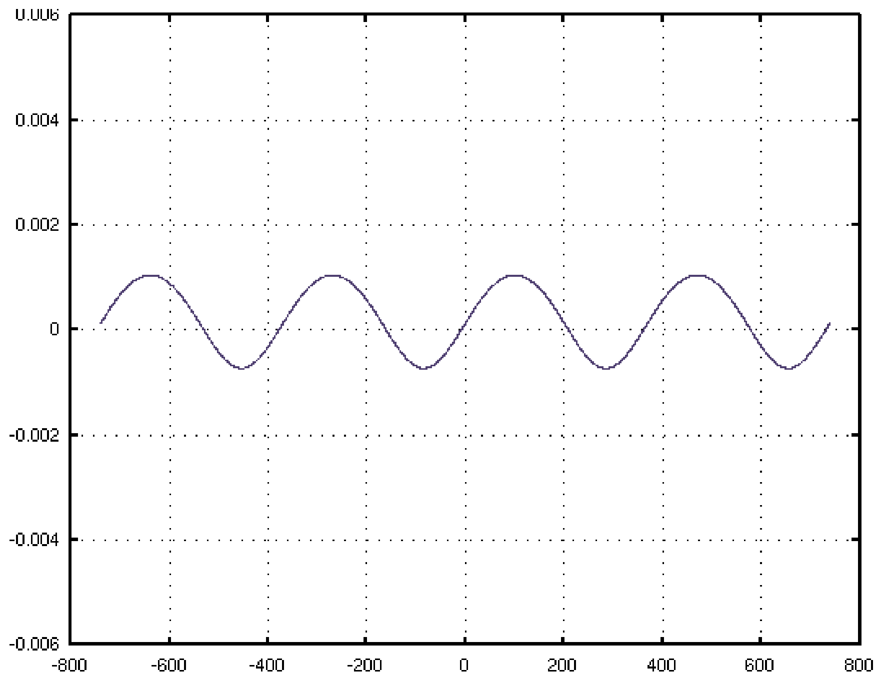
Saturno, $3\omega_E < \omega_T$





Urano, $3\omega_E < \omega_T$





6.4.12 Considerazioni didattiche per una classe quinta o quarta.

Se volessimo svolgere un lavoro di questo tipo in una classe quinta di un Liceo Scientifico l'impresa sarebbe sicuramente ardua. L'entità dei calcoli è infatti rilevante: non molti ragazzi frequentanti un Liceo hanno la dimestichezza necessaria con le derivate per poterlo effettuare senza perderci troppo tempo. Inoltre necessario sarebbe l'utilizzo di un software quale Octave e Matlab, con un linguaggio di programmazione non semplice.
L'importanza didattica che avrebbe un'esperienza del genere non è comunque da sottovalutare: i ragazzi verrebbero trasformati in modellizzatori matematici e ciò creerebbe una maggior consapevolezza dell'applicabilità della matematica.
Introdurre un argomento di questo tipo sarebbe ancora di più una scommessa per una classe quarta; i ragazzi di tale classe sono sprovvisti delle nozioni riguardanti l'analisi. Hanno, però, appena cominciato a maneggiare elementi di trigonometria e da sempre sono stati abituati all'osservazione di grafici cartesiani di funzioni; il moto circolare uniforme dovrebbe essere già stato acquisito.
Una classe quarta potrebbero essere capace di trovare i parametri e, dopo aver trovato (6.3), di sostituirli, di fare uno studio qualitativo dell'andamento della funzione. Con molti software in dotazione presso la maggior parte degli istituti scolastici è possibile disegnare il grafico della funzione e osservare la crescita e la decrescita dell'angolo in questione.

Capitolo 7

Conclusioni

L'importanza della geometria nella formazione della persona è stata, come già detto, più volte messa in discussione. Ho cominciato questo lavoro di tesi enunciando le ragioni che hanno condotto i membri della *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques* a ribadire la non superfluità della geometria, affermandone la sua essenzialità nella formazione del "cittadino comune".
Sulla base del mio accordo con i risultati di [3] ho quindi impostato un lavoro mirato a far progredire la classe sia in campo matematico e geometrico, sia in quello della risoluzione dei problemi della vita quotidiana.
A sperimentazione conclusa posso affermare che, come previsto, essa ha aumentato le conoscenze "scolastiche" dei ragazzi, ma ha anche migliorato il loro approccio alla risoluzione di problemi, anche in ambito non matematico.
La valutazione sia dell'andamento delle lezioni, che dei risultati della classe nei test di verifica svolti, ha reso evidente l'avanzamento nelle conoscenze geometriche; sicuramente la situazione di partenza della classe è stata di ostacolo perché mi ha obbligato a fare una vera e propria introduzione alla geometria. I pregi, però, di ciò non sono da sottovalutare: l'aver spiegato parte del programma normale della classe, personalmente, mi ha già abituato al tipo di lavoro che un'insegnante deve saper fare, inoltre i ragazzi hanno appreso le basi di una scienza testandone immediatamente la sua applicabilità. Sarebbe interessante tra qualche anno valutare il ricordo che avranno dell'esperienza svolta e il livello di gradimento della materia stessa.
Un altro pregio di questo lavoro mi è stato riferito dalla Prof.ssa Bianchin; durante i primi mesi dell'anno scolastico 2010/2011 la docente ha rimarcato una difficoltà diffusa nell'approccio al problema; i ragazzi, infatti, erano soliti arrendersi alla prima difficoltà e desistere quasi immediatamente. Dopo la sperimentazione la classe è risultata più pronta alla risoluzione dei vari problemi proposti e più reattiva in seguito alla presa in carico delle consegne che via via riceveva. Questo cambiamento è stato notato dalla docente anche nel corso dell'attuale anno scolastico e, a suo avviso, è in gran parte

dovuto agli stimoli dati nel corso delle esperienze svolte. L'efficacia della geometria nell'*allenamento al ragionamento* è stata quindi confermata.
Dai commenti dei ragazzi, elencati in 5.2, è evidente il compiacimento diffuso nell'aver toccato con mano l'applicabilità della matematica e nell'aver conosciuto storie di sapienti del passato che grazie alle loro conoscenze geometriche sono riusciti a misurare grandezze inarrivabili per la loro epoca. La "contestualizzazione storica" potrebbe essere, quindi, un importante alleato "didattico" nel raggiungimento di un buon insegnamento della geometria.
Per quanto riguarda i metodi didattici utilizzati, dai commenti dei ragazzi è evidente una certa insofferenza verso la lezione frontale. Questo sicuramente perché sono abituati solo a questo schema di lezione. Le nuove metodologie, quali uso di diapositive, lettura di un libro, lavori di gruppo e esperienze sul campo, sono state accolte in maniera molto gradita. Introdurre, quindi, nei vari programmi esperienze complementari in cui si fa uso di nuove forme di lezione non potrà che appagare gli alunni in questo loro forte desiderio di "novità" e questo gioverà all'apprendimento dei contenuti.

Il modello del moto retrogrado riportato nell'ultima parte di questa tesi è un approfondimento di matematica applicata all'astronomia molto riuscito. Quando il Prof. Ottaviani mi ha consigliato di trattarlo entrambi non pensavamo di giungere a risultati così significativi. Tramite lo studio del moto apparente per mezzo di funzioni trigonometriche siamo riusciti a dare una descrizione accurata del moto dei pianeti sia esterni che interni. Il moto retrogrado dei pianeti esterni sarà visibile dalla Terra; Mercurio e Venere, invece, saranno visibili solo quando ruotano di "moto diretto". I risultati, tranne qualche difficoltà per i pianeti interni, sono stati trovati facilmente grazie allo studio di una funzione e a software di supporto (Octave), ma soprattutto grazie alla **Teoria eliocentrica**. Se si pensa al sistema di epicicli utilizzato per spiegare le traiettorie "bizzarre" di Marte etc quando ancora resisteva la Teoria geocentrica ci rendiamo conto di quanto il progresso abbia semplificato e reso "limpido" il funzionamento del Sistema Solare.
Da un punto di vista didattico, la trattazione da un punto di vista qualitativo del modello stesso trasformerebbe i ragazzi in modellizzatori matematici. Come sottovalutare un'esperienza di questo tipo? Inoltre i grafici del moto apparente dei vari pianeti hanno delle particolarità facilmente spiegabili. I minimi e i massimi sono fine e inizio del moto retrogrado e i flessi rappresentano le epoche di allineamento di Sole, Terra e pianeta in questione. L'analisi nel piano cartesiano è quindi facilmente eseguibile anche senza lo studio quantitativo della soluzione.

Bibliografia

[1] G. Ottaviani, *Riflessioni sull'insegnamento della geometria oggi*, Atti Matematica, formazione scientifica e nuove tecnologie, Montevarchi-1998

[2] D. Guedj, *Il Teorema del Pappagallo*, Tea, Milano- 2003

[3] Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, *Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement*, Bull. APMEP 430-2000

[4] N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, *Lineamenti di matematica, vol.1*, Ghisetti e Corvi, Milano-1999

[5] N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, *Lineamenti di matematica, vol.2*, Ghisetti e Corvi, Milano-1999

[6] L. Tonolini, G. Tonolini, A. Manenti Calvi, *Fondamenti e metodi di matematica per i bienni, vol. B*, Minerva Italica, Città di Castello-2004

[7] D. Joyce, *Web version of Euclid's Elements with comments*, http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/elements.html

[8] B. D'Amore, *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna-1999

[9] *http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi*

[10] L. Russo, *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, Milano-1996

[11] L. Cateni, R. Fortini, *Geometria per l'Istituto Magistrale*, Felice Le Monnier, Firenze-1986

[12] A. Canevari-Crespi, *Geometria elementare, volume primo*, Sonzogno, Milano-1927

[13] A. Celletti, E. Perozzi, *Meccanica celeste, Il valzer dei pianeti*, Cuen, Napoli-1996

[14] J. Herrmann, *Atlante di astronomia*, Oscar Studio Mondadori, Milano-1975

[15] P. Duffett- Smith, *Astronomia pratica con l'uso del calcolatore tascabile*, Sansoni, Firenze-1983

[16] E. Lupia Palmieri, M. Parotto,*Osservare e capire la Terra*, Zanichelli, Bologna-2010

Ringraziamenti

Ed è arrivato anche per me il momento dei fatidici ringraziamenti...

Grazie al Prof. Giorgio Ottaviani per la sua competenza e disponibilità che mi ha permesso di essere davvero soddisfatta del mio lavoro di tesi.

Un grazie particolare alla Prof.ssa Bianchin, testimone dei miei primi passi nel mondo della scuola, perché la sua preparazione mi ha insegnato molto e il suo entusiasmo mi ha fatto capire quanto sia bello il mestiere di insegnante.

Il grazie più grande va a coloro che mi hanno permesso di studiare e di realizzarmi: i miei genitori. Grazie perché in ogni momento, anche difficile, del mio percorso mi avete sostenuto e fatto sentire il vostro amore, lasciandomi la libertà di fare scelte anche sofferte. Babbo, grazie per ogni volta che hai dimostrato stima e fiducia nei miei confronti anche quando, forse, non me la sarei meritata. Mamma, grazie per il tuo supporto, la tua pazienza nell'ascoltare i miei sfoghi, per esserci sempre stata ad incoraggiarmi e per esserti dedicata a me con l'amore che solo una mamma può dare.
Un grazie speciale anche alla mia sorellina: io e te, cara Isa, abbiamo un rapporto di odio/amore, ma so che per me ci sarai sempre e ti voglio tanto bene!
Volevo ringraziare anche le mie nonne che mi hanno incoraggiato e si sono sempre interessate di cosa facesse la loro nipotona.
Grazie a tutti gli zii, i cugini, le cugine e scusate se non spendo una parola per ognuno di voi, ma non saprei da dove cominciare!

E come non ringraziare i miei amici matematici che hanno condiviso con me gioie e dolori universitari?
Grazie alla mia amica Cambru per tutte le volte che mi ha ascoltato e consolato (come dimenticare il terribile pomeriggio di Geometria 1?) e perché, nel suo essere timida e riservata, è sempre riuscita a dimostrarmi il suo affetto.
Grazie alla Sara Baro che, con la sua vocetta stridula e le sue ansie, mi ha spesso dato un punto di vista diverso sulle cose ed è stata compagna di tante risate e confidenze.
Grazie alla Dailis che è stata sempre pronta ad aiutarmi dispensando consigli preziosi e facendo affogare i miei dispiaceri nello zucchero dei suoi dolci.

Grazie all'Irene e ai suoi capelli arancioni, perché i pianti condivisi (leggere Geometria 2), le risate, le battute e la Lista Arancione rimarranno tra i ricordi più belli di questi anni.
Grazie a Sara Mossa e Daniele Buratta perché gli anni in cui abbiamo condiviso l'essere rappresentanti in cdl sono stati per me importantissimi e mi hanno cambiato: il merito è soprattutto vostro!
Un posto particolare nei miei ringraziamenti va al mio Carlo; con quali parole posso descrivere quello che abbiamo vissuto insieme nel nostro erasmus parigino? Ti dico solo che sono orgogliosa di avere un amico vero come te e che non avrei potuto avere un compagno di avventura migliore.
Infine un grazie al resto dei matematici che mi hanno accompagnato: Francesca, Michela, Stefano, Massimo, David, Emanuele, Giulia Fanti, Adriana, Valentina, Giulia Manelli, Ilaria, Nadia...

Un grazie collettivo ai miei amici chiusini perché sono stata troppo contenta di essere cresciuta con voi accanto. In particolar modo grazie a Alice, per la nostra amicizia simbiotica dai tempi del Liceo, Giuditta, per il suo affetto sempre sincero, Angy, per la sua dolcezza e sensibilità, Sifi, perché resterà sempre la mia piccola gnu e Francesca, perché è la mia confidente e perché senza le sue interminabili telefonate come farei a sopravvivere?

Grazie a Jessica, mia compagna adorata di Liceo e di camera per i primi due anni di vita fiorentina, perché, anche se ci vediamo poco, so che lei e la piccola Fiamma mi sono vicine.

Grazie a Felicita, che ha sempre un pensiero per me, a Giorgia, che con il suo sorriso mi ha insegnato che "se pensi positivo, positivo avrai" e al resto del gruppone del "baretto" perché, tra cedrate versate e spumanti stappati troppo presto, mi sopportate anche quando faccio i pasticci.

Grazie a tutti gli amici dell'Opera per le sciate a "Il Cimone", i bagni a "La Vela", gli incontri "in saloncino" e perché questi anni sono stati pieni di affetto e di amicizia vera. Un grazie particolare a Giulia e Francesco Rosadi (mi fa ancora effetto scrivervi insieme), Giuditta e Riccardo Clementi (anche Elia naturalmente), Elena, Sara, Giacomo (quello che succede in Polonia...), Brizio, Irene e Giulia Fantechi.

Merci à tous les parisiens, vrais et d'adoption; c'est avec vous que j'ai vecu la plus belle année de toute ma vie. Merci surtout à Giulia, Dimitri, Sara, Elena, Stephanie, Carlos, Denis, Kristin, John, Chiara et Noura.

Grazie a Laura, Leonardo, Edoardo e al mio figlioccio Riccardo, perché mi avete accolto con gioia nella vostra famiglia.