UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
FACOLTA' DI S.M.F.N.

Anno accademico 2004/2005

Tesina per la laurea triennale in Matematica

di Ilaria Nesi

Geometria intorno al teorema di Pascal

relatore: Giorgio Ottaviani

Introduzione

Il teorema di Pascal è un risultato fondamentale che si colloca nell'ambito della teoria delle coniche. Blaise Pascal(1623-1662) lo pubblicò con il nome di *teorema dell'esagramma mistico* in un "Saggio sulle coniche" che scrisse all'età di sedici anni. Il teorema si può oggi enunciare così:

TEOREMA DI PASCAL 1 *Se un esagono piano $ABCDEF$ è inscritto in una conica, allora le tre coppie di lati opposti AB-DE,BC-EF,CD-FA si incontrano in tre punti allineati (Figura 1); viceversa, se un esagono piano gode di quest'ultima proprietà, allora esso è inscritto in una conica.*

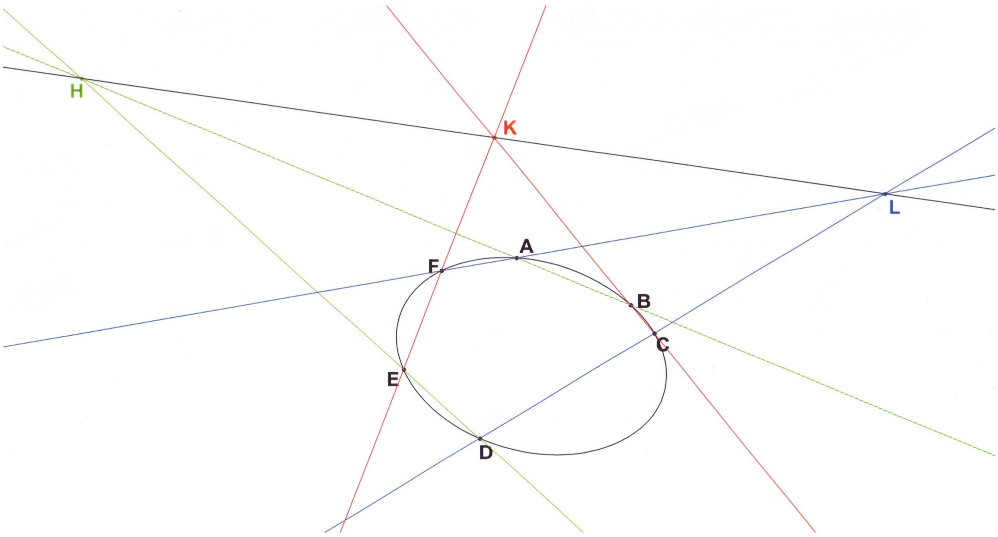

Figura 1: Teorema di Pascal

Osservazione 2 *Il teorema vale anche nel caso in cui l'esagono sia intrecciato (Figura 2).*

Qui di seguito illustreremo alcuni dei più interessanti approcci a questo teorema, e una sua applicazione riguardante le costruzioni con la sola riga.

L'approccio metrico-proiettivo

La prima dimostrazione che presentiamo è dovuta a Carnot e fa uso di concetti classici della geometria ([3], §3,10,11).

Definizione 3 *Un'espressione formata con le misure di più segmenti è un'espressione metrico-proiettiva quando è uguale all'espressione formata con le misure dei segmenti che si ottengono dai precedenti tramite una proiezione*

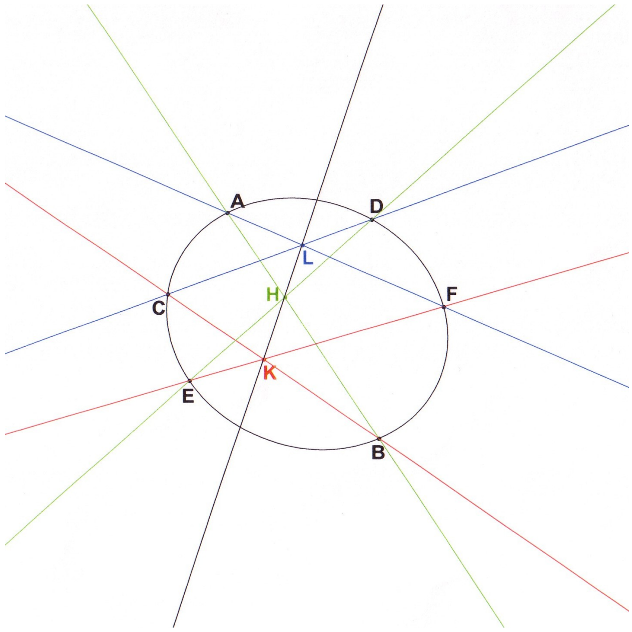

Figura 2: Teorema di Pascal: caso in cui l'esagono è intrecciato

(cioè, in termini più moderni, quando è invariante rispetto al gruppo delle proiettività).

Proposizione 4 *Se $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ sono due gruppi di n segmenti, se ogni punto che sia estremo di più segmenti di a (o b) lo è pure di altrettanti segmenti di b (o a), e se ogni retta che contenga più segmenti a (o b) contiene altrettanti segmenti b (o a), allora la frazione $\frac{a_1 \cdots a_n}{b_1 \cdots b_n}$ è un'espressione metrico-proiettiva.*

Definizione 5 *Siano A,B,C tre punti di una stessa retta; il rapporto semplice (ABC) è così definito:*

$$(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad .$$

Come corollario della proposizione 4, si ha che le espressioni presenti nei seguenti due teoremi sono metrico-proiettive:

Teorema 6 (teorema di Menelao) *Condizione necessaria e sufficiente affinché tre punti B_1,B_2,B_3 situati rispettivamente sui lati A_1A_2,A_2A_3,A_3A_1 di un triangolo $A_1A_2A_3$ siano allineati è:*

$$(A_1A_2B_1)(A_2A_3B_2)(A_3A_1B_3) = 1.$$

Teorema 7 (teorema di Carnot) *Condizione necessaria e sufficiente affinché sei punti B_1,B'_1,B_2,B'_2,B_3,B'_3 appartengano a una conica è che, ponendo:*

$$A_1 = B_3B'_3 \cap B_1B'_1; \quad A_2 = B_1B'_1 \cap B_2B'_2; \quad A_3 = B_2B'_2 \cap B_3B'_3,$$

si abbia:

$$(A_1A_2B_1)(A_1A_2B'_1)(A_2A_3B_2)(A_2A_3B'_2)(A_3A_1B_3)(A_3A_1B'_3) = 1.$$

Adesso abbiamo tutti i prerequisiti necessari per comprendere la dimostrazione data da Carnot:
Prima dimostrazione del teorema di Pascal:
Sia $ABCDEF$ un esagono inscritto in una conica; consideriamo il triangolo con lati BC,DE,FA e poniamo $X = BC \cap DE$, $Y = DE \cap FA$, $Z = FA \cap BC$ (Figura 1).
Per il teorema di Carnot (necessità):
$(YZA)(YZF)(ZXB)(ZXC)(XYD)(XYE) = 1$.
Ponendo inoltre: $H = AB \cap DE$, $K = BC \cap EF$, $L = CD \cap FA$,
per il teorema di Menelao (necessità):
$(YZF)(ZXK)(XYE) = 1$, $(YZL)(ZXC)(XYD) = 1$,
$(YZA)(ZXB)(XYH) = 1$;
moltiplicando membro a membro (e riordinando i fattori opportunamente):
$\underbrace{(YZA)(YZF)(ZXB)(ZXC)(XYD)(XYE)}_{=1}(YZL)(ZXK)(XYH) = 1$;
quindi: $(YZL)(ZXK)(XYH) = 1$.
Applicando nuovamente il teorema di Menelao, questa volta la sufficienza, si ottiene che H,K,L sono allineati.
Viceversa, se H,K,L sono allineati, facendo la stessa costruzione precedente: per il teorema di Menelao (necessità):
$(YZA)(YZF)(ZXB)(ZXC)(XYD)(XYE)\underbrace{(YZL)(ZXK)(XYH)}_{=1} = 1$;
quindi: $(YZA)(YZF)(ZXB)(ZXC)(XYD)(XYE) = 1$.
Dal teorema di Carnot (sufficienza) segue che A,B,C,D,E,F stanno su una conica.

L'approccio con la costruzione proiettiva della conica

Alla base di questa dimostrazione, data da Mac Laurin, c'è un'interessante costruzione della conica. Cominciamo col dare le definizioni necessarie.

Definizione 8 *Dati due punti P,Q e una retta m, una prospettività è una corrispondenza biunivoca tra le rette del fascio con centro P e le rette del fascio con centro Q, così definita: alla retta per P che incontra m nel punto A è associata la retta per Q che passa per A.*

Dualmente: date due rette m,n e un punto P, una prospettività è una corrispondenza biunivoca tra i punti di m e i punti di n, che al punto $A \in m$ associa $B = PA \cap n$.

Definizione 9 *Una proiettività è una composizione di prospettività.*

Dati tre punti P,Q,R e due rette m,n, c'è quindi una proiettività tra le rette per P e le rette per R, data dalla composizione della prospettività tra le rette per P e quelle per Q (rispetto a m) e la prospettività tra le rette per Q e quelle per R (rispetto a n).
Il punto d'intersezione Z tra una retta per P e la corrispondente per R, al variare di A su m, descrive una conica non degenere (Figura 3).
Con dei semplici calcoli si può verificare che la curva che si ottiene è in effetti una conica. Se la proiettività è in particolare una prospettività, la conica degenera in una retta.

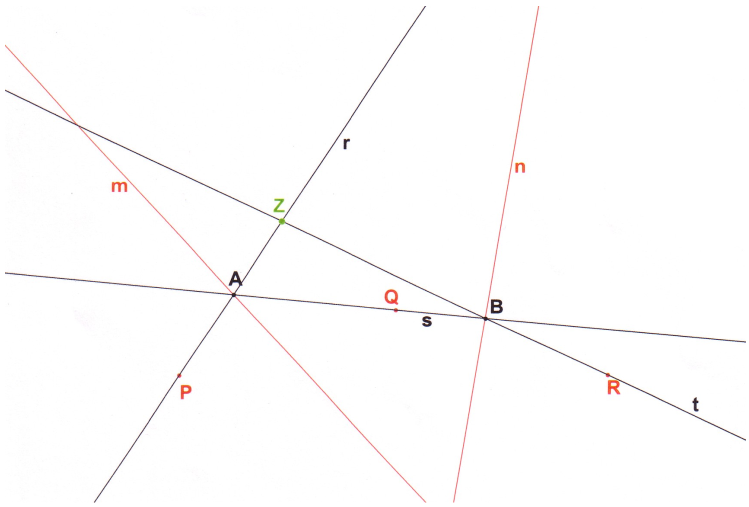

Figura 3: Costruzione della conica tramite una proiettività

Una volta vista questa costruzione, possiamo dimostrare la seguente proposizione ([3], §10):

Proposizione 10 *Se un triangolo ABC si deforma in modo che i suoi lati BC,CA,AB passino rispettivamente per tre punti non allineati S_1,S_2,S_3, e i suoi vertici A,B scorrano lungo due rette fisse r_1,r_2 non passanti per quei punti, né concorrenti sulla retta S_1S_2, allora il vertice C descrive una conica non degenere (Figura 4). Viceversa, ogni conica non degenere può generarsi così.*

In questo caso, i fasci di rette per S_2 e per S_3 sono prospettivi rispetto a r_1, mentre i fasci per S_1 e per S_3 sono prospettivi rispetto a r_2; inoltre r_1 e r_2 sono prospettive, nel senso duale, rispetto al punto S_3. Dunque, i due fasci descritti da S_1B e S_2A sono proiettivi tra loro (e non prospettivi, per le ipotesi su r_1,r_2) e il punto $C = S_2A \cap S_1B$ descrive una conica non degenere.

Osservazione 11 *La conica passa per i punti* S_1, S_2, $O(= r_1 \cap r_2)$, $M(= S_1S_3 \cap r_1)$, $N(= S_2S_3 \cap r_2)$.

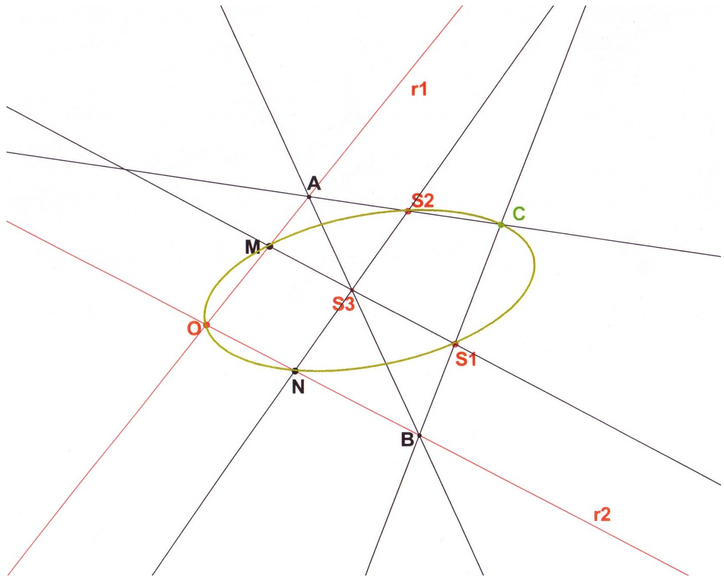

Figura 4: Proposizione 8

Seconda dimostrazione del teorema di Pascal:
Sia $ABCDEF$ un esagono inscritto in una conica; poniamo:
$H = AB \cap DE$; $K = BC \cap EF$; $L = CD \cap FA$ (Figura 2).
Se un triangolo XYZ si deforma in modo che i suoi vertici X,Y scorrano sulle rette CD,CB, e i lati YZ,ZX,XY passino per i punti fissi E,A,H, allora il vertice Z, per la proposizione 10, descrive una conica che passa per i punti A,E,C,B,D (che corrispondono, nell'ordine, ai punti S_1,S_2,O,M,N della proposizione), cioè Z descrive la conica data.
Quando Z viene a coincidere con F, i vertici X e Y del triangolo coincidono rispettivamente con L e K; H deve essere il punto fisso del lato LK, quindi L,H,K sono allineati.
Viceversa, sapendo che H,K,L sono allineati: facendo la stessa costruzione, si ha che le due rette AL e EK devono incontrarsi in un punto che sta sulla conica passante per A,B,C,D,E, ed è proprio $F = AL \cap EH$ ([3], §11) .

Approccio geometrico-algebrico

Il terzo che presentiamo è un approccio più moderno al teorema di Pascal ([1], cap.3). Citiamo due fondamentali risultati di geometria proiettiva:

Teorema 12 (teorema di Bezout in forma debole) *Se due curve proiettive C e D di grado n e m in $\mathbb{P}^2$ non hanno componenti in comune, allora si intersecano in al massimo nm punti.*

Teorema 13 (HilbertNullstellensatz) *Sia C una curva proiettiva irriducibile in $\mathbb{P}^2$ e F un polinomio omogeneo in x,y,z; se $F \equiv 0$ su C, allora F è diviso dall'equazione di C.*

Ai fini della dimostrazione del teorema di Pascal useremo quest'ultimo teorema nei casi in cui $deg(C)$ vale 1 oppure 2; in tali casi la dimostrazione risulta elementare ([2], cap.2). Siamo ora in grado di dimostrare questa proposizione, dalla quale il teorema di Pascal segue come semplice corollario:

Proposizione 14 *Se due curve proiettive C e D di grado n in $\mathbb{P}^2$ si intersecano in esattamente n^2 punti, ed esattamente nm di questi punti stanno su una curva irriducibile E di grado $m<n$, allora i rimanenti $n(n-m)$ punti stanno su una curva di grado al massimo $(n-m)$.*

Dimostrazione :
Siano C,D,E definite rispettivamente da $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$.
Scegliamo un punto $[a,b,c] \in E$ che non stia in $C \cap D$; la curva di grado n definita dal polinomio omogeneo: $\lambda P(x,y,z) + \mu Q(x,y,z)$,
con $\lambda = Q(a,b,c)$, $\mu = -P(a,b,c)$, incontra E in almeno $nm+1$ punti ([a,b,c] e gli nm punti di $C \cap D$ che stanno su E per ipotesi);
per il teorema di Bezout: questa curva ed E hanno una componente comune, che deve essere E perché è irriducibile.
Quindi, per il teorema 13: $\lambda P(x,y,z) + \mu Q(x,y,z) = R(x,y,z)S(x,y,z)$,
con $S(x,y,z)$ polinomio omogeneo non costante di grado $(n-m)$.
Se $[u,v,w] \in C \cap D$: o $R(u,v,w) = 0$, oppure $S(u,v,w) = 0$,
quindi gli $n(n-m)$ punti che non stanno su E devono giacere tutti sulla curva definita da $S(x,y,z)$.

Terza dimostrazione del teorema di Pascal:
Siano i lati successivi dell'esagono le rette definite dai polinomi lineari $L_1, \ldots, L_6$ in x,y,z; le due curve proiettive di grado 3 definite da $L_1 \cup L_3 \cup L_5$ e $L_2 \cup L_4 \cup L_6$ si intersecano in 9 punti: i 6 vertici dell'esagono e i 3 punti d'intersezione tra lati opposti.
La tesi segue immediatamente dalla proposizione 14: se per ipotesi i 6 vertici dell'esagono stanno sulla conica, gli altri 3 punti devono stare su una retta; se invece questi ultimi stanno per ipotesi su una retta, i restanti 6 punti devono stare su una conica.

L'approccio con la forma canonica proiettiva

In tutte le dimostrazioni del teorema di Pascal viste finora, è stato possibile dimostrare entrambe le implicazioni con gli stessi strumenti. Ciò non accade

in quest'ultima, dovuta a Gergonne, della quale analizzeremo soltanto la prima implicazione ([3], §11). Si può comunque osservare che se il teorema è valido in un senso, lo è anche nell'altro.
In anticipazione alla dimostrazione di Gergonne dobbiamo soltanto citare un risultato di geometria elementare:

Lemma 15 *Due rette r,s, che tagliano una circonferenza rispettivamente nei punti A,B e C,D, sono parallele se e solo se: arco AC = arco BD.*

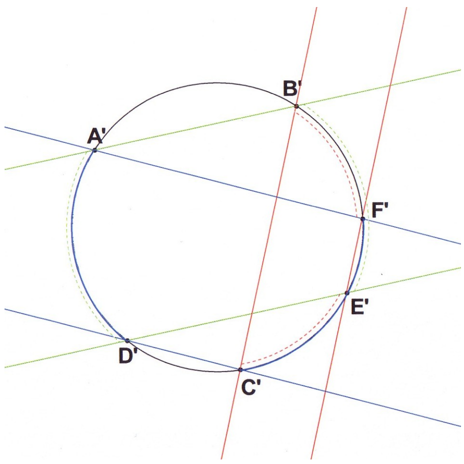

Figura 5: Dimostrazione dovuta a Gergonne

Quarta dimostrazione del teorema di Pascal:
Sia $ABCDEF$ un esagono inscritto in una conica C; poniamo:
$H = AB \cap DE$; $K = BC \cap EF$; $L = CD \cap FA$.
Supponiamo che HK sia una retta esterna alla conica (per continuità, la dimostrazione sarà valida nel caso generale); tramite una prima trasformazione proiettiva portiamo la retta HK nella retta all'infinito, e poi trasformiamo C in forma canonica (cioè in una circonferenza); i punti A,B,... andranno nei punti A',B',... (Figura 5).
H' è all'infinito $\Rightarrow$ $A'B'$ e $D'E'$ sono parallele $\Rightarrow$ arco $A'D'$ = arco $B'E'$,
K' è all'infinito $\Rightarrow$ $B'C'$ e $E'F'$ sono parallele $\Rightarrow$ arco $B'F'$ = arco $E'C'$.
Allora: arco $A'D'$ = (arco $B'E'$ $-$ arco $B'F'$) + arco $E'C'$ = arco $F'E'$ +
+ arco $E'C'$ = arco $F'C'$;
quindi le rette $A'F'$ e $D'C'$ sono anch'esse parallele, cioè il punto L' appartiene alla retta all'infinito $H'K'$.
Risalendo alla figura di partenza si conclude che i punti H,K,L sono allineati.

Un'applicazione: costruzione della tangente

Innanzitutto osserviamo che il teorema di Pascal vale anche quando i vertici dell'esagono non sono tutti distinti, purché si assuma come congiungente di

due vertici coincidenti consecutivi la tangente alla conica nel punto in cui essi coincidono.
Vogliamo trovare la tangente a una conica in un suo punto A. Prendiamo altri 4 punti C,D,E,F sulla conica e consideriamo il pentagono $ACDEF$ come un esagono degenere in cui due vertici coincidono ($A \equiv B$); nella costruzione del teorema di Pascal, al posto della retta AB si avrà proprio la tangente t che si sta cercando.
Le rette BC e EF si incontrano in K, le rette CD e FA si incontrano in L, la retta DE e la tangente t si incontrano in H; dal teorema si sa che H,K,L devono essere allineati, quindi trovare t vuol dire trovare la retta passante per A e per $H = DE \cap KL$ (Figura 6).

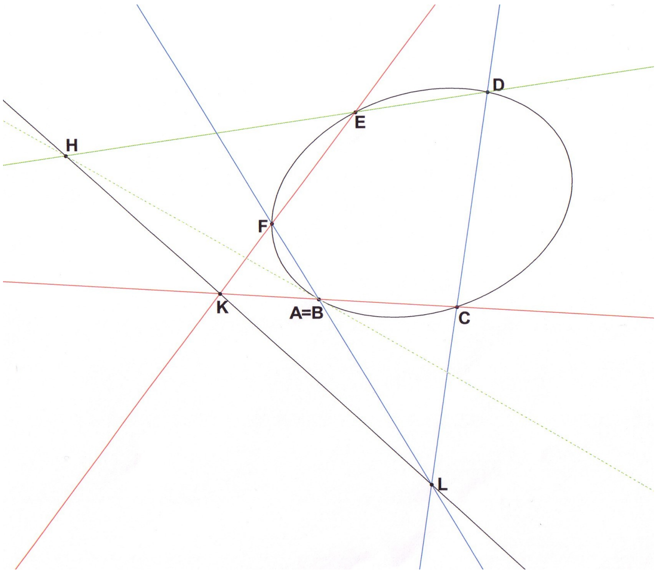

Figura 6: Costruzione della tangente alla conica

Bibliografia

[1] F.C. Kirwan: *Complex algebraic curves*, ed. Cambridge (1992)

[2] M. Reid: *Undergraduate algebraic geometry*, ed. Cambridge (1988)

[3] F. Severi: *Complementi di geometria proiettiva*, ed. Zanichelli (1906)